面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

实分析与泛函分析

匡继昌 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

822

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

实分析与泛函分析

匡继昌 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果.

本书通过改革和创新,用集合(通过引入各种结构)和映射将传统的“实变函数论”、“测度论”和“泛函分析”三门课融合为一门新的“现代分析”基础教程,使之保持了适当的理论深度和较高的学术水平,使读者用较少的时间就能掌握现代分析中最有用的核心内容和方法技巧;同时,本书起点低,只要求读者具有初等微积分和高等代数初步知识,对不同专业和不同层次的教学有较大的选择空间,因而本书有广泛的读者面,可作为大学数学专业本科生和硕士研究生的教材或教学参考书,也可供广大科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

实分析与泛函分析/匡继昌编著.—北京:高等教育出版社,2002.8

本科生教材

ISBN 7-04-011234-5

Ⅰ.实... Ⅱ.匡... Ⅲ.①实分析-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第045420号

实分析与泛函分析

匡继昌　编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所

排　　版　高等教育出版社照排中心

印　　刷　中国农业出版社印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002年8月第1版
印　　张	24.25	印　　次	2002年8月第1次印刷
字　　数	450 000	定　　价	30.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

序　言

多年来我先后在四所大学从事数学教学和科研工作，在与同事们和研究生们广泛接触的过程中，获得的一个总的印象是，凡是在经典分析、泛函分析、概率理论、微分方程及计算数学诸分支领域能胜任且愉快地进行教学和科研工作的，几乎无例外地都具有坚实的“实分析”（又名“实变函数论”）基础．我也曾不止一次地讲授过实变函数论课程，发现大多数学生们学习这门课程的成绩高低，往往反映出他们的数学思维能力素质的高低．

后来读了一点数学史，才理解上述现象是很自然的．事实上，实分析的大部分理论模式及其构造方法是在微积分发明200年后，通过人们不断对数学基础问题的反思，才逐步发展成型的．实分析自然是一门极精致的数学，具有很高的抽象度，所以按照现代认知心理学和知识建构的规律来看，初学者需要不断提升自己的抽象思维素质，才能将实分析的理论模式在头脑中完成相应的“建构过程”．这样说来，初学者即使感到实分析中的概念和理论不易很快领悟或精通，也就不足为怪了．

上世纪50年代至60年代，国内曾广泛采用俄罗斯数学家那汤松的《实变函数论》作教材，我也用过这教材，认为它的习题编选得很好，颇能培育人的分析解题能力．只可惜教材分量太重，要占用学生的时间精力也太多．上世纪70年代以来，国内各地已出版了多种属于实分析范围的教本，大多数比较精简扼要，能符合实际教学需要．

1996年，我见到了湖南师大匡继昌教授的《实分析引论》，感到它以很小的篇幅居然讲述了实变函数论中所有基本重要的题材，确实是一大特色．《引论》之所以具有这一特色的原因是，它自始至终采用了现代数学著作中经常使用的“半形式主义”的表述法．这种表述法，使得数学论述及推理，表现得简洁、明晰而严谨，而又不至于像“纯形式主义表述法”（如同数理逻辑中的纯符号形式表示法）那样会令初学者感到索然无味或者望而生畏．当然，《引论》之所以能做到篇幅小而内容多，也和作者运用了数学方法论中的“RMI原则”（关系映射反演原则）有关，因为这一方法原则的使用能使得传统的题材内容得到化繁为简、化难为易的处理．

该书各章都包含一些精选的例题和习题，大多数例题都富于启发性．这对学

生们特别是自学者无疑是极有帮助的.

该书的另一特色是,它还介绍了国内外的一些新成果.例如,第六章“微分论”中,给出了 Hardy－Littlewood 球形极大函数的概念及其基本性质,还提到了高维球域上的 Lebesgue 微分定理不能扩充到任意域上的情形等问题,这些都是十分引人入胜的题材.

