高等物理大地测量学

[奥] 赫尔墨特·莫 著

测绘出版社

ADVANCED PHYSICAL GEODESY

[奥] 赫尔墨特 莫里兹 著

高等物理大地测量学

宁津生 管泽霖等 译

陈 俊 勇 校

内 容 提 要

本书共分四部分，第一部分主要阐述地球重力场的基础知识和球函数级数的收敛性问题，并简单介绍了线性算子和泛函的概念；第二部分是论述最小二乘配置的基本方法，从最简单的没有偶然误差和系统影响的纯配置到它的一般模型都作了详细的讨论；第三部分是阐述最小二乘配置的数学理论，根据泛函概念深入研究最小二乘配置的数学本质；第四部分是讨论大地测量边值问题，主要论述莫洛金斯基、布洛瓦尔等人提出的级数解以及赫尔曼德尔、克拉鲁普和桑索等人对解的存在性和唯一性所进行的数学研究。

本书可供大地测量、地球物理等专业的科技人员以及有关院校专业的师生参考。

高等物理大地测量学

［奥］赫尔墨特·莫里兹 著

宁津生 管泽霖等 译

陈 俊 勇 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 20 3/4·字数 479 千字

1984 年11月第一版·1984年11月第一次印刷

印数1— 3,000 册·定价4.25元

统一书号：15039·新 345

译 者 的 话

本书是奥地利格拉茨工业大学的莫里兹（H.Moritz）教授为大地测量专业研究生编写的一本教科书，它可以说是1967年出版的《物理大地测量学》（W.A.Heiskanen and H.Moritz，Physical Geodesy，1967；本书中译本已于1979年9月出版）一书的续集。在本书中作者在《物理大地测量学》一书的基础上比较集中地阐述了近年来物理大地测量的新理论和新方法，因此它对测绘和其他有关学科的工作者研究物理大地测量问题具有很好的参考价值。

本书的翻译工作主要由宁津生、管泽霖两同志负责，参加翻译的还有李堃、吴家让、刘彩璋、董挹英、范良季、朱才连、向虎雏、李征航、张宝庭、陈春明、赵武坚、黄加纳、管铮、潘明等同志。

译 者

1982.4.

原　序

物理大地测量所研究的是地球引力场及地球形状。自从海斯卡宁（W.A.Heiskanen）和本书作者于1967年出版了《物理大地测量学》一书以来的十余年内，这门学科已有了巨大的进展。本书几乎完全是为这些新的进展而编写的，但是，即使如此，本书仍不能全面反映这些进展。首先，本书虽力图系统地，并从数学的角度叙述问题。但不可能把有关的数学理论全部包括进去。至于物理大地测量的观测方法和它的数值结果方面也没有作讨论，只是为了实用目的，本书中讨论和研究了一些有关的数学方法。

其次，我们为了将本书限制在一定的篇幅内，即使对物理大地测量本身的理论也作了筛选。最小二乘配置是综合不同类型的观测数据最佳地确定地球形状及引力场的一种方法，本书对它进行了比较广泛的论述。第二部分是基本方法的阐述，这对于大多数实际应用是够了。而第三部分则介绍了数学理论，它是深入理解问题所必需的。第四部分是讨论大地测量边值问题，即莫洛金斯基（Molodensky）问题，但只限于两个主要题目：一个是莫洛金斯基、布洛瓦尔（Brovar）和其他人提出的边值的级数解；这些解看来对于实际应用是很方便的，另一个是关于边值解的存在性和唯一性的数学研究。本书只介绍赫尔曼德尔（Hörmander）、克拉鲁普（Krarup）和桑索（Sansō）等在这方面的研究成果。

本书只限于论述所谓的《经典物理大地测量》，即将地球形状及其引力场两者均看成是与时间无关的。这对于很高的精度（差不多到10^{-7}）是正确的，而且对于目前大多数实际应用来说也是足够的。但是对于更高的精度，则必须考虑地球动力（时间相关）效应的微小改正。

