明安联　周惠彬　编著

概率论与数理统计

四川科学技术出版社

概率论与数理统计

明安联　周惠彬　编著

四川科学技术出版社

1989年・成都

责任编辑：赵 健
封面设计：朱德祥
技术设计：翁宜民

概率论与数理统计

明安联 周惠彬 编著

四川科学技术出版社出版发行
（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销
成都市装璜印刷厂印刷
ISBN7—5364—1431—5/0·37

1989年9月第一版 开本 787×1092毫米1/32
1989月9月第一次印刷 字数321千
印数1—3000册 印张15插页1

定价：4.75元

前　　言

概率论与数理统计是一门研究随机现象统计规律性的基础学科。随机现象的普遍性，决定了概率统计应用的广泛性。

本书分为两部分，第一部分为概率论（1～5章），第二部分为数理统计（6～10章）。概率论提供了深入学习数理统计知识必需的理论基础；数理统计介绍了现代经济管理、生产和科研中常用的数理统计方法。在编写安排上，对基本概念作了较详细的阐述，对定理和公式作了简明推证。

全书条理清晰，通俗易懂，并附有习题和答案，可作为财经、理工、农医等专业用书，也可供广大科技工作者参考。

由于编者学识浅薄，书中不当及错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

1989年1月

目　　录

第一章　随机事件与随机事件的概率

§1—1　随机现象与随机事件

自然界与人类社会中所发生的一切现象不外乎确定性现象和随机现象两种。所谓确定性现象，就是在一定条件下必然发生的现象。例如在标准大气压下，水加热到100°C必定会沸腾；如果有100件商品全部是一级品，从中任取一件，取到的必然是一级品。所谓随机现象就是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。例如上抛一枚硬币出现国徽，可能发生也可能不发生（出现币值）；从有30件正品、70件次品的一批商品中，任取一件是正品，可能发生也可能不发生（抽到的是次品）。

经验告诉我们，随机现象是比确定性现象更普通的客观现象。人们通过大量观察发现，任何随机现象也可呈现一定的规律性。例如抛硬币，进行一次抛掷，可能出现正面，也可能出现反面，事先不能确定到底会出现哪种结果。但是多次重复抛掷发现，出现正面与出现反面的机会大致均等，即呈现出一定的规律性来。这种规律性通常称为统计规律性。

概率统计就是研究随机现象统计规律性的一个数学分支。我们学习概率论的目的在于认识随机现象的一定规律性，以便于对随机现象进行解释、控制与利用。

为了掌握随机现象的统计规律性，我们必须对随机现象进行大量观测或实验，在一定条件下，对随机现象的观测或实验称为随机试验。对于随机试验，它应具 备 如下三 个特点：

1°在同一条件下，试验可多次重复进行；

2°试验结果不止一个，但事前可预知出现的所有可能结果；

3°每次试验会出现哪种结果是不可料定的。

在随机试验中，它的每一个可能结果叫做试验的一个基本随机事件，简称基本事件。基本事件一般用ω表示。某一随机试验的一切基本事件ω全体的集合叫做该试验的样本空间，或就称为基本事件空间。记为Ω，即

$$\Omega=\{\omega|\omega \text{ 为基本事件}\} \qquad (1-1)$$

每个基本事件ω又叫做样本空间Ω的一个样本点。

例如：（1）登记新生婴儿的性别，令ω_1表示“男婴”，ω_2表示“女婴”，则样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，它包含两个基本事件，即两个样本点；（2）投一枚骰子记录其朝上的点数。令ω_i表示出现点数为i的事件，则其样本空间$\Omega=\{\omega_1、\omega_2，\omega_3，\omega_4，\omega_5，\omega_6\}$它包含六个基本事件，即六个样本点；（3）某射手连续地向某目标进行射击，直到击中目标为止。令ω_i表示“射击i次击中目标”的事件，则样本空间$\Omega=\{\omega_i, i=1, 2, \cdots\}$，它包含无穷可数个基本事件，即无穷可数个样本点。

对于一个随机试验，除了研究它的基本事件而外，我们还要研究由某些基本事件组成的集合而构成的事件，称为复合随机事件。简称复合事件。一般用大写字母A、B、C、D等

表示。

例如在掷骰子试验中，令A＝“掷得奇数点”的事件，B＝“掷得点数大于3点”的事件都是复合事件，其中$A=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$，$B=\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$。单点集$\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…$\{\omega_6\}$就是基本事件。

每次试验中必定发生的事件，称为必然事件；每次试验中必定不发生的事件称为不可能事件。如掷骰子试验中，“出现不大于6点”的事件是必然事件，“出现7点”的事件是不可能事件。为了研究上的方便，我们将必然事件与不可能事件都视为特殊的随机事件来处理。通常用U表示必然事件，用V表示不可能事件。

