幾何計算

許蒓舫著

中国青年出版社

幾何計算

幾何計算

許莼舫 著

中國青年出版社

一九五四年·北京

書號 357

幾何計算

著者 許蒓舫

青年·開明聯合組織

出版者 中國青年出版社

北京東四12條老君堂11號

總經售 新華書店

印刷者 北京市印刷二廠

字數 76,000

印數 15,001—40,000

一九五二年十月第一版

一九五四年四月第二版

一九五四年四月第三次印刷

修訂題記

從一九五二年秋季開學起，全國初、高中平面幾何教材已普遍採用東北人民政府教育部編譯的新教科書。這書是根據蘇聯十年制學校教科書編譯的，無論在內容和質量上，或編寫的方法和形式上，都明顯地表現了它各方面的優越性。

本書初版發排時，新教科書雖已在東北試用，但得到的經驗還少，對它的優點也體會得不够，所以沒有和它多多取得聯系，並儘量吸收它的優點。現在爲了要使採用新教科書的讀者得到參考上的更多便利，特地把本書作了一次修訂。

新教科書最大的特點是理論密切聯系實際，所以對計算題十分重視，分量約佔全部習題的58%。這些習題都非常精彩，絕大部分是以前的教科書中所找不到的。第一，教材由淺入深，錯綜變化，能培養學生懂得把幾何知識運用到實際問題上去；第二，多數題中除須應用新授的定理外，同時還複習舊定理，反覆啟示，使學生易於熟練；第三，部分習題能與有關各科縱橫聯系，不但增加學習興趣，並且易於把這知識鞏固起來。本書初版材料很少，現在根據新教科書增加篇幅約十分之六。採取的題目雖仍只佔該書的一半，但該書精華，可說已全部吸取到了。

本書雖經修訂，一定還存在許多缺點，希望讀者指正。

許莼舫 一九五三年九月

作者的話

一般同學在學習平面幾何學的時候，或多或少總存在着一些困難，推究其原因，主要是以下的四點：(1)對於基本觀念瞭解得不够清楚；(2)依照理論系統編排的教科書，不易兼顧到歸納類化，因而使同學難於掌握解題的方法；(3)教科書中的例題太少，引導和啓示不够，難收觀摩之效；(4)只知死記定理和法則，不會把它們靈活運用。作者因爲有這樣的感覺，才編了這一套小書。這套書分'幾何定理和證題'、'幾何作圖'、'軌跡'和'幾何計算'四册。內容主要是幫助同學們瞭解教科書中的材料，指導同學們運用定理和法則，掌握解題的正確方法；同時又兼顧到提高。所以，這一套小書是和教科書相輔爲用的，也可以說是補助教科書的不足的。

過去有許多幾何教師和同學們，往往强調幾何學的理論性，而忽略了它的實用性。因此，對於其中重要的一部分——幾何計算，認爲是不值一顧的東西，不是省略掉一大半，就是全然不去理會。這樣造成的結果，是理論和實際脫節，學了簡直不知道有什麼用，遇到實際問題時，也就沒有辦法應付。這一本'幾何計算'除掉根據着上述的總的目標外，主要是爲了要糾正這個偏向而編著的。

本書在第一章裏面，詳細介紹了許多基本的知識，使同學們對幾何量有一個徹底的認識。再詳示解計算題的步驟和應

行注意的事項，使同學們在實際解題時可以一絲不亂，免除錯誤。

關於幾何量的可通約和不可通約的兩種情況，以及幾何比例基本定理對這兩種情況的普遍適用，是同學們很難理解的，本書特地作了淺顯的講解，並用實例說明了極限的定理，藉此把幾何計算的理論基礎打好，以便和實際聯系起來。

從第二章起，分類把各種幾何計算作系統的講述，盡量把重要定理譯成簡明的公式，並多舉範例，啓示思考的過程，培養運用定理的能力。關於幾何計算在日常生活和測量上的應用，特地另舉了一些範例和研究題，並且還介紹了幾個中國古代的幾何計算題，可以增加學習興趣。

本書在編寫時雖經仔細斟酌，但錯誤之處還恐難免，希望讀者多多批評和指正。

許蒓舫　一九五二年二月

內 容 提 要

這是一本配合現行課本，着重聯系實際的幾何學參考用書。首先詳述幾何計算的各種基本知識，把理論基礎打好，接着就分類作系統的敘述，並舉出一些範例和研究題。最後更以專章討論幾何計算的實際應用，幫助讀者明瞭怎樣把學到的各項計算方法運用到實際問題上去，以避免理論和實際的脫節。