现代国外数学教育工作者已经提出了“让学生们学会数学地思维”作为教育目标的主张.我是很赞成这种见解的,并认为一本好的实分析教材应该有助于学生去学会“数学地思维”,我相信这本简明教材对学生们学到“数学地思维”的能力和习惯必能起到一分积极作用.

上述《实分析引论》于 1996 年出版后,作者又根据新的教学实践和教育部教学改革立项的要求,对该书全部改写后,增加了泛函分析的基础部分,因而更名为《实分析与泛函分析》.实际上这构成了一部“现代分析”基础的完整教材.此教材的主要特点是,始终贯彻使用“集论与映射”观点处理一切题材.又利用了调和分析、逼近论等新成果与新技巧处理重要定理的论证方法,从而实现了“教改”中所提出的“化繁为简、化难为易、以简御繁”的目标.

此书论述了现代“实分析与泛函分析”中一系列基本而重要的成果.理论分析与技术处理均极精致,且能深入浅出,足见作者是具有精博的学术素养与卓越的专业水平的.而且,作者的实际教学经验,促使本教材留有较大的弹性空间,使得师生和自学者都有选择余地.据我所知,本书通过不同层次的教学实践表明,它确实是一部改革力度大的优秀教材,故我乐愿期望这本新教材的出版能在更大范围内对推动教材革新起到积极作用.

大连理工大学数学科学研究所名誉所长,
博士生导师,“数学研究与评论”主编,
《逼近论及其应用》(ATA)主编:
徐利治
2002－03－26 于北京寓所

前　言

20 世纪的数学革命，是从 Cantor 建立集合论开始，继而是积分学的革命——Lebesgue 积分理论的建立. 到 20 世纪 30 年代，在集合中引进各种结构，包括代数结构，拓扑结构，测度结构、序结构以及这些基本结构的各种复合，形成了各种各样的抽象空间. 研究这些抽象空间的性质及其映射，就构成了十分庞大的现代数学体系. 它是继欧氏几何和微积分之后，数学发展史和数学教育发展史上第三个里程碑. 现代数学是集严密性、逻辑性、精确性和创造力与想像力于一身的学问，它为深刻地揭示表面上毫不相关的数学对象的共同本质特征，帮助人们从更高层次上理解复杂的数学现象和数学技巧开辟了道路. 在大学数学教育中，“老三基”(数学分析、解析几何、高等代数)构成了 17 世纪—19 世纪近代数学的核心，而“新三基”(实分析与泛函分析，拓扑学、抽象代数)则是 20 世纪现代数学的核心.

但是，“实分析与泛函分析”又历来是师生感到难教难学的课程. 这是因为数学要借助于一套特殊的符号语言才能进行逻辑推理. 但是，数学，特别是现代数学，是一门需要深入理解的学问而不是符号的堆集. 多年的教学实践表明，初学者往往一下子难于理解这套符号语言背后所反映的深刻的思想方法和基本概念的实质. 为了探索从“难教难学”向“易教易学”转变的新途径，我们在使用与消化国内出版的多种不同风格优秀教材的基础上，从 20 世纪 80 年代以来就结合自己的教学实践，着手自编教材，收到了良好的教学效果，于 1989 年获得“坚持教学改革，努力提高实函与泛函的教学质量”的校级优秀教学成果奖. 获奖后，仍坚持深化改革，在教学实践中对讲义反复边教边改，甚至从课程体系，教学内容等方面多次全部改写. 因此，本书既是教改实践的成果形式，又是作者几十年教学与科研工作的结晶. 其中实分析部分于 1996 年取名《实分析引论》正式出版. 著名数学家徐利治教授亲自为该书作序. 该书出版后，根据 1998 年教育部批准的“高等师范教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”立项的要求和新的教学改革实践，对该书又全部改写，并增加了泛函分析的基础部分，而全书的基本框架和指导原则未变.

