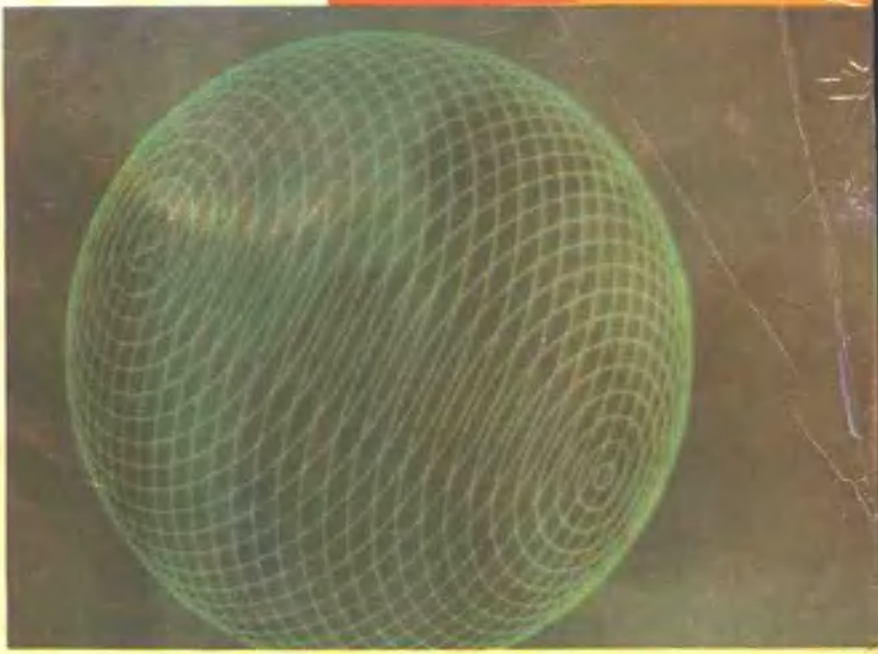
许有信 编著

计算机辅助设计与制造的几何基础



术出版社

计算机辅助设计与制造的几何基础

许 有 信　编著

江 苏 科 学 技 术 出 版 社

1 9 8 9

内 容 提 要

本书旨在阐明CAD/CAM的几何知识的基本原理和工程应用。全书分为四章，第一章是曲线及其性质，介绍了常用的等距线，奇异点和包络，曲率、挠率和曲线理论的基本公式。第二章是计算几何中的曲线，着重介绍各种样条曲线，如插值样条曲线；B-B曲线；B-样条曲线；H-样条曲线和B-样条卵形式等。第三章是曲面及其性质，着重介绍了等距曲面、直纹面、可展曲面、扭转曲面和曲面上曲线的一些性质；法曲率、全曲率和主曲率等。第四章是计算几何中的曲面，着重介绍了Coons曲面B'ezier曲面；B-样条曲面和三角形区域上的曲面构造等。还附有各章的习题和一些实用的样条曲线和S.A.Coons曲面（不需要扭矢）的计算机程序。

本书可作为工科高等院校有关专业的高年级学生和研究生的教材或参考书，也可作为广大工程技术人员的参考读物。只要具有大学一二年级的数学基础知识，就不难阅读本书。

计算机辅助设计与制造的几何基础

许有信 编著

出版发行：江苏科学技术出版社
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：南京航空学院服务公司印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 10.375 字数230,000
1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷
印数 1—2000 册

ISBN 7—5345—0540—2

TP・16 定价：3.00元

责任编辑 沈绍绪

引　言

计算机辅助设计与制造（CAD/CAM）是研究计算机在工程设计与产品制造方面综合应用的学科。CAD/CAM技术是利用计算机辅助工程技术人员设计、制造产品及从事绘图工作，把计算机的快速性、准确性和工程技术人员的思维、综合分析能力结合起来，从而加快设计，制造进程，提高设计质量，加速产品的更新换代，提高产品的竞争能力。因此，它已成为科学技术发展水平的标志之一。

