高等學校教學用書

開口薄壁桿件的彎扭變形

Ю. И. 雅根著

高等教育出版社

高等學校教學用書

開口薄壁桿件的彎扭變形

理論與習題

Ю. И. 雅根著
浙江大學力學教研組譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的雅根（Ю. И. Ягн）所著“開口薄壁桿件的彎扭變形”（Изгибно—крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля, теория и задачи）一書1952年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教學參考書。

本書共分三章，第一章爲彎扭變形的普遍理論，第二章講普遍理論在開口斷面薄壁桿件上的應用，第三章爲習題。

本書由浙江大學力學教研組蔡承文、吳介卿、劉鴻文、謝貽權、董友成依頁次分擔翻譯，由王仁東校閱。

開口薄壁桿件的彎扭變形

Ю. И. 雅 根 著

浙江大學力學教研組譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 389（課 361）　開本 850×1168 1/32　印張 3　字數 61,000

一九五五年九月上海第一版

一九五六年二月上海第二次印刷

印數 1,001—2,000　　定價(8) ¥ 0.48

目　錄

序言……………………………………………………………… 5

第一章　彎扭變形的普遍理論……………………………… 9

§1. 桿件變形的新的運動學概念 ……………………………………… 9

§2. 桿件斷面上的正應力及其對應的廣義力 ……………………………14

第二章　普遍理論在開口斷面薄壁桿件上的應用………………24

§3. 斷面的翹曲與正應力 ………………………………………………24

§4. 剪應力以及雙力矩微分方程的推導 ………………………………33

§5. 受壓薄壁桿件的穩定 ………………………………………………42

第三章　習題………………………………………………………58

§6. 斷面專門幾何特性的計算 …………………………………………58

§7. 廣義力和應力的計算．扭角的求法 ………………………………69

§8. 均勻受壓桿件的穩定計算 …………………………………………84

附錄…………………………………………………………………89

中俄名詞對照表……………………………………………………92

序　言

彎扭變形乃是桿件變形的特殊形式，在不久以前還沒有人知道。這些變形的理論主要是由蘇聯科學家的努力所創立起來的，而在這個領域內貢獻最大的當推斯大林獎金獲得者 B. З. 伏拉索夫[①]。他引述了一系列原則性的新概念，建立了開口斷面薄壁桿件的彎扭變形的完整理論。使得在任意荷重和任何邊界條件下有關應力、位移的求法以及穩定性計算的一切問題都獲得了解決。此後，A. A. 烏曼斯基[②]導出了閉口斷面薄壁桿件的普遍理論。這理論應用到任意斷面形狀桿件方面的發展，則由 B. B. 諾伏茹洛夫[③]和 Г. Ю. 達查涅里捷[④]所完成。

彎扭現象的發現以及這種變形的完善理論的建立，就物體變形和強度的整個學說的發展上來說，是一件非常重大的事情。它揭露了許多認爲不可動搖的陳舊觀念的狹隘的局限性，而且對於一系列計算跟實驗之間難以瞭解的分歧作了解釋，並給新的研究途徑開闢了遠景，這種途徑就是把在材料力學理論中所應用來解決問題的工程法則與數學彈性理論的嚴格法則兩者緊密地結合起來。無論是彎扭變形普遍理論的本身，以及這個理論在建築工程各

① 參看 B. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940; 及許多以前的著作。

② 參看 A. A. Уманский, Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, 1939; О нормальных напряжениях при кручении крыла самолёта, Техника воздушного флота, № 12, 1940。

③ 參看 B. B. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, 1948。

④ 參看 Г. Ю. Джанелидзе, К расчёту тонких и тонкостенных стержней, Прикладная математика и механика, № 6, 1949。

部門所採用的桿件結構的計算方面的繼續發展(這是蘇聯科學家的功績),都獲得了極大的實用價值。這裏可以提出的有:Б. Н. 高爾布諾夫[①],Б. Н. 高爾布諾夫和 А. И. 斯特略爾皮茨卡婭[②]以及 Д. В. 貝奇科夫[③]諸人的著作,當然這只是佔近年來所發表的大量文獻的一小部份而已。