这种论述方法看来对于实用目的和教学目的是最好的，而且也几乎是至今唯一采取的一种办法。因此，本书也采用这一论述方法，即不是从一开始就以与时间变化有关的方式，即四维的来定义观测方程和边值问题。

要充分地论述地球动力效应问题，则需要有专门的第五部分。由于本书对这个问题仅仅作了最概略的讨论，所以只将它放在第55节里就可以了。

作者还感到婉惜的是未能将重力场微分结构的论述包括进来。当然这也是由于篇幅所限的缘故。但是，霍丁（Hotine，1969）的书为后来的在大量文献中的研究提供了很好的基础。

要理解本书的内容，则需要物理大地测量的基本知识。为了统一起见，我们采用海斯卡宁的书（Heiskanen and Moritz，1967）作为基本参考书。但是其他象格罗顿（Groten，1979），莱特史德格尔（Ledersteger，1969），勒瓦罗阿（Levallois，1970），马格尼茨基（Magnizki等，1964），佩利年（Pellinen，1978），皮克（Pick等，1973），雪比列夫（Shimbirev，1975），或者托尔革（Torge，1975）等书也同样提供了有用的基础知识。

本书是为大地测量和重力方面的研究生和研究工作者而编写的。它不是数学教材。本书目的在于对问题有直观的理解，而不是追求它们的完全抽象的严密性。作者是以一种“最少的原则”作为本书写作指导的：即以相应的最少的数学知识来论述问题。当然有些地方还是需要很高深的数学，关于这些数学问题在第一部分里作了简要的介绍。本书自始至终都在文字上提供充分的有时是重复的解释，因为在公式之后说明数学和物理意义与公式本身是同样重要的。此外，公式的推导一般也是十分详细的。

我们力求采用清晰统一的而不是故弄玄虚的符号。在需要避免混淆的地方，向量和矩阵的符号就用下面带一横的字母来表示，否则就采用通常的字母来表示它们。同样，行和列向量只有在涉及到矩阵运算的地方才予以区分。

书后的二百多篇参考文献只是作为读者的向导，而不是全面的资料介绍。毫无疑问，由于作者的疏忽或学识浅薄，定有许多重要的文献被遗漏了。对于那些感到自己的著作在本书中未能得以充分介绍的同事们，作者谨致以歉意。

几乎近二十年来作者和俄亥俄州立大学大地测量系的合作，给予作者的研究工作以非常宝贵的影响，特别是对于和拉普（Rapp）博士，萨保（Szabō）先生和沃铁拉（Utila）博士的讨论，以及沃铁拉博士允许作者引用大地测量系的科研报告资料，作者在此表示谢意。

感谢大地测量科学公报（Bollettino di Geodesiae Scieuze Affini）和德国大地测量委员会书刊出版的编辑，承蒙同意引用在他们那里发表的某些资料。

对于阿斯特里德·芬克-格拉德布（Fink-Gradl）夫人为本书辛勤地准备了适合于直接印制的打字稿和在语言问题上提出的意见，对于劳勃特·格莱特斯莱革（Robert Geretschläger）先生正确地绘制图表，以及对他和汉斯·孙卡尔（Hans Sünkel）博士帮助校对，作者特别致以谢意。

赫尔墨特·莫里兹

1979.11，于奥地利，格拉茨

目　录

第一部分

基础知识

这一引言部分主要是为学习本书提供大地测量学的和数学的基础知识。从1到3节是复习地球重力场理论的必要知识，其中包括球函数等。由于书中自始至终都应用了泛函分析的基本概念，例如线性算子和泛函，所以4和5节对这些问题作了简单的介绍，但这是考虑为大地测量学家而不是为数学家而写的。

后几节的内容比较深。第6节对地球外部引力位球函数展开式在地球表面上的收敛性这一难题进行了讨论。在第7节中从实用角度出发应用龙格（Runge）定理对这个问题提出了新的观点。第8节给出了龙格定理的证明，该节比前面几节要求更多的数学知识。