为了适应新世纪教学改革的新形势，使之既要易教易学，富有启发性，又要提高学术水平，作者特别在以下几方面作了长期的努力：

1. 在课程体系上以“集合与映射”为核心将传统的“实变函数论”、“测度

论"、"泛函分析"三门课融合为一个有机的整体，通过在集合中引入各种运算和结构，形成各种抽象空间，很自然就得到了"现代分析"的基本框架．仍取名为"实分析与泛函分析"，是为了兼顾传统的提法．这样就解决了长期以来存在的一元与多元脱节、欧氏空间与抽象空间脱节的问题．多年教学实践表明，这样做不仅没有增加难度，反而有利于培养学生学会如何从特殊的、具体的事物中抽出其本质特征的能力，也有助于学生对基本概念本质的理解和掌握，也才有可能不因压缩学时而降低学术水平．

2．按新世纪的要求优化教学内容，使读者用较少的时间就能掌握实分析与泛函分析中最有用的核心内容和方法技巧，我们力求反映新的研究成果，对传统题材进行现代化处理．例如(L)积分列的极限定理，Luzin 定理，(L)微分定理，Fubini 定理，泛函分析中的三大定理等，证明都比较长而难，教学中历来难于过关，但如果删去这些定理的证明，就等于丢掉了现代分析中的许多精华．这是因为数学证明是数学的核心，因此我们没有回避困难，而是充分利用逼近论与调和分析的新成果(如 H－L 极大函数等)，成功地简化了上述证明，确实收到了化难为易的效果．

3．采取多种途径，降低起点和难度，为现代数学的普及探索新的途径．降低起点是只要求读者具有初等微积分和高等代数初步知识，降低难度则是在如何易教易学上下功夫．例如作者注意运用数学方法论的 RMI 原则(关系映射反演原则)和"半形式主义"的表述法等使传统题材得到化繁为简，以简御繁，化难为易的处理．在文字叙述上处处为初学者着想，对基本概念和证明思路的叙述力求准确和富有启发性，甚至在数学符号的使用上都作了许多考虑．这就使得降低难度而不致降低学术水平．事实上本书无论在内容的广度和深度方面都达到甚至超过了现行教学大纲规定的要求．

4．为了使本书能适应不同专业、不同层次的需要，就要求对教学内容有较大的选择空间．根据我们多年的教学实践，本书作为数学专业本科生教材，可分为三部分．第一部分是第 1～6 章，作为"实分析"("实变函数论"或"测度论")一个学期的教材，若按周 5($17\times5=85$ 学时)安排，讲授约需 64 学时，作业分析 16 学时，若按周 4($17\times4=68$ 学时)安排，讲授第 1～5 章约需 52 学时，作业分析 12 学时；第二部分是第 7～8 章，作为"泛函分析"一个学期的教材，按周 4($17\times4=68$ 学时)安排，讲授约需 54 学时，作业分析 10 学时；第三部分是第 9 章(若"实分析"安排周 4 学时，则还要加上第 6 章)作为"实分析与泛函分析"续论(或选讲)的选修课教材(本校安排为 30 学时)．我们还根据学生不同基础，通过对本书材料的适当选取，多次作为硕士研究生教材和本科生函授或短训班的教材．对于这些不同层次的教学，都收到了良好的教学效果，授课质量学生评价一直为优秀，详见"数学教育学报"2001，10(2)，84－87 和 2002，11(1)，68－71．

作者衷心感谢著名数学家徐利治教授、王昆扬教授的指导和帮助.徐先生在百忙中为本书所作的"序言"无疑是对作者极大的鼓励和鞭策.本书在写作过程中,还得到许多院校大批专家学者的鼓励、支持和帮助,特别是张奠宙教授(华东师大)、王仁宏教授(大连理工大学)、施咸亮教授(本校)、邓宗琦和何穗教授(华中师大)、周颂平教授(宁波大学)、東立生教授(安徽师大)、周家云教授(曲阜师大)、侯象乾教授(宁夏大学)、李宗铎教授(长沙大学)等,书稿送出版社后,又承蒙吉林大学孙善利教授作了仔细的审阅,提出了许多宝贵的修改意见,所有这些都对提高书稿质量起了十分重要的作用.作者对他们致以诚挚的谢意.作者还感谢教育部将本书作为"高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的项目以及湖南省教育厅将本书作为第一批"湖南省高等教育21世纪课程教材".作者还要感谢使用本书的师生在使用过程中提出的宝贵意见和建议,并欢迎在今后的使用过程中继续提出宝贵意见.作者在写作本书和长期的教学实践中,除了书末列出的参考文献之外,还参考了国内外大量有关书籍和杂志,限于篇幅无法一一列出,在此谨向这些作者致谢.