彎扭變形對於開口斷面薄壁桿件的計算具有極大的意義。在這種桿件中,彎扭變形可產生相當大的應力,而且對位移亦有很大的影響。在計算開口斷面薄壁桿件的穩定性時,這種變形更具有其特別重大的意義。

對學生來說,學習彎扭變形是有些困難的。這是由於這些現象的複雜性,以及到目前爲止還不能用簡單方式來表達概念的新穎所造成的。本書的目的在於給予學生幫助,書中對各種必需的具體概念給出了循序漸進的發揮,同時對問題的理論說明又保持了充分的嚴格性和完整性。

全書共分三章,第一章帶有緒論的性質,章內敘述任意斷面桿件的彎扭變形現象的一般知識。作者在這一章中所體現的觀點,便是前面提及的 В. В. 諾伏茹洛夫和 Г. Ю. 達查涅里捷的著作中所闡明的。第二章是在第一章所建立的一般原理的基礎上,來陳述 В. З. 伏拉索夫對於開口斷面薄壁桿件的理論。第三章則是習題。對於典型的和比較複雜的習題都給出了解法。一方面藉幾何形式來作出結論,而同時又使所有的量以及它們之間的關係與具體的

① 參看 Б. Н. Горбунов, Расчёт пространственных рам из тонкостенных стержней. Прикладная математика и механика, 1943。

② 參看 Б. Н. Горбунов и А. И. Стрельбицкая, Приближённые методы расчёта вагонных рам, Машгиз, 1946; Теория рам из тонкостенных стержней. Гостехиздат, 1948。

③ 參看 Д. В. Бычков, Расчёт балочных и рамных систем из тонкостенных элементов, Госстройиздат, 1948。

靜力學的和運動學的概念相聯繫,這就是本書所採取的敍述方式的特點。在敍述時,假定彎扭變形是在材料力學教程的最後幾章中學習的,那時學生已熟悉了桿件所有其它簡單的和組合的變形,已熟悉了根據歐拉理論來解決縱向彎曲問題,同時也熟悉了有關變形位能方面的知識。最好對於廣義力和廣義位移的概念,亦有深刻的認識。

第一章　彎扭變形的普遍理論

§1. 桿件變形的新的運動學概念

在很長一段時期中，推導桿件變形的技術理論所根據的基本假設，就是橫斷面保持為平面的這個概念。但早在前一世紀中葉，由於彈性理論發展的結果，才知道在桿件受有扭轉或剪力的作用時，亦卽有剪切變形產生時，這一假設並不正確。在這兩種情形下斷面變曲了，或者說斷面發生了翹曲[①]。因之，這個斷面並不變曲的概念，後來只用於拉伸、壓縮及彎曲，亦卽只能用來決定桿件纖維的伸長和縮短。同時對於這個疇範內的現象說來，這個概念的正確性未曾引起任何疑問，因為對這些問題的嚴格分析的結果很好地證明了這一點。以往大家都認為這個觀點很可靠，但到不久以前，平斷面概念的缺點逐漸給發現了，卽使對於決定桿件纖維的縱向變形亦是這樣。當桿件受扭或受剪力作用時，只要注意到斷面翹曲的改變必然產生的縱向變形，上述的結論就變得很明顯了。因為由剪力作用所引起的斷面翹曲不會有顯著的影響，所以問題的研究對象僅僅限於因扭轉而產生的翹曲部分。