近二十多年来，用CAD/CAM技术对飞机、轮船、汽车、建筑、机械等进行外形设计和制造日趋广泛。而构造外形实际上就是曲线、曲面。“CAD/CAM的几何基础”着重介绍曲线、曲面的内在微分性质(即微分几何部分内容)和便于用计算机表示，并对计算结果进行分析、综合和控制，然后输出分析结果、绘图和加工的形状信息(即计算几何部分内容)。

苏步青教授在“计算几何的兴起”一文中，对计算几何的定义、研究的内容都作了精辟的阐述，并引用了剑桥大学A·R·Forrest 1971年给计算几何所下的定义：计算几何是“对几何外形信息的计算机表示、分析和综合”，1974年，Forrest又对定义作了补充：“计算几何讨论所有有关形状信息在计算机内表示及用计算机控制的问题。”在这里特别强调了计算机控制问题，这正是对几何外形设计时要进行反复修改

的反映。在上述文章中特别指出："计算几何是一门新兴学科——由函数逼近论、微分几何、代数几何、计算数学特别是数控等形成的边缘学科"。作者考虑到其中有些内容散见于工科高等数学和工程数学之中，而微分几何又未普遍列入工科高校教学计划，因此本书除对经典微分几何的基础知识作简要介绍之外，特别着重于近代的计算几何中国内、外常见的几种构造曲线、曲面方法的阐述，并尽可能地结合一些工程实践。最后还给出了一些样条曲线和S•A•Coons曲面的实用程序。

本书以工科高年级学生或攻读工程、工学硕士的研究生和工程技术人员为对象。使之在逐步学会用几何方法来思考所遇到的问题。从这个意义上讲，本书只是一本为进一步接触高深的著作做准备的基础读物，同时通过本书帮助读者了解本领域内的一些文献和作者的部分成果。

本书的前身为《微分几何与计算几何讲义》，1983年以来，一直为工科研究生和高年级学生的教材，并在一些教师进修班中使用，得到了好评。1988年被南京航空学院评为优秀教材。此次正式出版，在内容上又作了较大的变动，并补充了一些作业，以便读者更好地掌握本书的内容。

全书共分四章，第一章是曲线及其性质，着重介绍了平面曲线等距线、奇异点和包络；空间曲线的曲率、挠率和Frenet-Serret公式。第二章是计算几何中的曲线，着重介绍插值样条曲线；B'ezier-Bernstein曲线；B-样条曲线；H-样条曲线和B-样条卵形线等。第三章是曲面及其性质，着重介绍了等距曲面、直纹面、可展曲面、旋转曲面和曲面上曲线的一些公式；法曲率、全曲率和主曲率等。第四章是计算几何中的曲面，着重介绍了Coons曲面、B'ezier曲面，B-样条曲面和三角

形区域上的曲面构造等，为了方便读者和扩大知识面，还编入了两个附录。

本书习题部分由参加过[illegible]教学工作的唐月红讲师编写。

由于作者水平有限，难免存在不当之处，恳请读者指正。

许有信

1988年9月於南京航空学院

目　录

第一章　曲线及其性质

第一节　曲线的矢量方程 …… 1
第二节　平面曲线的等距线 …… 6
第三节　平面曲线奇点的讨论 …… 11
第四节　包络 …… 27
第五节　曲线的自然参数方程 …… 30
第六节　活动坐标系 …… 33
第七节　Frenet-Serret 公式 …… 36
第八节　曲率、挠率的几何意义 …… 39
第九节　曲线上的点关于弧长 s 的展开 …… 47
第十节　曲线在密切平面上的射影 …… 48
第十一节　曲线在法平面上的射影 …… 50
第十二节　曲线在已给点近旁的形状 …… 52
习　题 …… 55