作者特别感谢高等教育出版社文小西先生的指导并为本书的编辑出版所付出的辛勤劳动.

匡继昌
2002年3月于湖南师范大学数学系

符　号　表

本书所使用的数学符号力求简明、规范，并与国际接轨，以利于初学者的理解和使用.例如，f 的水平集 $\{x\in E: f(x)>\alpha\}$ 在不致引起混淆时，尽量使用当前国际上通用的 $\{f>\alpha\}$，而不用国内使用较多的记号 $E\{x: f(x)>\alpha\}$ 或 $E(f>\alpha)$；又如 (L) 积分 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 常简写成 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 或 $\int_E f$.

下面按符号首次出现的次序列出，个别通用的记号有几种含义时或相近的记号则放在一起.§1.2 表示第 1 章§2.

§1.1

$A\cup B$：集 A 与 B 的并集

$A\cap B$：集 A 与 B 的交集

$A+B$：集 A 与 B 的直和(§7.3)

$A\oplus B$：集 A 与 B 的正交和(§7.3)

$\varnothing$：空集

$\exists$：存在(存在量词)

$\forall$：所有(全称量词)

$\mathbf{N}$：自然数集，不包括数 0

I：指标集；恒等映射(§1.2)；恒等算子(单位算子)(§7.1)

X：基本集；抽象空间(第二章及其以后各章)

$B-A$：集 B 与 A 的差集.

$A^c=X-A$：A 的余集(补集)

$A\times B$：集 A 与 B 的直积(或卡氏积)；

$X\times Y$：X 与 Y 的乘积空间(§8.5)

def：定义式

$A\triangle B$：集 A 与 B 的对称差

$P(E)$：集 E 的幂集(事件 A 的概率 $P(A)$ 见§9.4)

$\sum$：基本集 X 的一部分子集构成的集族；集 X 上的拓扑(§2.2)

$\mathbf{Q}$：有理数集；$\mathbf{R}^n$ 中方体或 n 维区间(§2.3)

$\mathbf{Z}$：整数集

R 或 **R**$'$:实数集

C:复数集

K:数域($K=\mathbf{R}$ 或 **C**)(§7.2)

$\lim\limits_{k\to\infty}x_k$,$\liminf\limits_{k\to\infty}x_k$,$\limsup\limits_{k\to\infty}x_k$:数列$\{x_k\}$的极限、下极限、上极限

$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$,$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$,$\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$:集列$\{A_n\}$的极限、下极限、上极限

§1.2

$f(A)$:集 A 在映射 f 下的像集

$f^{-1}(B)$:集 B 在映射 f 下的原像集

$f\circ g$:映射 f 与 g 的复合映射

$f_l^{-1}(T_l^{-1})$:左逆映射(算子)

$f_r^{-1}(T_r^{-1})$:右逆映射(算子)

$f^{-1}(T^{-1})$:逆映射(逆算子见§8.1)

φ_A:集 A 的特征函数

∞:表示 $+\infty$

$\{f>\alpha\}$:$\{x\in E:f(x)>\alpha\}$为 f 的水平集

§1.3

$|A|$:集 A 的基数

$a=|\mathbf{N}|$:可数基数

$c=|\mathbf{R}'|$:连续统基数

2^c:超连续统基数

$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$:$n$ 维实(复)欧氏空间

§2.1

(X,d):距离空间(另见§7.1)

