小学数学课外活动·数学竞赛专题辅导

北京市教育局教学研究部师范理科教研室　编

3

北京师范大学出版社

小学数学课外活动/数学竞赛专题辅导

第三分册

北京市教育局教学研究部师范理科教研室 编

北京师范大学出版社

（京）新登字160号

小学数学课外活动数学竞赛专题辅导

第三分册

北京市教育局教学研究部师范理科教研室 编

•

北京师范大学出版社出版发行
全 国 新 华 书 店 经 销
铁 道 标 准 化怀柔印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：6 字数：110千
1991年11月第1版 1991年11月第1次印刷
印数：1—11 000

ISBN7-303-01278-8/G·764
定价：2.45元

前　言

近几年来，各种级别的小学数学竞赛，在全国广泛开展起来，这是一件从小就培养我国数学人才的大好事。但是能参加小学数学竞赛的学生，毕竟只是少数，为了激发更多小学生的数学学习兴趣，扩大小学生的数学知识领域，许多小学都在积极组织开展数学课外活动，这种数学课外活动涉及的数学知识内容，远远超过了小学数学竞赛所包含的知识内容，组织开展小学数学课外活动，不仅能激发小学生对数学学习的积极性，增长知识发展智力，而且能培养更多素质好的小学数学竞赛选手，这对于提高我国全民族数学素质，将产生重大影响。为了适应小学组织开展数学课外活动和辅导数学竞赛需要，我们组织编写了这套丛书，我们相信小学高年级的同学，在教师指导下，完全可以学懂书中的知识内容和完成书中的练习。

本丛书在编写上有以下特点：

一、为了使本丛书成为小学生参加数学课外活动和参加数学竞赛的学习材料，编写中力求文字通俗易懂，生动且具有趣味性。为了直观形象地表达知识内容，书中有相当数量的插图，在每本的最后还附了一部数学趣味题，对于每个专题的练习和书后的趣味题都提供了解答或提示，本丛书也可以作为初中学生的课外读物。

二、为便于教师辅导使用，本书按专题编写，每个专

题，除详细介绍知识内容，有的还配备了典型例题及练习，本书也适合小学生的家长辅导自己的子女使用。

三、本丛书共包括36个专题，其中多数专题属课外活动辅导内容，部分属小学数学竞赛辅导内容，可以为参加数学竞赛的小学同学，提供必要的知识和方法。

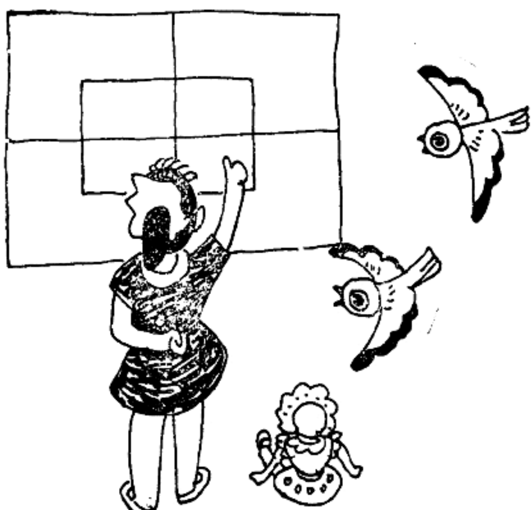
参加本书编写工作的有于金海、[redacted]、王进明、牛志英、付志良、朱景源、张存、张晓纹、张卡宁、李卓奇、李勋良、陈起新、金成樑、杨钧洪、武锡志、柳艾荣、胥森林、贾文选、梁楚材老师，这些老师都是多年从事中师数学教学和教研工作的老师，他们非常关心小学同学的数学学习；参加本书插图工作的有朱德友、陈景国老师。[redacted]、[redacted]由北京市教育局教学研究部主任曹福海同志审阅。全书的编写工作，得到了北京师范大学钟善基教授的关心和指导。我们对参加本书工作的所有同志，表示深切的谢意。

我们是初次编写这种书，如有不当之处，请批评指正。

北京市教育局教学研
究部师范理科教研室
1990年11月

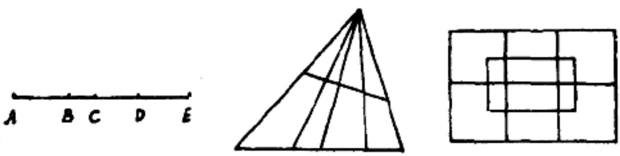
目　　录

好眼力
谈图形的计数



在对几何图形的观察中，如果能有顺序的观察，并找出图形中的规律，由此进行推理和计算，对我们解答有关几何图形的问题时是很有帮助的。

下面有三个图形



(1)　　(2)　　(3)