读者可以从1到3节开始复习物理大地测量的基本知识和熟悉术语。如果你对实用比对理论更感兴趣的话，那么可以跳过4至8节而直接阅读本书第二部分。

为了学习第三和第四部分第4和5节的内容是必不可少的。需要时可学习龙格定理（第8节），它的证明（第46页以后）可不看。第6和7节也可以放到需要时再读。

1. 地球重力场

本书大体上是按照（Heiskanen and Moritz，1967）一书的内容，特别是按该书的1-1节和2-1到2-4节来复习地球重力场的基本性质及其有关的各种坐标系。

作为基础的地固直角坐标系 XYZ 通常是这样定义的：原点在地球质心（地心）上；Z 轴与地球的平均自转轴重合；X 轴位于平均格林尼治子午面内，且与 Z 轴正交；Y 轴垂直于 XZ 平面，其指向是使 XYZ 成为右手坐标系，因而 XY 平面就是（平均）赤道面。

考虑到瞬时自转轴多少有点微小的周期变化以及地球体的变形，我们采用平均自转轴和平均格林尼治子午面，以便得到一个与时间无关的定义（参阅55节）。

引力位 V 可由下式表示

$$V(P)=V(x,\ y,\ z)=G\iiint\limits_{\text{地球}}\frac{\rho(Q)}{l}dv_Q, \tag{1-1}$$

式中 P 是坐标为（x，y，z）的点；Q 是地球体内的流动点，它是体元 dv_Q 的中心。l 是 P 和 Q 间的距离；ρ（Q）是 Q 点处的质量密度；G 是牛顿引力常数

$$G=6.672\times10^{-11}\mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}. \tag{1-2}$$

积分范围是整个地球，其中包括固体部分和液体部分。大气的影响很小，通常忽略不计；必要时可考虑对上述积分结果进行改正，其改正的相对量级约为 10^{-6}。对于 V 的瞬

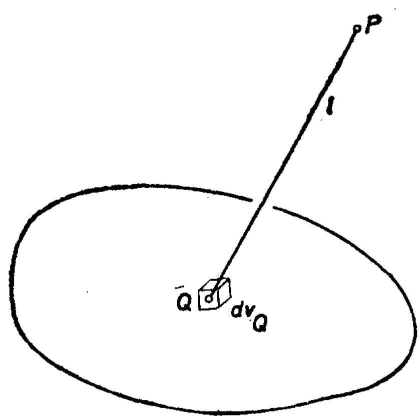

图 1-1 (1-1) 式的说明

时变化，可以按同样办法处理，这种变化的量级约为 10^{-7}（参阅 49 和 55 节）。除非另作说明，我们总是把地球当作一个没有瞬时变化和没有大气的刚体。

即使如此，(1-1) 式还只是具有理论上的意义，因为实际应用它时需要详细地知道地球内部的密度分布，但显然这是不知道的。

对于长距离

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

(1-1) 式可以表示为

$$V=\frac{GM}{r}+0\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad 当\ r\to\infty. \tag{1-3}$$

M表示物体的总质量；$0\left(\frac{1}{r^2}\right)$表示当 $r\to\infty$时，按$\frac{1}{r^2}$的量级趋近于零的那一项。这个方程式的物理意义是，在长距离的情况下任何物体的引力作用和一个质点的引力作用是近似一样的。

重力位W是V与离心力位

$$V_c=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \tag{1-4}$$

之和，所以

$$W(x,\ y,\ z)=V(x,\ y,\ z)+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2), \tag{1-5}$$

ω 是地球自转角速度（将它当作常数）。

位V的场称为引力场，位W的场称为重力场。

重力向量 g是W的梯度

$$g=\operatorname{grad} W=\begin{bmatrix}W_x\\W_y\\W_z\end{bmatrix};\tag{1-6}$$

它的分量是W对x，y，z的偏导数，并且是引力（grad V）和离心力的合力。

V的二阶偏导数构成一个对称矩阵

$$\begin{bmatrix}V_{xx}&V_{xy}&V_{xz}\\V_{yx}&V_{yy}&V_{yz}\\V_{zx}&V_{zy}&V_{zz}\end{bmatrix},\tag{1-7}$$