$d(x,A)$;$d(A,B)$:点 x 与集A,集 A 与 B 间的距离

$\mathrm{diam}A$:集 A 的直径

$B(x_0,r)$,$\widetilde{B}(x_0,r)$,$S(x_0,r)$:以 x_0 为球心,r 为半径的开球、闭球、球面

E°,E',$\overline{E}$,∂E:集 E 的开核、导集、闭包、边界

G:开集

G_δ:G_δ 型集($G_\delta=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$,$\forall G_k$ 为开集)

F:闭集

F_σ：F_σ 型集（$F_\sigma=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$，$\forall F_k$ 为闭集）

§ 2.2

$\omega(f,B)$：f 在集 B 上的振幅
$\omega(f,x_0)$：f 在点 x_0 的振幅
$\omega(f,\delta)$：f 的连续模（见 § 9.2）

§ 3.1

$V(Q)$：n 维区间 Q 的体积
$\mu^*(E)$：集 E 的外测度，即（L）外测度（Lebesgue 外测度）

§ 3.2

$\mu(E)$：集 E 的测度，即（L）测度.

§ 3.3

$(X,\sum)$：可测空间
$(X,\sum,\mu)$：测度空间

§ 4.1

f^+,f^-：f 的正部、负部
$p(x)\ a.e.\ x\in E$：命题 $p(x)$ 在 E 上（关于 μ）几乎处处成立

§ 4.2

$f_k\nearrow(\searrow)$：f_k 关于 k 递增（递减）（另见 § 5.5，§ 9.5）
$f_k\to f(k\to\infty)$：f_k 点态收敛于 f
$f_k\rightrightarrows f(k\to\infty)$：$f_k$ 一致收敛于 f
$f_k\to f\ a.e.(k\to\infty)$：$f_k$ 几乎处处收敛于 f
$f_k\xRightarrow{a.un}f(k\to\infty)$：$f_k$ 几乎一致收敛于 f
$f_k\xrightarrow{\mu}f(k\to\infty)$：$f_k$ 依测度收敛于 f

§ 4.3

$\mathrm{supp}f$：f 的支集

§5.1

T:区间的分划;算子 $T:X\to Y$(见第8—9章)

$(R)\int_a^b f$,$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$:f 在$[a,b]$上的(R)积分(Riemann 积分)

$\int_a^b f$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$:f 在$[a,b]$上的(L)积分(Lebesgue 积分)

$\int_E f$,$\int_E f\mathrm{d}\mu$:f 在E 上(关于 μ)的(L)积分

$(N)\int_a^b f$:牛顿积分(§5.4)

$(H)\int_a^b f$:H 积分(Henstock 积分)(§9.5)

$\{f\}_n$:f 的截断函数

$\Gamma(f,E)$:f 在集E 上的图像.

$G(f,E)$:f 在集E 上的下方区域

$L^p(E)$:p 次(L)可积函数空间,$1\leqslant p\leqslant\infty$(另见§7.4)

l^p:序列空间,$1\leqslant p\leqslant\infty$(另见§7.4)

§5.5

$f*g$:f 与 g 的卷积

E_α:$E_\alpha=\{x\in E:|f(x)|>\alpha\}$

$\omega(\alpha)$:$\omega(\alpha)=\mu(E_\alpha)$为 f 的分布函数

E_x,E^y:$E_x=\{y\in\mathbf{R}^m:(x,y)\in E\}$($E$ 在x 的截集)

$E^y=\{x\in\mathbf{R}^n:(x,y)\in E\}$($E$ 在y 的截集)

$(\mu_1\times\mu_2)(E)$:E 的乘积测度

§6.1

$M(f,x)$:f 的HL 极大函数

$L_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$:$\mathbf{R}^n$ 上局部可积函数

$f_r(x)$:f 在球$B(x,r)$上的平均(另见§9.7)