图 1.1

你能很快地数出：

1．图（1）中有多少条线段？

2．图（2）中有多少个三角形？

3．图（3）中有多少个长方形？

如果你是第一回作这样的题，那么你和你的小伙伴的答案可能各不相同。

因为正确的数法要做到不重复、不遗漏，还要简便、迅速，要做到这点就需要按照一定顺序对图形观察，并从中找出一定的规律。好，现在我们来一起看看这类题的解法。

一、按顺序数图形

例 1　数出图1.2中各条线上线段的总条数。

分析：我们按照一定的顺序去观察，数法有两种。

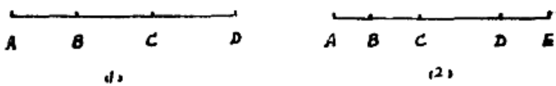


图 1.2

第一种数法：以线段上点的顺序观察。

在图 1.2(1) 中，从左往右顺序观察，先看以点 A为左端点的线段有几条？有AB、AC、AD三条；再看以点B为左端点的线段有几条？有BC、BD两条，最后看以 C为左端点的线段，有 CD一条，这样就数出了一共有 $3+2+1=6$（条）线段。

第二种数法：以包括几条由线段上的点所分割成的小线段为顺序观察。

例如在图1.2(2)中，先看由线段上的点（包括两个端点）把线段分割成几个小线段？由五个点把线段 AE 分割成AB、BC、CD、DE四条小线段；再看由两条小线段组成的线段有几条？有AC、BD、CE(还是从左往右顺序数)三条；再看由三条小线段组成的线段有几条？有AD、BE两条，最后看由四条小线段组成的线段有几条？只有 AE 一条，因此一共有线段 $4+3+2+1=10$（条）

不论用哪种数法，列出的式子和计算结果都是一致的，请你用第二种数法数一数图 1.2(1)，用第一种方法数数图 1.2(2)。

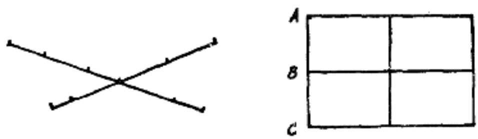
解：（1） $3+2+1=6$ （条）

（2） $4+3+2+1=10$（条）

对比上述图形和所列算式，我们容易得出一个规律：当线段上有n个点时（包括两个端点），则线段的总条数是：

$$1+2+3+\cdots+(n-1).$$

例2 数一数图1.3中的各图形内，各有多少条线段。



(1)　　　　(2)

图 1.3

分析：请同学们按照例1的方法进行顺序观察与数图形。

解：（1） $(5+4+3+2+1)+(4+3+2+1)$

$=15+10$

$=25$（条）

（2）因为图1.3（2）中有六条类似AC的线段，所以共有：

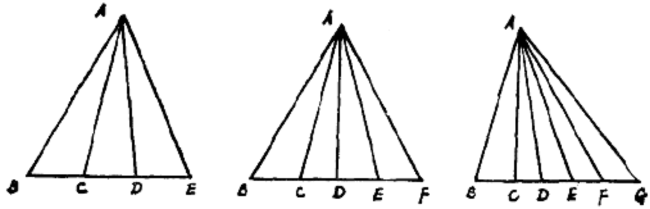
$(2+1)\times 6=3\times 6=18$（条）

例3 数一数图1.4中的各图形内，各有多少个三角形？

分析：以图（2）为例。因为每个三角形都含有顶点A，那么在BF上有一条线段，它们就能与顶点A构成一个三角形，所以三角形的总个数与BF上所有线段的个数是一样多的。

具体数图形时，我们也可以采用两种顺序方法：

①以包括的三角形的边为顺序。



（1）　　　　（2）　　　　（3）

图 1.4

在图（2）中，包括AB为边的三角形有 ABC、ABD、ABE、ABF，共四个三角形；从左往右顺序看，包括 AC 为边的三角形有ACD、ACE、ACF三个；包括 AD为边的三角形有ADE、ADF两个；包括 AE为边的三角形只有 AEF 一个了。到此可计算出共有三角形 $4+3+2+1=10$（个）。

②以包括的小三角形个数多少为顺序。

在图（2）中，小三角形共有ABC、ACD、ADE、AEF四个；由两个小三角形合在一起的三角形有 ABD、ACE、ADF 三个（数的时候仍然依从左往右的顺序）；由三个小三角形合在一起的三角形有 ABE、ADF 两个；由四个小三角形合在一起的三角形就是ABF一个。这样我们就可计算出三角形的总数共有 $4+3+2+1=10$（个）。