這樣就引出了形成桿件纖維縱向變形的新的運動學概念。必須注意到，根據這一概念橫斷面的位置就有三個可能的變化：斷面

---

① "депланация"（翹曲）一詞源出於拉丁文，意思是走出了平面或喪失了在同一個平面內的原有位置，就如變形是表示失去原有形狀或形狀改變一樣。

可能作縱向平行移動，又可能繞兩個橫向中心軸而轉動，最後，亦可能引起隨扭轉程度而定的翹曲。如果上述任一種斷面位移在桿件的長度方向上都相等的話，那末纖維並不因這個位移而有任何變形。但只要位移一不相同，纖維便有伸長或縮短。這時，各斷面不相等的平行移動，就造成了桿件通常的拉伸或壓縮變形；各斷面的不相等的轉動，便引起了彎曲變形；而沿着桿長變化的斷面翹曲，就形成了一種稱爲彎扭的特殊變形。於是在桿件的斷面上，就必然相應地產生了三類正力：(1)由於通常拉伸所產生的，(2)由於彎曲所產生的和(3)由於彎扭變形所產生的。第一類可歸併成一個縱向合力；第二類形成繞某一橫軸的力矩；而第三類是個自相平衡的力系，因爲桿件的截出部份已爲前兩個力系所平衡。以後將會講到對桿件斷面上這個自相平衡的力系，可用怎樣的廣義量來表示。

在建立彎扭變形的技術理論時，我們採用了以下的假設：每一斷面的變曲（翹曲）僅僅決定於斷面所在位置的相對扭角的大小，而由於翹曲所產生的位移與相對扭角之間的關係，則與相對扭角之爲常數（像在純扭時的情形那樣）或是沿着桿長而變都沒有關係。這一假設已很好的爲實驗所證明了[①]。

根據方才所說的，假設翹曲的大小與相對扭角之間應保持線性的比例關係，於是可以列出公式：

$$u=\theta'\omega(y,\,z), \tag{1}$$

式中 u—斷面上各點由於斷面翹曲而造成的縱向位移；θ—扭轉時

---

① 但必須指出：在彎扭情形下，翹曲的形狀和大小二者與相對扭角之間的關係，和在純扭情形下相同的。這個假設，並不對各種形狀的桿件都可適用的。它對於薄壁桿件來說，比之斷面尺寸在各方向沒有大差別的"厚壁"桿件，更加接近實際情況。這一點可以從桿件受到均勻與不均勻扭轉時經精密測定縱向位移的結果加以比較而得到證實。

斷面的扭角; $\theta'=\frac{d\theta}{dx}$—相對扭角; $\omega(y,z)$—斷面上各點的 y、z 坐標的函數,只與斷面形狀有關,以後就簡單地以 ω 來表示。我們指出,ω 的單位是厘米^2,並可看作是一個在長上變化的面積。方程式(1)顯然表明了橫斷面的變曲了的表面;而函數 ω 就代表當 $\theta'=1$ 時的變曲。函數 ω 稱爲扭轉函數。

若將由於翹曲而產生的位移(1)加上由於斷面平行移動及其繞橫軸轉動而產生的位移,便得到斷面各點的縱向總位移:

$$u=u_0+\alpha_y z-\alpha_z y+\theta'\omega, \tag{2}$$

式中 u_0—斷面的縱向位移(當沒有翹曲時,這就是坐標原點在所給斷面內的位移),而量 α_y 和 α_z 爲斷面各繞橫軸 y、z 的轉角。在立出方程式(2)時,係採用右手坐標系(圖1),而對於角 α_y 和 α_z,則以繞相應軸作反時針方向旋轉時爲正(如果從軸的正方向一邊觀察)。在上述的這種坐標系下,對含有角 α_y 和 α_z 的各項前面的正負號是否正確,極易檢查,只要看一看第一象限內的一點即可,在此象限內 y 和 z 坐標都是正的。如圖2所示(在此圖中爲了使表示簡單起見,取了一個矩形斷面桿件)當斷面繞 y 軸反時針方向旋轉時,便造成該點在 x 軸正方向內

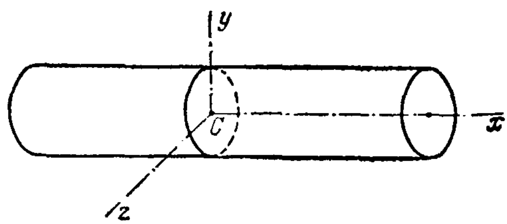

圖 1.

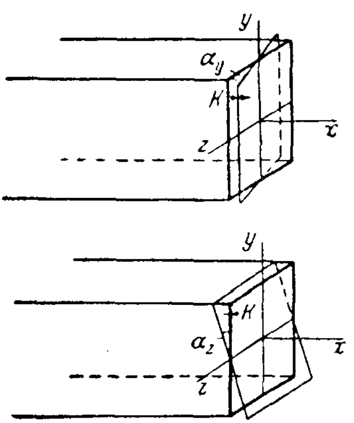

圖 2.