§6.3

D^+f,D_+f,D^-f,D_-f:f 的 Dini 导数

§6.4

$BV[a,b]$:有界变差函数空间;$BV_0[a,b]$见§8.3

$AC[a,b]$:绝对连续函数空间
$V_a^b(f,T)$:f 在$[a,b]$上关于分划 T 的变差
$V_a^b(f)$:f 在$[a,b]$上的全变差
$\mathrm{Lip}_M\alpha$:Lipschitz 函数类;(§7.4 中记为 H^α,$0<\alpha\leqslant 1$)另见§9.2

§7.1

$C(X)$,$C_p(X)$:连续函数空间(另见§7.4)

§7.2

$(X,\|\cdot\|)$:赋范线性空间
E_n:n 维赋范线性空间
$B(E)$:E 上有界函数空间
$\mathrm{span}A$:由集 A 张成的子空间(即 A 的线性包)
$\|x\|$:元素 x 的范数
$\dim X$:X 的维数
c:收敛序列空间
c_0:收敛于 0 的序列空间

§7.3

(x,y):x,y 的内积;乘积空间 $X\times Y$ 中的元素(§1.1)
$x\perp y$:x 与 y 正交,即$(x,y)=0$
$A\perp B$:集 A 与 B 正交
$A^\perp$:集 A 的正交补,即 $A^\perp=\{x\in X;x\perp A\}$

§7.4

$S(X)$:可测函数空间
s:序列空间(实数列空间又记为 $\mathbf{R}^\infty$,见§1.3)
$C^m(E)$:可微函数空间
$L_\varphi(E)$:Orilicz 空间
$\|f\|_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$:$L^p(E)$中函数 f 的范数

§8.1

$\|T\|$,$\|f\|$:算子 T,泛函 f 的范数
$D(T)$,$R(T)$,$N(T)$:算子 T 的定义域、值域、零空间

§8.2

$L(X,Y)$：$T:X\to Y$ 的线性算子空间；$L(X)=L(X,X)$
$B(X,Y)$：$T:X\to Y$ 的有界线性算子空间；$B(X)=B(X,X)$
$X^*=B(X,K)$：X 的共轭空间
X'：广义函数空间（分布空间）（§9.8）
$T_n\Rightarrow T$：T_n 一致收敛（依算子范数收敛）于 T
$T_n\xrightarrow{s}T$，$f_n\xrightarrow{s}f$：T_n 强收敛于 T，f_n 强收敛于 f
$T_n\xrightarrow{w}T$，$f_n\xrightarrow{w}f$：T_n 弱收敛于 T；f_n 弱收敛于 f
$f_n\xrightarrow{w^*}f$：泛函列 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f
$x_n\xrightarrow{s}x$：点列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x（依空间范数收敛）
$x_n\xrightarrow{w}x$：点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x

§8.5

$G(T)$：算子 T 的图像

§8.7

T^*：T 的共轭算子
$\tau:X\to X^{**}$：（自然）嵌入算子

§9.5

$\mu^+,\mu^-,|\mu|$：μ 的正变差，负变差，全变差
$\mu_2\ll\mu_1$：μ_2 关于 μ_1 绝对连续

§9.7

X/A：X 关于 A 的商空间
$\mathrm{codim}A=\dim(X/A)$：$A$ 的余维数

§9.8

$(x,\leqslant)$：序空间；格
T_λ：正则算子
$R_\lambda=T_\lambda^{-1}$：豫解算子

$\rho(T)$：T 的豫解集，正则值集

$\sigma(T)=\mathbf{C}-\rho(T)$：算子 T 的谱

$\sigma_p(T),\sigma_c(T),\sigma_r(T)$：算子 T 的点谱（离散谱），连续谱、剩余谱

$r_\sigma(T)$：算子 T 的谱半径

$\delta(t)$：δ 函数

$H(t)$：Heaviside 函数

$C^\infty(\mathbf{R}^n),C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$：可微函数空间

$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n),S(\mathbf{R}^n)$：检验函数空间

$S'(\mathbf{R}^n)$：缓增广义函数空间

目 录