这个矩阵称为（二阶）引力梯度张量。同样，W的二阶偏导数构成重力梯度张量。

矩阵（1-7）式的迹是V的拉普拉斯（Laplace）算子

$$\Delta V=V_{xx}+V_{yy}+V_{zz},\tag{1-8}$$

在吸引质量外部，即在地球表面S以上，V满足拉普拉斯方程

$$\Delta V=0;\tag{1-9}$$

该方程的解称为调和函数。在地球内部，即在地球表面S之内，位V满足布阿桑（Poisson）方程

$$\Delta V=-4\pi G\rho,\tag{1-10}$$

ΔV和ρ属于S内部的同一点。

顾及（1-4）式，重力位W的相应关系式为：

$$\Delta W=2\omega^2 \qquad 在S外部,\tag{1-11}$$

$$\Delta W=-4\pi G\rho+2\omega^2 \qquad 在S内部。\tag{1-12}$$

重力向量$\underline{g}$的数值或范数是重力g：

$$g=\|\underline{g}\|;\tag{1-13}$$

$\underline{g}$的方向是垂直方向或铅垂线方向，以单位向量表示为

$$\underline{n}=-g^{-1}\underline{g},\tag{1-14}$$

由于我们选定了负号，所以$\underline{n}$指向上方。

在XYZ基本坐标系中，向量$\underline{n}$的分量可以用两个角度Φ和Λ表示为

$$\underline{n}=\begin{bmatrix}\cos\Phi\ \cos\Lambda\\\cos\Phi\ \sin\Lambda\\\sin\Phi\end{bmatrix}.\tag{1-15}$$

以这样方式定义的两个角称为天文坐标：天文纬度Φ和天文经度Λ。

图1-2是通过以测站点P为球心的单位球来说明天文坐标Φ和Λ。符号$\|X$，$\|Y$，$\|Z$表示通过P点且平行于坐标轴。球与平面（$\|X$，$\|Y$）和（$\|X$，$\|Z$）的交线分别是赤道和零子午圈。P点的垂线与球相交于天顶Z，向量PZ就是单位向量$\underline{n}$。坐标Φ和Λ可以用角度或单位球上的弧长来表示。