某随机试验中，基本事件与复合事件统称为该试验下的随机事件，简称事件。必须再强调，我们说事件A发生，就是说A包含有样本点，不包含任何样本点的事件即空集ϕ就表示不可能事件，包含全部样本点的事件即样本空间Ω本身就是必然事件。

一个样本空间为Ω的随机试验的所有随机事件的全体，称为该试验的事件域（或称为Ω的事件域），记为$\overline{\Omega}$。

例如投骰子试验中，若记$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$，则$\overline{\Omega}$由64个随机事件组成如下：不可能事件，共$C_6^0=1$个。

包含k个样本点的事件共C_6^k个，$k=1, 2, 3, 4, 5, 6$。

于是，总共事件数为$C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6$
$=(1+1)^6=2^6=64$

这样，任何一元素$A\in\overline{\Omega}$都表示一个事件。

§1—2 随机事件的运算

因事件是样本点的集合，故有集合一样的关系与运算。

（1）包含关系

若事件A发生必导致事件B发生，则称为事件B包含事件A，记为$B\supset A$（或$A\subset B$）．（图1—1（1））．

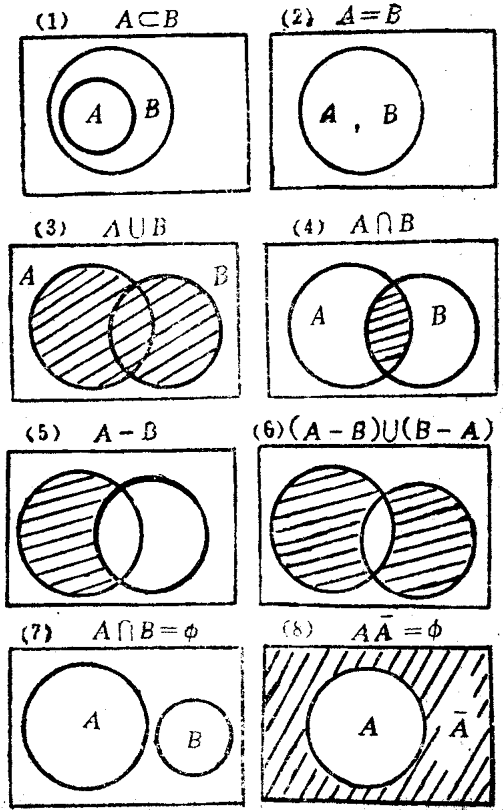

图1—1

例如在验收某一批园柱形产品时，A＝“直径不合格”必然导致B＝“产品不合格”，所以$A\subset B$

（2）相等关系

若事件A发生必导致事件B发生，反之，若事件B发生必导致事件A发生，即$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与事件B相等，记为$A=B$（图1—1（2））。

例如A＝“产品的直径与高度均合格”，B＝“产品尺寸合格”，有$A=B$。

（3）事件的并（或称和）

事件A与事件B至少有一个发生的事件称为事件A与B之并（或和），记为$A\cup B$或（$A+B$），（图1—2（3））。

例如在上面的例子中，A＝“直径不合格”，B＝“高度不合格”，C＝“产品不合格”，则$C=A\cup B$，表示“产品不合格＝“直径与高度至少一个不合格”。

（4）事件的交（或称积）

事件A与事件B同时发生的事件，称为事件A与B的交（或积）记为$A\cap B$（或AB），（图1—1（4））。

例如，若A＝“直径合格”，B＝“高度合格”，则$A\cap B$表示“产品合格”＝“直径与高度都合格”。

（5）事件的差

事件A发生而事件B不发生的事件称为事件A与B的差，记为$A-B$，（图1—2（5））。

例如，若A＝“直径合格”，B＝“高度不合格”，则$A-B$表示“产品合格”。

*（6）事件的对称差

事件（$A-B$）$\cup$（$B-A$）称为A与B的对称差，记为

$A\Delta B$，即$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$，图1—1（6）。

例如事件"产品不合格但直径合格或高度合格"是事件"直径合格"与"高度合格"的对称差。

（7）互不相容关系

事件A发生导致事件B不发生（或B发生导致A不发生）的事件A与B，称为互不相容事件。这等价于$A\cap B=\phi$（图1—1（7））。

例如在0，1，2，…，9这十个数字中任取一个数字，"取得0"与"取得1"就是两个互不相容事件。

（8）互逆事件（对立事件）

表示A不发生的事件，称为A的逆事件，记为$\overline{A}$，（图1—1（8））。

例如事件"产品合格"与"产品不合格"互为逆事件，"高度合格"与"高度不合格"互为逆事件；在0，1，2，……，9这十个数字中任取一个，"取得1"与"取得0，2，3……，9"互为逆事件。