目 次

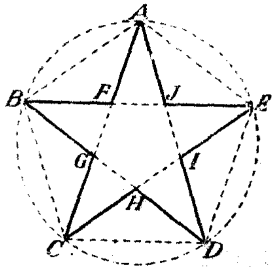
一　基本知識

什麽是幾何計算題

一九五〇年華東區大學統一招生的數學入學試題裏面，曾經有過這樣的一個問題：

‘正五角星形的五個頂角各是多少度？’

所謂正五角星形，就是我們中華人民共和國的國旗上的標幟，同學們對它都是非常熱愛的．關於正五角星形的性質，在‘幾何作圖’一書裏已經講到了一些，讀過的同學們一定都很熟悉；上舉的問題也就不難解答了．



要解決上舉的問題，必須先知道正五角星形是從一個正五角形的五條對角線所圍成的，其實是一個‘凹十角形’．它有十條相等的邊——AF, FB, BG, GC, CH 等；五個相等的‘頂角’——$\angle JAF$，$\angle FBG$ 等；五個相等的‘叉角’——$\angle AFB$，$\angle BGC$ 等．它同正五角形一樣，也有一個外接圓，各頂點分這外接圓成五等分．從這些性質，以及我們以前學過的許多幾何定理，就可以用下舉的兩種解法，來求正五角星形的頂角的度數．

解法一　因 $\overset{\frown}{CD}$ 是全圓周的 $\frac{1}{5}$，所以

$$\overset{\frown}{CD}=\frac{1}{5}\times 360^\circ=72^\circ.$$

又因$\angle JAF$是$\overset{\frown}{CD}$所對的圓周角，從圓周角的定理，知道這一個角可以拿$\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$來度它，所以

$$\angle JAF=\frac{1}{2}\times 72^\circ=36^\circ.$$

同理，其他的各頂角也都是36°.

解法二 從三角形的外角定理，知道

$\angle AJF=\angle B+\angle D$（爲便利計，$\angle FBG$簡稱$\angle B$，以下同），

$\angle AFJ=\angle C+\angle E$.

但又從三角形的內角定理，得

$$\angle A+\angle AJF+\angle AFJ=180^\circ,$$

$$\therefore \quad \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180^\circ.$$

又因正五角星形的五個頂角都相等，所以

$$5\angle A=180^\circ, \quad \angle A=36^\circ.$$

其餘同理.

註 從上舉的解法，我們知道要求圖中其他各角的度數，都很容易．像$\angle BAF$，$\angle ABF$等都是36°，$\angle AFJ$，$\angle AJF$等都是72°，$\angle AFB$，$\angle BGC$等都是108°．圖中所有的一切角，除掉大於180°的優角外，不出這三種度數．這三種度數——36°，72°，108°——恰巧順次成功一串‘等差級數’.

講過了這一個問題的解法，我們爲了要對這可愛的正五角星形作更進一步的認識，這裏再提出如下的一個新問題：

‘已知正五角星形中相鄰兩頂點的距離是2寸，求（1）邊長；（2）相鄰兩叉點的距離——JF，FG等；（3）相對兩頂點的距離——BE，AC等’.

要解決這一個問題，必須進一步認識前圖中所有的一切三角形都是等腰三角形．在這些等腰三角形中，頂角是36°，底角是72°的有二十個，它們都相似，其中的$\triangle AFJ$等的五個全等，$\triangle ACD$等的五個全等，$\triangle ABG$等十個全等；頂角是108°，

底角是 36° 的有十五個，也都相似，其中的 $\triangle ABF$ 等五個全等，$\triangle ABE$, $\triangle HBE$ 等十個全等.

從'相似三角形的對應邊成比例'的定理，注目 $\triangle BAJ$ 和 $\triangle AJF$，得

$$BA : AJ = AJ : JF.$$

因　$BA = BJ$, $AJ = BF$，代入上式，得

$$BJ : BF = BF : JF \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}).$$

又注目 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FAB$，得

$$BE : AB = AB : FA.$$

因　$AB = BJ$, $FA = JE$，代入上式，得

$$BE : BJ = BJ : JE \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}).$$

上舉公式(i)所表示的是線段 BJ 被 F 點所分，其中的長線分 BF 是短線分 JF 和全線 BJ 的比例中項，我們稱做線段 BJ 被 F 分成'外中比'. 同理，公式(ii)所表示的是線段 BE 被 J 分成外中比.

