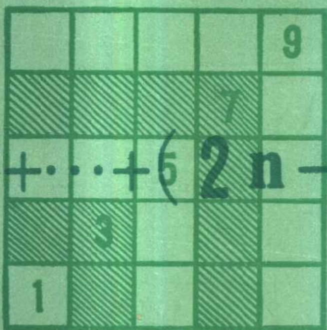
六年制重点中学高中数学课本

代数与几何

DAISHU YU JIHE

第一册



$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

人民教育出版社

六年制重点中学高中数学课本
（试用本）
代数与几何
第一册
人民教育出版社中小学数学编辑室编
*
人民教育出版社出版
天津教育出版社重印
天津市新华书店发行
天津新华印刷二厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 125,000
1983年1月第1版 1984年5月第1次印刷
印数 1—19,000
书号 K7012·0429 定价 0.36 元

说　　明

一、本书是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》编写的，供六年制重点中学高中二年级第二类型使用，每周三课时.

二、本书内容包括：数列与数学归纳法、不等式、行列式和一次方程组、直线、圆锥曲线，其中带 * 号的为选学内容。

三、本书的习题共分三类：练习、习题和复习参考题。

1. 练习　主要供课堂练习用.

2. 习题　主要供课内外作业用.

3. 复习参考题　供复习本章知识时使用.

为了因材施教，使教学更有针对性和灵活性，本书配备的练、习题和复习参考题数量多于通常学生所需的习题量，以便教学时根据实际情况选用.

四、本书由人民教育出版社中小学数学编辑室编写. 参加编写工作的有曾宪源、贾云山、饶汉昌、鲍珑、李慧君、许缦阁等. 全书由吕学礼、孙福元校订.

目　录

第一章　数列与数学归纳法……………………………………1
　一　数列……………………………………………………1
　二　数学归纳法……………………………………………37
第二章　不等式………………………………………………49
第三章　行列式和一次方程组………………………………73
第四章　直线…………………………………………………115
　一　有向线段、定比分点…………………………………115
　二　直线的方程……………………………………………126
　三　两条直线的位置关系…………………………………149
第五章　圆锥曲线……………………………………………169
　一　曲线和方程……………………………………………169
　二　圆………………………………………………………181

第一章　数列与数学归纳法

一　数　　列

1.1 数列

我们看下面的例子:

图 1-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层，自上而下各层的钢管数排列成一列数

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \quad (1)$$

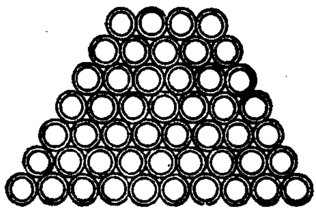


图　1-1

自然数 1, 2, 3, 4, 5, …

的倒数排列成一列数

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots. \quad (2)$$

$\sqrt{2}$ 的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, …的不足近似值排列成一列数

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots. \quad (3)$$

−1 的 1 次幂、2 次幂、3 次幂、4 次幂、……排列成一列数

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots. \quad (4)$$

无穷多个 1 排列成一列数

$$1, 1, 1, 1, \cdots. \quad (5)$$

象上面的例子中，按一定次序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**，各项依次叫做这个数

列的第1项(或首项)、第2项、……、第n项、……. 对于上面的数列(1), 每一项与它的序号有下面的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{项} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array}$$

这告诉我们: 数列可以看作一个定义域为自然数集N(或它的有限子集$\{1, 2, \cdots, n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中a_n是数列的第n项. 有时我们把上面的数列简记作$\{a_n\}$. 例如, 把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作$\left\{\frac{1}{n}\right\}$. 如果一个数列的第$n$项$a_n$与$n$之间的函数关系可以用一个公式来表示, 这个公式就叫做这个数列的**通项公式**. 例如, 数列(1)的通项公式是$a_n=n+3(n\leqslant 7)$; 数列(2)的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$. 如果已知一个数列的通项公式, 那么只要依次用1、2、3、…去代替公式中的n, 就可以求出这个数列的各项.

数列可以用图形来表示. 在画图时, 为方便起见, 在平面直角坐标系的两个坐标轴上所取的单位长度可以不相同. 图1-2(1)、(2)分别是数列(1)、(2)的图形表示. 从图上看, 数列可用一群孤立的点来表示.