第二章　计算几何中的曲线

第一节　三次插值样条曲线 …… 60
第二节　B'ezier-Bernstein 曲线 …… 109
第三节　B-样条曲线 …… 137
第四节　一类H-样条曲线及其性质 …… 152
第五节　卵形线与B-样条卵形线 …… 159

第六节　平面三次参数样条曲线段的奇点和拐点 ……164
习　题 ……169

第三章　曲面及其性质

第一节　坐标曲线 ……172
第二节　曲面的矢量方程 ……176
第三节　由两张曲面所确定的曲线的切矢 ……178
第四节　曲面上的曲线与等距面 ……181
第五节　曲面上曲线的一些公式 ……186
第六节　直纹面与可展曲面 ……190
第七节　扭转曲面的概念及其矢量方程 ……197
第八节　法曲率与第二基本形式 ……199
第九节　全曲率与法截线 ……202
第十节　Meusnier 定理 ……204
第十一节　Dupin 标形与Euler公式 ……206
第十二节　主曲率的计算 ……211
第十三节　曲面上点的分类 ……213
第十四节　曲面与其切平面的交线 ……221
习　题 ……222

第四章　计算几何中的曲面

第一节　双三次插值样条曲面 ……227
第二节　Coons的双三次参数曲面 ……238
第三节　B'ezier 曲面与B-样条曲面 ……261
第四节　三角形区域上的曲面插值 ……279

习 题 ……………………………………………………288

附录 1 参数有理曲线、曲面 ……………………………289
附录 2 矢函数微积分 ……………………………………311
参考资料 ………………………………………………321

第一章　曲线及其性质

在某些机械零部件的外形计算中，常有切面外形的计算，如机翼的切面样板的数控加工与数控绘图等，其实都是用空间曲线或平面曲线计算的。故本章内容是在矢量运算的基础上，用矢量方程表示曲线，用矢量函数的微积分作为工具，讨论曲线的若干性质；以弧长为参数的自然参数方程，用活动坐标系推导曲线理论的基本公式；对空间曲线的曲率和挠率进行了讨论；对以弧长为参数的空间(或平面)的三次(或二次)曲线退化为直线，用矢量分析的方法进行了推导。

第一节　曲线的矢量方程

我们已经学习过空间直线的矢量表示，那是空间曲线的一个特殊情形。因为空间一个点的位置矢量有三个坐标，所以空间曲线也可以看成空间点运动的轨迹，或者为矢量端点运动形成的矢端曲线。其矢量方程为

$$\vec{R}=\vec{R}(t)=[x(t),\ y(t),\ z(t)] \qquad (1\cdot1)$$

也称为单参数t的矢函数，

它的参数方程是

$$\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t) \qquad 0\leqslant t\leqslant 1\\ z&=z(t)\end{aligned} \qquad (1\cdot2)$$

其切矢为 $\overrightarrow{R}'(t)=[x'(t),\ y'(t),\ z'(t)]$

例1 设 yOz 平面上的直线 l：$az=by$ 绕 Oz 轴以等角速度 ω 均匀地旋转。动点 M 沿直线 l 运动，其速度与动点到原点的距离 $\overline{OM}$ 成比例，试求该曲线的矢量方程。

解 如图1-1，设 M 点在 xOy 平面上的投影为 P 点，取球坐标，其径度 $\theta=\angle xOP$，纬度 $\psi=\angle POM$，$\overline{OM}=r$，半锥角为 φ_0，容易得到动点 M 的坐标 x、y、z 有下列关系式：

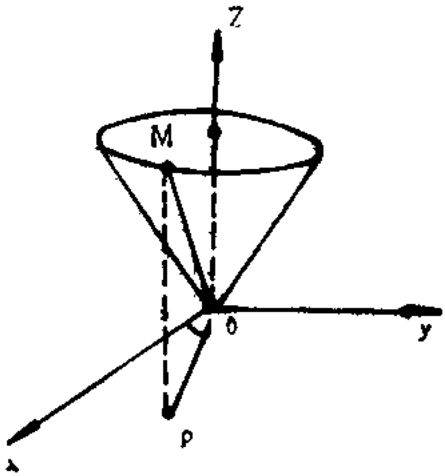


图1—1

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi_0 \\ y = r\sin\theta\sin\varphi_0 \\ z = r\cos\varphi_0 \end{cases}$$