我们再来数一下BF上的线段总数，因为BF上共有5个点 B、C、D、E、F，所以线段总数应是：

$$4+3+2+1=10\text{（个）}$$

三种方法的计算结果是一致的，你们认为哪一种最简便。

解：（1） 3 + 2 + 1 = 6 （个）

（2） 4 + 3 + 2 + 1 =10（个）

（3） 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =15（个）

例4 数出图1.5中（1）、（2）两个图各有多少个三角形．

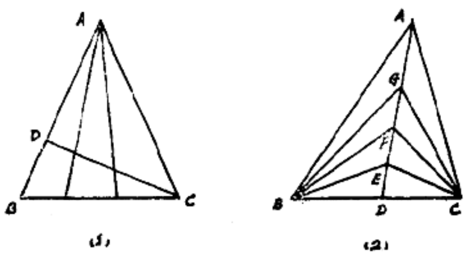


图 1.5

分析：对于（1），先把它分解成两个三角形ADC与BDC，看它们各含几个三角形、在ADC中有3＋2＋1＝6（个），在BDC中有3个；然后再合起来分析，即看三角形ABC中除去已计算过的还有多少新三角形，又有3＋2＋1＝6（个）．所以共有6＋3＋6＝15（个）．

对于（2）也是这样分析，先看三角形ABD、ADC，它们各含4＋3＋2＋1＝10（个）三角形；再合并起来看三角形ABC中又有4个新三角形：BEC、BFC、BGC、BAC，所以共有10＋10＋4＝24（个）三角形．

解：（1）（3＋2＋1）＋3＋（3＋2＋1）

＝6＋3＋6＝15（个）

（2）（4＋3＋2＋1）×2＋4

$=10\times2+4$

$=24$（个）

例5 数出图1.6中各图内长方形（包括正方形）的个数。

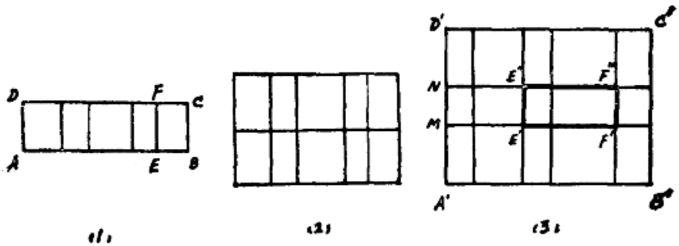


图 1.6

分析：因为长方形是由长与宽构成的，因此有一个长和一个宽就可以有一个长方形，我们只要分别计算出长与宽的总数就可以了。所以解决这类问题和数线段的问题有十分密切的联系。

先看（1）。宽的总数只有1条，即AD；再看长的总数，即看AB上线段的条数，有$5+4+3+2+1=15$（条）。一个长配一个宽就可得到一个长方形，例如AE为长，AD为宽，则有长方形$AEFD$。所以长方形个数共有$(5+4+3+2+1)\times1=15$（个）。

再看（3）。宽的总数取决于$A'D'$边上线段的条数，有$3+2+1$，长的总数取决于边$A'B'$上线段的条数，有$5+4+3+2+1$。同样一个宽配一个长，就有一个长方形，例如宽取MN，长取EF，则对应的长方形就是$E'F'E''F''$。

所以长方形的个数应是（5+4+3+2+1）×（3+2+1）。

（2）的分析同（1）、（3）。

解：（1）长的总数有5+4+3+2+1=15（条）

宽的总数有1条，

所以长方形的个数是

（5+4+3+2+1）×1=15（个）

（2）长的总数有5+4+3+2+1=15（条）

宽的总数有2+1=3（条）

所以长方形个数是

（5+4+3+2+1）×（2+1）=15×3=45(个)

（3）长的总数有5+4+3+2+1=15（条）

宽的总数有3+2+1=6（条）

所以长方形个数有15×6=90（个）。

长方形中长和宽不相等，但正方形中长与宽都相等，下面我们来数数正方形。

例6 依次数出图1.7中各图内所有正方形的个数.