项数有限的数列叫做**有穷数列**, 项数无限的数列叫做**无**

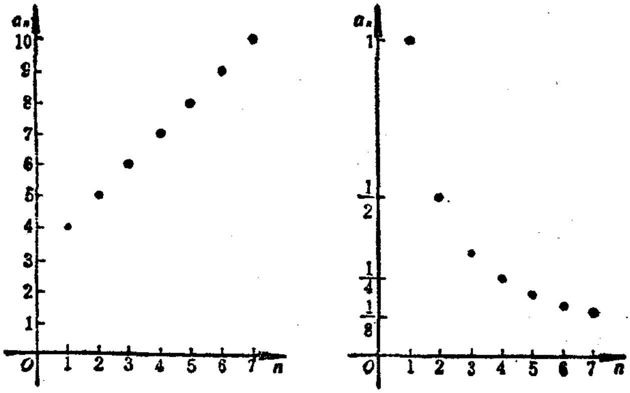


图 1-2

穷数列. 上面的数列(1)是有穷数列，数列(2)、(3)、(4)、(5)都是无穷数列.

例 1 根据通项公式，求出下面各数列$\{a_n\}$的前 5 项:

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解: (1) 在通项公式中依次取 $n=1、2、3、4、5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1、2、3、4、5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-1, 2, -3, 4, -5.$$

例 2 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 1, 3, 5, 7;　　　　(2) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$.

解: (1) 数列的前 4 项 1, 3, 5, 7 都是序号的 2 倍减去1，所以通项公式是 $a_n=2n-1$;

(2) 数列的前 4 项$\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$的分母都等于序号加上 1, 分子都等于分母的平方减去 1，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项 $-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$ 的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

练　习

1. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n^2$;　　　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=5\times(-1)^{n+1}$;　　　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的第 7 项与第 10 项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$; (4) $a_n=-2^n+3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式,使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 2, 4, 6, 8;

(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点,用适当的数填空,并对每一个数列各写出一个通项公式:

(1) 2, 4, ( ), 8, 10, ( ), 14;

(2) 2, 4, ( ), 16, 32, ( ), 128, ( );

(3) ( ), 4, 9, 16, 25, ( ), 49;

(4) ( ), 4, 3, 2, 1, ( ), −1, ( );

(5) 1, $\sqrt{2}$, ( ), 2, $\sqrt{5}$, ( ), $\sqrt{7}$.

例 3 已知数列$\{a_n\}$的第 1 项是 1,以后各项由公式$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$给出,写出这个数列的前 5 项。

解: $a_1=1$,

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

练 习

写出下面数列$\{a_n\}$的前5项：

1. $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n+3$.
2. $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$.
3. $a_1=3$, $a_2=6$, $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$.
4. $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

1.2 等差数列

考察上一节中提到过的数列

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{1}$$

我们可以发现，这个数列有这样的特点：从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于1.

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母d表示. 例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

与

$$5, 0, -5, -10, \cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是2与-5.

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是d，那么

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

由此可知，等差数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

如果一个等差数列$\{a_n\}$的首项是1，公差是2，那么将它们代入上面的公式，就得到通项公式

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2,$$

即 $$a_n=2n-1.$$

这个数列可用图1-3来表示．从图中看到，表示这个等差数列各项的点都在同一条直线$y=2x-1$上．

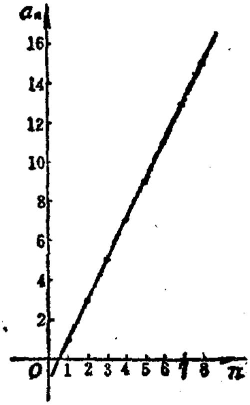


图 1-3

例1 求等差数列8, 5, 2, …的第20项．

解： ∵ $a_1=8, d=5-8=-3,$

$n=20,$

∴ $a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$

例2 等差数列$-5, -9, -13, \cdots$的第几项是-401？

解： $a_1=-5, d=-9-(-5)=-4, a_n=-401$，因此，

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答：这个数列的第100项是-401．

例 3 梯子的最高一级宽 33cm，最低一级宽 110cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列．计算中间各级的宽．

解: 用 $\{a_n\}$ 表示题中的等差数列，由已知条件，有

$$a_1=33,\quad a_{12}=110,\quad n=12,$$

$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

因此，

$$a_2=33+7=40,$$

$$a_3=40+7=47,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽从上到下依次是 40、47、54、61、68、75、82、89、96、103cm．

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a、A、b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**．

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项．

练　习

1. (1) 求等差数列 3, 7, 11, … 的第 4、7、10 项；

(2) 求等差数列 10, 8, 6, … 的第 20 项;

(3) 求等差数列 2, 9, 16, … 的第 n 项;

(4) 求等差数列 0, $-3\frac{1}{2}$, -7, … 的第 $n+1$ 项。

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 里:

(1) $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 a_1;

(2) $a_1=12$, $a_6=27$, 求 d;

(3) $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 n;

(4) $a_4=10$, $a_7=19$, 求 a_1 与 d.

下面通过一个具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法.