其中 $\theta=\omega t$，而 r 的变化由题意知道有关系式

$$\frac{dr}{dt} = kr \qquad (k \text{ 为比例常数})$$

$\therefore \quad r = r_0 e^{kt}$ 其中 r_0 为 $t=0$ 时的距离

即 $\quad \overline{OM}_0 = r_0$

设该曲线的矢量方程

$$\vec{R}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

即

$$\begin{cases} x(t) = ae^{kt}\cos\omega t \\ y(t) = ae^{kt}\sin\omega t \\ z(t) = be^{kt} \end{cases}$$

容易找出 a，b，r_0，φ_0 之间有关系式

$$\begin{cases} a = r_0\sin\varphi_0 \\ b = r_0\cos\varphi_0 \end{cases}$$

我们称这样生成的空间曲线 $\vec{R}(t)$ 为圆锥螺旋线。可以证明：该圆锥螺旋线是落在圆锥面 $b^2(x^2+y^2)-a^2z^2=0$ 上，其切矢与母线 l 相交成定角。

例2 已知空间曲线 $\vec{R}(t)$ 首末点位置矢量 $\vec{R}(0)$、$\vec{R}(1)$和切矢 $\vec{R}'(0)$、$\vec{R}'(1)$，试确定空间三次曲线的矢量方程的矩阵表示。

解 设空间三次曲线的矢量方程：

$$\vec{R}(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \vec{c}t^2 + \vec{d}t^3 \qquad (1\cdot3)$$

其中$\vec{a}=[a_1, a_2, a_3]$，$\vec{b}=[b_1, b_2, b_3]$，$\vec{c}=[c_1, c_2, c_3]$，$\vec{d}=[d_1, d_2, d_3]$ 也可以用矩阵记号表示为

$$\vec{R}(t)=[1\ t\ t^2\ t^3]\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\ ]^T$$

其切矢可求得

$$\vec{R}'(t)=[0\ 1\ 2t\ 3t^2]\,[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\ ]^T$$
$$=\vec{b}+2\vec{c}t+3\vec{d}t^2 \qquad (1\cdot4)$$

若该曲线首末点位置矢量 $\vec{R}(0)$，$\vec{R}(1)$ 和切矢 $\vec{R}'(0)$，$\vec{R}'(1)$ 为已知时，则三次空间曲线被唯一确定。

事实上

$$\begin{aligned}
&\vec{R}(0)=\vec{a}\\
&\vec{R}(1)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\\
&\vec{R}'(0)=\vec{b}\\
&\vec{R}'(1)=\vec{b}+2\vec{c}+3\vec{d}
\end{aligned} \qquad (1\cdot5)$$

若用矩阵表示时，则有

$$\begin{bmatrix}\vec{R}(0)\\ \vec{R}(1)\\ \vec{R}'(0)\\ \vec{R}'(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\\ \vec{d}\end{bmatrix} \qquad (1\cdot6)$$

求解上面线性方程组，得到

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\,]^T=M\,[\vec{R}(0)\ \vec{R}(1)\ \vec{R}'(0)\,\vec{R}'(1)\,]^T \qquad (1\cdot7)$$

其中

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

把式(1.7)代入式(1.3)，并整理得到三次空间曲线的矢量方程

$$\begin{aligned}\vec{R}(t)=&\vec{R}(0)F_1(t)+\vec{R}(1)F_2(t)\\&+\vec{R}'(0)G_1(t)+\vec{R}'(1)G_2(t)\end{aligned}\qquad(1\cdot 8)$$

式中

$$\begin{aligned}F_1(t)&=1-3t^2+2t^3\\F_2(t)&=3t^2-2t^3\\G_1(t)&=t-2t^2+t^3\\G_2(t)&=-t^2+t^3\end{aligned}$$