註　前圖中所有的一切線段，不出四種長度，最長的像 BE, AC 等五條，可簡稱做'對頂距'，用 a 表示；較短的像 AB, BC 等，可簡稱做'鄰頂距'，連同相等的 BJ, AG 等共計十五條，都用 b 表示；更短的像 BF, JE 等十條是邊，用 c 表示；最短的像 JF, FG 等五條，可簡稱做'鄰叉距'，用 d 表示. 因爲從 (i) 和 (ii) 知道

$$a : b = b : c = c : d.$$

所以這四種長度順次恰成一串'等比級數'.

根據這些性質，可用下法解前舉的新問題：

解　設邊長 $BF = x$ 寸，因已知 $BJ = AB = 2$ 寸，所以 $JF = (2 - x)$ 寸. 根據公式 (i)，得比例式　$2 : x = x : 2 - x$.

化爲等積式，移項，得二次方程式　$x^2 + 2x - 4 = 0$.

解得 $$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5}.$$

因負值不適用，故得邊長是 $-1+\sqrt{5}\approx^{*}-1+2.236=1.236$ 寸．鄰叉距是 $2-1.236=0.764$ 寸．

又設對頂距 $BE=y$ 寸，因已知 $BJ=AB=2$ 寸，故 $JE=(y-2)$ 寸．根據公式 (ii)，得比例式 $$y:2=2:y-2.$$

化爲等積式，再移項，得 $$y^2-2y-4=0.$$

解得 $$y=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}=1\pm\sqrt{5}.$$

同前，得對頂距是 $1+\sqrt{5}\approx1+2.236=3.236$ 寸．

在上面所述的兩個問題中，所有的角、弧和線段，都是有大小可以度量的，叫做**幾何量**．我們要度量一個幾何量，必須先取一適當的同類量做單位——像'度''寸'等，用這單位來量欲測的幾何量，看它含這單位量的多少倍．這倍數就是欲測的量對於單位量的比值，叫做'**該量的測度**'．例如線段的單位用寸，假使一線段的大小是 1 寸的 2 倍，就是這線段對於 1 寸的線段的比值是 2，那末這線段的測度就是 2．

有些幾何圖形，可以根據已知的性質或幾何定理，求出其中的某些幾何量的測度，像前舉的第一問題就是．又有些幾何圖形，必須有一部分幾何量的測度爲已知，才能根據已知的性質或幾何定理，求出另一部分的測度，像前舉的第二問題就是．這樣的兩種問題，都是幾何學中的**計算題**．

同學們都知道，幾何定理就是關於各種幾何圖形的性質的叙述．古代的勞動人民，爲了在生產實踐中必須計算各種幾何量，像定方向，測高深，求地積等，於是發現了許多幾何定

---

* $\approx$ 是'近似'的記號

理．可見幾何學是在生產條件下發生和發展的，它最初是從積累着的實際經驗總結而得幾何定理，接着再用理論方式加以證明，最後又拿來供給實際的應用，是理論和實際相結合的．我們學習幾何計算題，可以把已習的幾何定理聯系到實際，使新民主主義教育的目標之一——學用一致，更明確起來．

解計算題要用哪些定理

在上節解兩個幾何計算題時，要根據下列的許多幾何定理：

（1）圓周角拿所對的弧的一半來度它．

（2）三角形三內角的和是二直角．

（3）兩個三角形的兩組角彼此分別相等，那末兩三角形相似．

（4）相似三角形的對應邊成比例．

……………………………………………………………………

這許多定理都是關於幾何量的比較，就是量的相等和不等．初等幾何所研究的圖形性質，多數是關於量的比較，以及從此推得的其他情形，像直線的平行和垂直之類．這些性質，都和度量有關，叫做'圖形的**度量性**'．

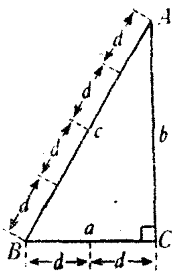
另外還有許多幾何定理，是研究諸線或諸圓共點，諸點共線或共圓等性質的，這些只是表示點、線、圓等相互間的位置關係，和度量無關，叫做'圖形的**非度量性**'．

凡是關於圖形的度量性的定理，在解幾何計算題時一定

要用到，所以我們要想掌握各種計算題的解法，首先必須熟習這些定理．至於圖形的非度量性定理，雖然在計算上一般都沒有用途，但有些問題必須先行確定圖形的某些特性，然後才能着手計算，那時就要用到它了（像範例 18 等就是）．照這樣看來，我們必須熟習了全部的幾何學，對解決計算題方才可以得心應手．

怎樣用數表幾何量

我們已經談過：要用數來表幾何量的大小，必先定一單位，看這幾何量是單位量的多少倍，這倍數就是這幾何量的測度．例如在右圖中，假定 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 是直角，$\angle B$ 是 $\angle A$ 的兩倍，那末根據定理：'直角三角形的一銳角是另一銳角的二倍時，斜邊一定是短的直角邊的二倍'，知道定 a 邊的長爲單位時——就是 a 邊的測度爲 1，c 邊的測度一定是 2.