的位移；而當斷面繞 z 軸反時針方向旋轉時，則造成該點在 x 軸負方向內的位移。對於扭角 θ 也假定當斷面反時針方向旋轉時為正（如果從 x 軸正方向的一邊來看斷面）。所以，當 θ 角沿 x 軸而反時針方向增加時，則與在 x 軸正方向位移相應的各 ω 值就作為正。

任一纖維的相對伸長，可以將位移 u 對於 x 微分而求得，也就是根據以下關係式求得：

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}。\tag{3}$$

從圖 3 就很容易導出（3）式，圖中 KK_1 表示某一纖維的微段 dx 的初始位置，$K'K_1'$ 則表示該微段在變形以後的位置。兩者長度之差等於 $\frac{\partial u}{\partial x}dx$，因之相對伸長當等於導數 $\frac{\partial u}{\partial x}$。這是一個偏導數，因為位移 u 不僅是 x 的函數，而且亦是坐標 y 與 z 的函數。

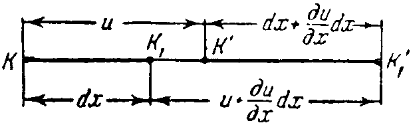

圖 3.

把 u 的表示式（2）微分，得：

$$\varepsilon=\frac{du_0}{dx}+\frac{d\alpha_y}{dx}z-\frac{d\alpha_z}{dx}y+\frac{d\theta'}{dx}\omega。\tag{4}$$

u_0、α_y、α_z 和 θ' 對於 x 的導數已經不是偏導數，因為這些量只隨着 x 而變。顯然，導數 $\frac{du_0}{dx}$ 是相對伸長，而且對於已知斷面內所有纖維來說都是相等的，今將這一伸長記作 ε_0。導數 $\frac{d\alpha_y}{dx}$ 與 $\frac{d\alpha_z}{dx}$ 是桿件纖維的曲率的分量①，各記作 $\varkappa_y$ 與 $\varkappa_z$。$\frac{d\theta'}{dx}=\theta''$ 這個量是桿件變形的特別性質，它決定斷面翹曲的變化的影響。這點是

① 當變形很小時，由於斷面保持平面而轉動所產生的曲率，對同一斷面上各纖維說來，可認為大小相等。

可以相信的：量 θ'' 可用來表示由於翹曲的改變而在纖維中所產生的附加扭曲的程度，而這種翹曲的改變又與桿件扭轉的不均匀性有關。在相對扭角 θ' 有改變的情形下，桿件纖維是沿着桿長而改變它的斜度，並且 θ'' 愈大，則纖維的扭曲亦顯得愈大。由於產生了纖維的這種扭曲，就形成這樣的彎曲變形性質，不均匀扭轉也因這種性質而得到彎扭變形或彎扭的名稱。圖 4a 和圖 4б 中的照片，表達了彎扭變形的概念。在照片中可看到一根橡皮工字形桿件，兩端各受相等的力偶(由裝在桿件上的可轉插桿所產生)，跨的中央(該處的周邊固定不動)則作用着平衡力矩。顯然，纖維是給扭曲了。纖維的扭曲近似地相當於桿件兩個翼鈑在相反方向的彎曲(詳見 § 3 和題 18 中關於工字形斷面桿件的彎扭)。爲了更清晰地表示纖維的扭曲起見，在第二張照片中把桿件及附設的標尺亦一起攝下了。從兩端和中央斷面(如黑線所示)的周邊，可以看出斷面的翹曲。翹曲的程度並不相同：從桿件的中央向兩端逐漸增加，而自中央斷面向左和向右的斷面變位的方向則恰相反。由