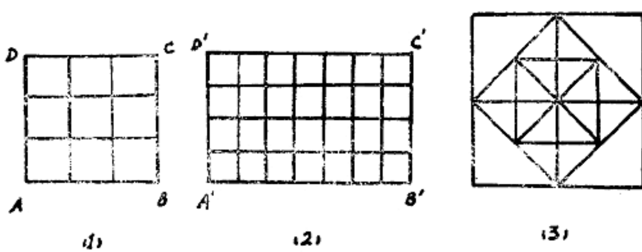


图 1.7

分析：为说明方便，假定（1）中每个小方格的边长均

为一个长度单位．AD边上一个长度单位的线段只能与AB边一个长度单位长的线段构成正方形，AD边上两个长度单位长的小线段，也只能与AB边上两个长度单位长的小线段构成正方形．所以我们依顺序观察、进行计算．先数边长为1个长度单位的小正方形：有 $3\times3=9$（个）；再数边长为2个长度单位的正方形：因为AD边上2个长度单位长的小线段有2个，AB边上也有2个，因此可构成边长为2个长度单位的正方形 $2\times2=4$（个）；再数边长为3个长度单位的正方形，有 $1\times1=1$（个）．总共有 $3\times3+2\times2+1\times1=14$（个）．

在（2）中，因为$A'D'$边上最长的线段只有4个长度单位，所以图中最大的正方形是边长为4个长度单位的．依次计算：

边长为1个长度单位的正方形有 $4\times7=28$（个）；

边长为2个长度单位的正方形有 $3\times6=18$（个）；

边长为3个长度单位的正方形有 $2\times5=10$（个）；

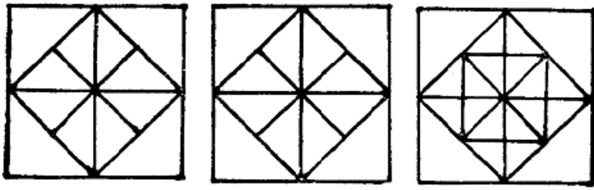
边长为4个长度单位的正方形有 $1\times4=4$（个）．

共有 $4\times7+3\times6+2\times5+1\times4=60$（个）．

在（3）中，按从大到小的顺序来进行观察．先看图1.8(1)中的田字图形，由上面的分析有 $2\times2+1\times1=5$（个）正方形；再看图1.8(2)中的田字图形，也有5个正方形；最后图1.8(3)中的田字图形，同样也有5个正方形，所以共有15个正方形．

解：（1）$3\times3+2\times2+1\times1=14$（个）

（2）$4\times7+3\times6+2\times5+1\times4=28+18+10+4=60$（个）



(1) (2) (3)

图 1.8

（3）（$2\times2+1\times1$）$\times3=5\times3=15$（个）。

二、分类数图形

对于某些略复杂的图形，可以先对图形进行观察分析，找出图形的特点。根据组成此图形的各部分的规律，进行适当分类，然后有顺序地一类一类的数，这样可以做到不重不漏，又快又巧。

例7. 数一数图 1.9 中有多少个三角形？

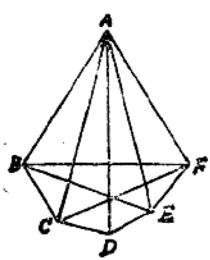


图 1.9

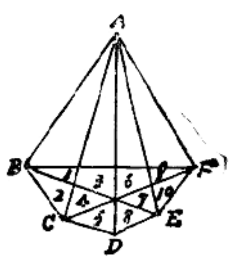


图 1.10

分析：通过对图形的观察，可以看出，图形的上半部——三角形ABF，是在例3中数过的，它可以作为一个独立的图形来数，同样还可以把三角形ABE、ACF分别看成独立的图形来数。并且要注意，这三个部分各自包括的三角形都没有重复。根据上面的分析，就可以对图1.9进行分类计算了.

解：先将图1.9分成上、下两部分，就有：

第一类：图形的上半部分。在三角形ABF中，共有三角形$4+3+2+1=10$（个）。

第二类，在图形的下半部分$BCDEF$中，按三角形构成的顺序进行观察计数：由一个三角形构成的有8个（如图1.10），是1，2，4，5，7，8，9，10；由二个三角形构成的有6个，分别是由1与2，1与3，2与4，6与9，7与10，9与10构成的；由三个或三个以上三角形构成的三角形有5个，分别是由1、3、6、9，1、3、6、7，3、4、6、9，1、2、3、4、6、9，1、3、6、7、9、10构成、（在这类中，我们是按照包含三角形的个数多少为顺序依次数的）。

再把图形的上、下部分合起来看，又有可做为独立图形的三角形ABE、ACF，所以

第三类，在三角形ABE与ACF中，共有$(3+2+1)\times 2=12$（个）三角形。

第四类，还有三角形ABC、ACD、ADE、AEF，共4个。

所以，共有三角形

$$10+8+6+5+12+4=45\text{（个）}$$

例8 数一数图1.11中有多少个三角形。