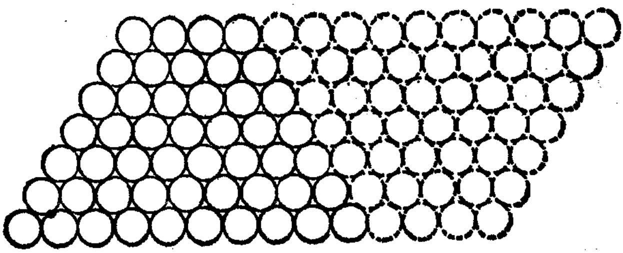


图 1-4

为了求出图 1-1 所示的钢管的总数, 我们可以设想: 如图 1-4 那样，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管. 这样，每层的钢管数都相等, 即

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

由于共有 7 层, 两堆钢管的总数是 $(4+10)\times7$, 因此所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times 7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]; \quad (1)$$

再把各项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{个}}\\&=n(a_1+a_n),\end{aligned}$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 4 如图 1-5 所示，一个堆放铅笔的 V 形架的最下面一层放 1 支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放 1 支，最

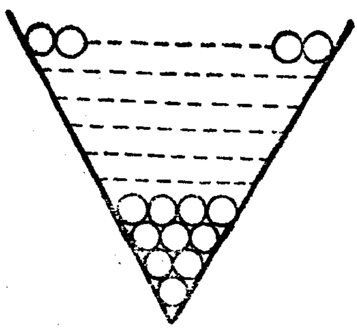


图 1-5

上面一层放 120 支. 这个 V 形架上共放着多少支铅笔?

解: 由题意可知, 这个 V 形架上共放着 120 层铅笔, 且自下而上各层的铅笔数组成等差数列, 记为$\{a_n\}$, 其中 $a_1=1$, $a_{120}=120$. 根据等差数列$\{a_n\}$前 n 项和的公式, 得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260.$$

答: V 形架上共放着 7260 支铅笔.

例 5 在小于 100 的正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数? 求它们的和.

解: 在小于 100 的正整数的集合中, 以下各数是 7 的倍数:

$$7,\ 7\times2,\ 7\times3,\cdots,7\times14,$$

或记作

$$7, 14, 21, \cdots, 98.$$

显然, 这个数列共有 14 项, 且是一个等差数列, 其中 $a_1=7$, $a_{14}=98$. 因此,

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

答: 在小于 100 的正整数的集合中有 14 个数是 7 的倍数, 它们的和等于 735.

例 6 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列, 求证它们的比是 3:4:5.

证明: 将成等差数列的三条边的长从小到大排列, 它们可以表示为 $a-d$、a、$a+d$, 这里 $a-d>0$, $d>0$. 由于它们是直角三角形的三条边的长, 根据勾股定理, 得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

从而这三条边的长是 $3d$、$4d$、$5d$.

因此，这三条边的长的比是 3:4:5。

练　习

1. 根据下列各组条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的 S_n：

(1) $a_1=5$, $a_n=95$, $n=10$;

(2) $a_1=100$, $d=-2$, $n=50$;

(3) $a_1=\frac{2}{3}$, $a_n=-\frac{3}{2}$, $n=14$;

(4) $a_1=14.5$, $d=0.7$, $a_n=32$.

2. (1) 求自然数列中前 n 个数的和；

(2) 求自然数列中前 n 个偶数的和。

习　题　一

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 3, 6, 9, 12;　　(2) 0, −2, −4, −6;

(3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$;　　(4) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}$;

(5) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$;　　(6) $\sqrt[3]{1}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$。

(1) 求这个数列的第 10 项、第 31 项及第 48 项；

(2) 420 是这个数列中的第几项？

3. (1) 已知数列$\{a_n\}$的第1项是1，第2项是2，以后各项由公式$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$给出。写出这个数列的前10项。

(2) 用上面的数列，通过公式$b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$构造一个新的数列$\{b_n\}$，并写出这个数列的前10项。

4. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=-2n+3$.

(1) 计算a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, a_5-a_4;

(2) 计算$a_{n+1}-a_n$;

(3) 求证这个数列是一个等差数列，并求出它的首项与公差。

5. (1) 一个等差数列的第1项是5.6，第6项是20.6，求它的第4项；

(2) 一个等差数列的第3项是9，第9项是3，求它的第12项。

6. 求下列各组数的等差中项：

(1) 647与895;　　　　(2) -180与360

(3) $(a+b)^2$与$(a-b)^2$.

7. (1) 下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码（表示鞋底长，单位是厘米）：

$21,\ 21\frac{1}{2},\ 22,\ 22\frac{1}{2},\ 23,\ 23\frac{1}{2},\ 24,\ 24\frac{1}{2},\ 25.$

这些尺码是否成等差数列？如果是，公差是多少？

(2) 全国统一鞋号中成年男鞋共有14种尺码，其中最小的尺码是$23\frac{1}{2}$(厘米)，各相邻的两个尺码都相差$\frac{1}{2}$厘米，把全部尺码从小到大列出。