称为三次空间曲线的权函数。

用矩阵表示时，公式(1.8)可写成

$$\vec{R}(t)=[1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3]M[\vec{R}(0)\ \ \vec{R}(1)\ \ \vec{R}'(0)\ \ \vec{R}'(1)]^T\qquad(1\cdot 9)$$

从公式(1.9)可明显看出三次空间曲线由首末点位置矢量和切矢确定。

若将公式(1.9)用坐标形式写出，即得

$$[x(t),\ y(t),\ z(t)]=[1\ \ t\ \ t^2\ \ t^3]M\cdot\begin{bmatrix}x(0) & y(0) & z(0)\\ x(1) & y(1) & z(1)\\ x'(0) & y'(0) & z'(0)\\ x'(1) & y'(1) & z'(1)\end{bmatrix}$$

其几何表示如图 1-2 所示。

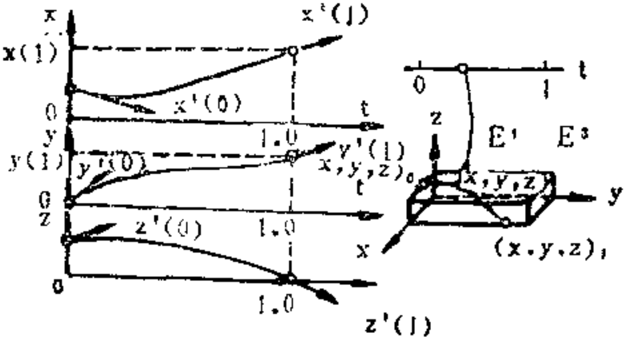


图1—2

第二节　平面曲线的等距线

在有些零部件外形的数学模型中，有理论外型曲线，相应的也有内形曲线，它们都是平行的，只相差一个材料厚度。例如设

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

表示翼型曲线 L_1(图1-3)，x 轴为弦线，而相应的零件理论外形线为L_2，它和 L_1 的距离等于蒙皮的厚度。

又如在用数控铣床加工零件时，由电子计算机控制铣刀(如圆柱铣刀)中心，使零件得到一定的形状。假如要加工一段圆弧 L_1，就要控制圆柱铣刀中心的运动轨迹是 L_2，L_1 和 L_2

的距离就是铣刀的半径(图 1-4)。

图1－3

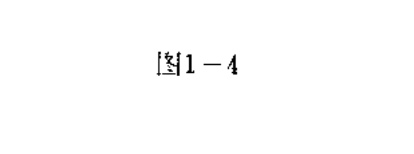


图1－4

两条平行曲线和两个同心圆，它们之间的距离都是相等的。这就是等距曲线的具体形式，下面我们给出等距线的一般定义。

等距线：已知一条曲线 Γ，让 Γ 上每一点沿 Γ 在这点的法线的一定方向(或法矢)移动一段距离 a，得到新的点，这些新的点的轨迹 Γ_1 称为 Γ 的等距曲线。

如图 1-5，Γ 是一条已知曲线，P 是它上面的任一点，PP_1 是 Γ 在 P 点的法矢，设它的长度等于 a，当 P 点在 Γ 上移动时，P_1 点也画出一条曲线 Γ_1，Γ_1 就是 Γ 的等距线。因为 PP_1 的反方向 PP_2 也是 Γ 的法矢，故 P_2 点的轨迹 Γ_2 也是 Γ 的等距线。

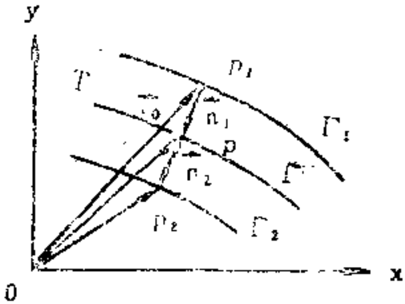


图1－5