以上关于两个事件的关系和运算可推广到多个甚至可列个事件上去。例如：

对于可列个事件A_1，A_2，…，A_k…定义它们的并为：

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\ (\text{或}\ A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots)$$

它表示事件A_1，A_2，…，A_k…中至少有一个发生。

定义它们的交为：

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\ (\text{或}A_1A_2\cdots A_k\cdots)$$

它表示事件A_1，A_2，…，A_k，…同时发生。

某车站有10股道，事件A＝“在某时核t，列车道 空闲”便是A_i＝“某时刻t，第i股道空闲”（$i=1, 2, \cdots, 10$）这十个事件的交；事件B＝“某隧道在某天通过 的 列车数不超过100列“便是事件B_i＝“该隧道在这一天通过列车数为i列”，$i=0, 1, 2, \cdots, 100$这101个事件的并。

事件的运算和集合的运算有同样的性质。

性质1　若$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$。表示 若A发生导致B发生且B发生导致C发生，则A发生导致C发生。

性质2　$\overline{\overline{A}} = A$，$A \cap \overline{A} = \phi$，$A + \overline{A} = \Omega$。分别表示一个事件的逆事件的逆就是这个事件本身，一个事件和它的逆事件是互不相容事件，一个事件与它的逆事件之和就是样本空间。

性质3　$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$，表 明两 事件的并与交满足交换律。

性质4　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(AB)C = A(BC)$，表明事件的并与交满足结合律。

性质5　$(A \cup B)C = AC \cup BC$；

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$，

$(A - B)C = AC - BC$

表明事件的并与交满足分配律。

性质6　对偶法则（亦称摩根律）

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

这些 性质 完全 可以从集合的类似运算性质得到验证。当然，每一性质实际上都可以直接从事件的运算的实际意义得到证明。

我们仅证明对偶法则如下：

要证明 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 必须证明 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ 且 $\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cap\overline{B}$。由逆事件的定义，若 $\overline{A\cup B}$ 发生，则 $A\cup B$ 不发生，由事件并的定义知，A与B都不发生 或者说 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都发生，即 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，因此 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$；反之，设 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 同时发生或者说A与B都不发生，因此 $A\cup B$ 不发生，即 $\overline{A\cup B}$ 发生。于是 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$，所以有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

类似地可以证明 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

§1—3　随机事件的概率

我们已知道，随机事件就是在一定条件下可能发生也可能不发生的事件。我们关心的是某一随机事件发生的可能性大小。有的随机事件发生的可能性大，有的随机事件发生的可能性小。我们希望用一个数来表示随机事件发生的可能性大小。这个数就是所谓随机事件的概率，一般用 $P(A)$ 表示，其中A表示任意给定的事件。

我们总是规定必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为零，则任意随机事件的概率就用一个介于 0 与 1 之间的数来表示，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

我们可将概率看成为事件域 $\overline{\Omega}$ 到单位区间〔0，1〕上的一个映射（图 1—2）。

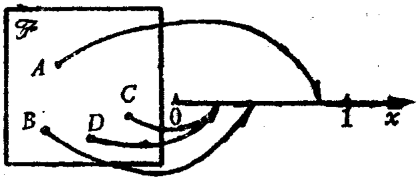

图1—2

我们常说这事件“十之八九要发生”，就是说它发生的概率为0.8～0.9，发生的可能性大。我们说这事件成功的希望只有百分之一二。就是说它成功的概率为0.01～0.02，即成功的可能性小。

我们自然要问：事件的概率怎样确定？一般说来，它是对随机事件做了大量观察或试验后确定的。事实上，对于一次观测或试验，事件发生是随机的，但在相同条件下经过大量的重复试验或观测，某事件发生的情况就呈现出一定的规律性。例如一开始，我们曾提到的抛硬币这个随机试验。我们抛掷不同次数（例如5次、50次、500次），观察正面出现的情况如下表：

实验序号	连续抛5次出现正面次数	连续抛50次出现正面次数	连续抛500次出现正面次数
1	2	22	251
2	3	25	249
3	1	21	256
4	5	25	253
5	1	24	251
6	2	21	246
7	4	18	244
8	2	24	258
9	3	27	262
10	3	31	247

分析上表可以看到一种趋势：随着抛硬币次数增加，出现正面的次数几乎趋向于一个稳定值，即占连续抛掷总次数的一半。我们将出现正面的次数n_A除以总次数n，得比值