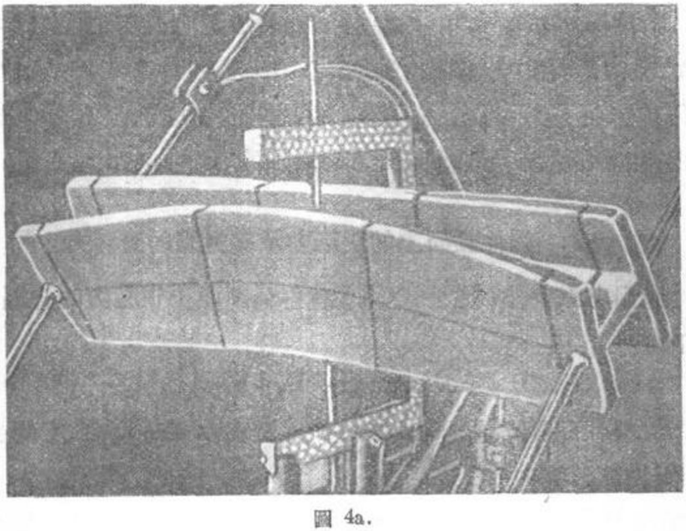

圖 4a.

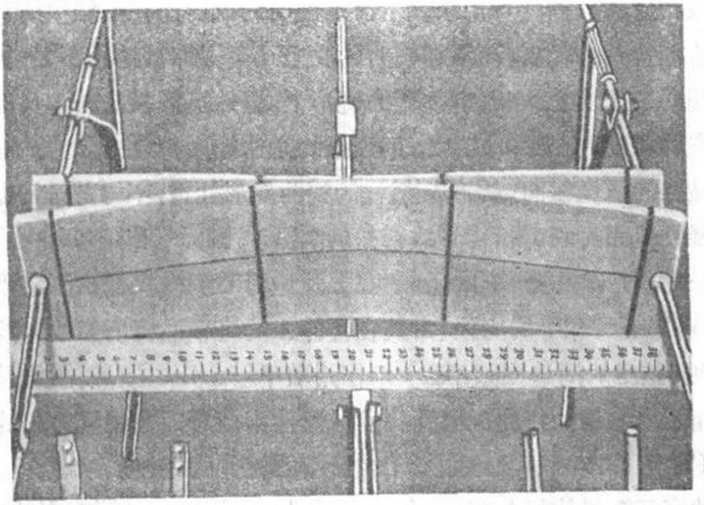

圖 46.

於對稱關係，中央斷面顯然沒有翹曲。

代入上述的記號，公式（4）就變成：

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\varkappa_y z-\varkappa_z y+\theta''\omega\text{。} \tag{5}$$

若位移 u_0、α_y、α_z 和 θ' 隨着 x 的增加而增大，則與它們相應的量 ε_0、$\varkappa_y$、$\varkappa_z$ 和 θ'' 顯然將爲正值。因此，拉伸時 ε_0 將是正的；當轉角 α_y、α_z 是在反時針方向增加的，則曲率的分量 $\varkappa_y$ 和 $\varkappa_z$ 將爲正；若相對扭角亦是在反時針方向增加的，則 θ'' 亦將爲正值。

§2. 桿件斷面上的正應力及其對應的廣義力

應用虎克定律，從公式（5）就得到斷面上正應力的普遍公式如下：

$$\sigma=E(\varepsilon_0+\varkappa_y z-\varkappa_z y+\theta''\omega)\text{。} \tag{6}$$

式內首三項便是通常由於拉伸或壓縮和彎曲所產生的正應力；而最後一項

$$\sigma=E\theta''\omega \tag{7}$$

則是因翹曲改變而產生的、並與桿件扭轉相關的附加正應力。

在推導公式(2)、(5)和(6)時，正像研究沒有斷面翹曲的變形那樣，應令 y、z 兩軸與斷面的主中心慣性軸相重合。顯然，這樣便使位移 u_0 和變形 ε_0 只跟拉力有關，而轉角 α_y、α_z 和曲率分量 $\varkappa_y$、$\varkappa_z$ 只跟相應的彎矩有關。事實上，只有當轉動是繞着中心軸時，中性層才能保證在中央位置，這樣，發生的就祇是彎曲變形了。當斷面是對其他任一組軸轉動時，那末變形就成爲同時帶有拉伸或壓縮的彎曲了；這時，u_0 和 ε_0 兩個量已不是斷面重心的位移和變形，而是縱向力和彎矩同時作用的結果。其次，如果轉角 α_y、α_z 和曲率分量 $\varkappa_y$、$\varkappa_z$ 不是對於主慣性軸來確定的，那末對於每一個軸的轉角和曲率不僅與繞該軸的彎矩有關，而且還與繞着跟該軸相垂直的軸的彎矩有關。這點在組合彎曲的理論中已清楚地說明了。