但是，如果我們改定 c 邊的長爲單位，那末 a 邊的測度就是 $\frac{1}{2}$．可見量的大小雖一定，但它的測度却跟着單位而有不同；所以測度的數並不是絕對的．

在上舉的實例中，c 恰是 a 的整數倍—— 2 倍，我們稱 c 是 a 的**倍量**；掉過來說，a 是 c 的**約量**．又設 d 是 a 的半分，那末 a 是 d 的倍量——2 倍，c 也是 d 的倍量—— 4 倍，這 d 叫做是 a 和 c 的**公約量**(或公度)．

a 和 c 既有公約量 d，我們用 d 的長來量 a，經兩次而量

盡；用 d 來量 c，經四次而量盡．像這樣，兩個量能同時被它們的公約量所'量盡'，實際和算術裏的兩個數能同時被它們的公約數所'除盡'一樣．這種有公約量的兩個量，叫做**可通約量**(或可公度)．

兩個量要有什麼條件，才是可通約量呢？這一個問題很簡單，可用下舉的兩例來說明：

〔例一〕 有一長一短的兩條線段，長的是 1 尺 6 寸，短的是 2 分，當用尺做單位，或寸做單位時，雖不能同時量盡，但用分做單位時，量長線段得 160 次，量短線段得 2 次，都可以量盡．這 1 分的長就是兩線段的公約量．

〔例二〕 同上，長線段是 1 寸，短線段是 $\frac{2}{3}$ 寸．因為 $\frac{2}{3}$ 可化成小數 0.666…，是永無窮盡的循環小數，所以無論用寸做單位，分做單位，厘或毫……做單位，都不能同時量盡．那末這兩條線段是不是沒有公約量呢？不，我們若用 $\frac{1}{3}$ 寸做單位，量長線段得 3 次，量短線段得 2 次，全都量盡，可見它們有公約量 $\frac{1}{3}$ 寸．

考察這兩個例子中的每兩個數，知道 $\frac{160}{2}=80$，是一個整數；$\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$，是一個分數．這整數和分數總稱做有理數，可見兩個幾何量的比是有理數的，它們一定是可通約量．

那末是不是任何兩個幾何量都是可通約量呢？要解決這一個問題，可參閱下面的例子：

設前圖中的 a 邊是單位長，測度是 1，那末 c 邊的測度是 2，根據商高定理，得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

這 $\sqrt{3}$ 是一個記號，表示把整數 3 開平方．我們用算術的開平方法，計算得 1.7321……，它的小數位數多到無窮，也不會循環．這樣的數既不是整數，又不是分數，我們稱它做無理數．這時的長線段 b 是 1.7321……寸，短線段 a 是 1 寸，我們無論用寸，用分，用厘，以至用極小極小的單位去量，都不能同時量盡；再用幾分之幾寸，幾分之幾分，……去量，也是一樣．因而這兩個幾何量就沒有公約量．

可見兩個幾何量的比是無理數——像上例中的 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，一定沒有公約量，可稱做**不可通約量**(或不可公度)．

再假定拿前圖中的 b 邊作為單位長. 從商高定理, 得

$$(2a)^2 = a^2 + 1, \text{ 就是 } 3a^2 = 1.$$

解得 $$a = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad c = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

可見表某一幾何量的數是不是有理數, 也不是絕對的. 同一幾何量, 因所用單位的不同, 可能是有理數, 也可能是無理數. 雖然如此, 但任何兩個幾何量的比, 不論所用的單位怎樣, 總是一定的. 看下面的一個表就可以明白.

不同的單位	a 的測度	c 的測度	b 的測度	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{c}$
用 a 長做單位	1	2	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
用 c 長做單位	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
用 b 長做單位	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

把上述的各點總結一下, 我們知道.

(1) 表幾何量的數——就是測度——是跟着單位而不同的.

(2) 表幾何量的數, 有時是有理數, 有時是無理數.

(3) 兩個幾何量的比是有理數的, 必有公約量, 它們是可通約量.

(4) 兩個幾何量的比是無理數的, 沒有公約量, 它們是不可通約量.

不可通約量的幾何解釋

為了要把不可通約量認識得更清楚, 我們再作進一步的研究.