在研究更複雜的問題中，仍應沿用這樣的方法去決定表示斷面翹曲的函數 ω，這函數只表明扭轉對縱向位移的影響。

爲了求 ω，首先必須假設扭轉時斷面是繞着彎心線而轉動的；而彎心線係根據線上加橫向彎曲力的作用時而沒有扭轉這條件來求的①。不然，不均勻的扭轉就會使這條線引起扭曲(實際上，僅祇在彎曲荷重作用下便可能發生扭曲)。關於這假設的正確性，是容易從功的互等定理來證明②。由於通過彎心線的橫向荷重不能產生

① 在斷面平面內的彎心位置，可從求在彎曲變形下斷面內所產生的諸剪力的合力而求得。若斷面具有對稱中心，特別是具有兩個對稱軸時，彎心便與斷面的重心相吻合。當斷面只有一個對稱軸時，彎心就位於該軸上。因此，在決定彎心時，只需考慮到在垂直於該軸的平面內的彎曲就可以了。在一般情況下，求出兩個平面內彎曲時剪力的合力的交點，即得彎心。

② 當有兩力系作用在物體上時，根據功的互等定理，第一系的力在由第二系的力的作用而產生的位移上所作的功，等於第二系的力在第一系的力的作用而產生的位移上所作的功。祇要力與位移之間符合線性關係，這個定理在所有情況下都是正確的。

使斷面上扭力偶作功的斷面扭轉（即斷面轉動），所以扭力偶亦不應引起能使作用在彎心線上的橫向荷重作功的位移（因為平衡的橫向荷重只當它沿着作用的那條線有扭曲時才可能作功）。因之，彎心線在不均匀扭轉時仍應保持直線①。

除此而外，當繞着彎心線而扭轉時，斷面的縱向位移應從各點平均位置的平面起算；不然，由於扭轉而引起的縱向位移就包括了桿件的通常拉伸。為了實現所述條件，必須使函數 ω 所確定的縱向位移不致引起彎矩和通常的縱向力，亦即必須滿足前面提到的由翹曲所產生的正力自相平衡的要求。這樣就導出了關係式：

$$\int_F \omega y\, dF=0,\ \int_F \omega z\, dF=0,\ \int_F \omega\, dF=0 。\qquad (8)$$

前兩個條件是由與翹曲相關的力（7）的力矩之和等於零而得到的，後式則從這些力的合力等於零而得到的。除了這些條件以外，再加上對於 y、z 軸斷面的靜矩和離心慣性矩等於零的條件：

$$\int_F y\, dF=0,\quad \int_F z\, dF=0,\quad \int_F yz\, dF=0,\qquad (9)$$

就得到了六個條件。這些條件保證了桿件四種變形（通常拉伸、兩個彎曲和彎扭變形）各自的獨立性。跟計算主中心慣性軸的坐標 y 和 z 稱為主坐標相似，可把適合條件（8）的函數 ω 稱為主扭轉函數。

現在我們來列出：當確定截面位移和翹曲的 u_0、α_y、α_z 和 θ' 諸量都有些任意改變時，斷面上正力所作功的表示式。根據公式（2）與（6），這些表示式的形式如下：

① 自該論點可以看出，正是沒有扭曲，但並不是沒有可能同時發生彎曲的一般位移，這乃是彎心線的真正特徵，根據這一特徵就可以在扭轉情形下來求彎心線。從該特徵來看，在均匀扭轉即純扭的場合下，所有纖維（在設定微小變形範圍下）都保持為直線，於是可以正式地不把彎心線、而把桿件的任一纖維當作扭轉軸（再參看與此有關的後面圖 6 的註解）。