W=常数的面称为等位面或水准面，它们处处垂直于重力向量，即与垂线正交。在这些水准面中有一个特殊的水准面，它与平均海洋面基本符合一致，它的重力位为

$$W(x,\ y,\ z)=W_0=常数\tag{1-16}$$

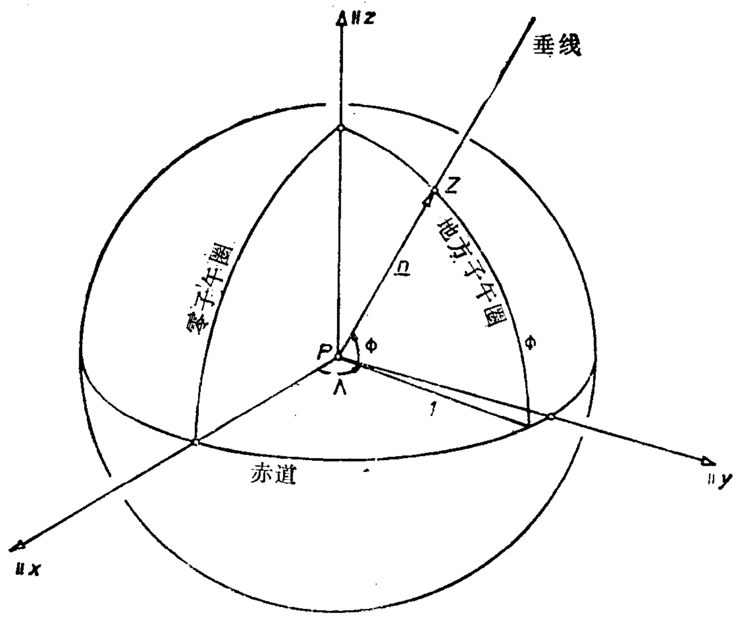

图 1-2　单位球上的天文纬度Φ和经度Λ

这一特殊水准面称为大地水准面，以示与其它水准面相区别。

与水准面正交的点的轨迹称为力线。在力线上的任一点的切线就是重力向量$\underline{g}$的方向，或者说是铅垂线的方向。有时将稍有弯曲的力线本身就当作是铅垂线，一般来说这不会产生混淆。

令P是可见的地球表面上的一点。可见的地球表面称为地球自然表面。通过P点的力线交大地水准面于P_0点，铅垂线段P_0P（稍有弯曲）的长度就是正高H。

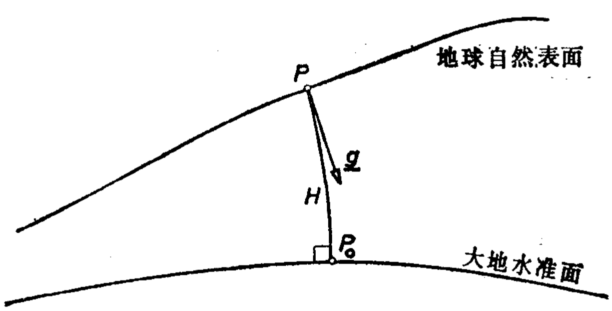

图 1-3　正高H

三重数组（Φ，Λ，H）称为P点的自然坐标，它们构成一个由重力场定义的曲线坐标系。

自然坐标的另一个定义是三重数值（Φ，Λ，W）。因为P的位W也可以认为是度量

P 点高度的一个物理量。这是很明显的，因为我们只要看一下大地位数

$$C = W_0 - W, \tag{1-17}$$

就很容易地把它与H联系起来，而且在概念上较为简单明瞭。

最后应当指出，物理大地测量几乎只涉及到大地水准面上及其外部的重力场。我们特别感兴趣的是地球表面外部的引力场，此时位V是调和函数。

2. 参考椭球和异常重力场

本节还是复习，它概括了一些基本知识，例如在（Heiskanen and Moritz，1967）一书中第二章和第五章所详述的内容。

大地坐标 如果我们以一个椭球面代替大地水准面，那么自然坐标Φ，Λ，H就被大地坐标φ，λ，h所代替。大地坐标是按下述方法来定义的（图 2-1）。

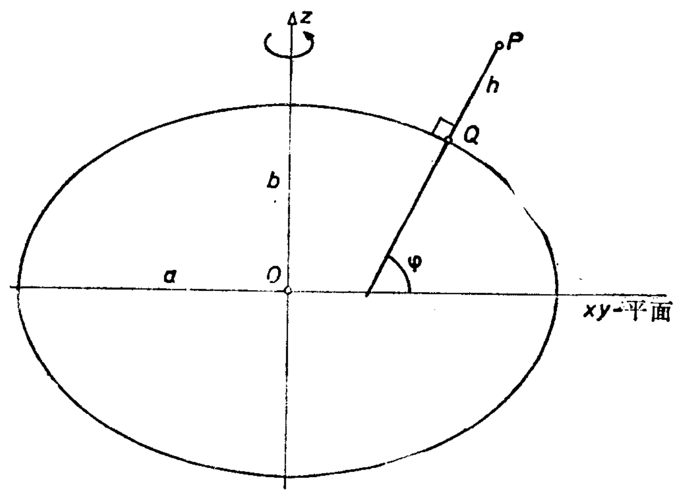

图 2-1 参考椭球与大地坐标

将一个半轴为a和b的椭球围绕短半轴旋转，就得到一个旋转椭球，将其中心置于地心上，使短半轴与Z轴重合。将空间点P沿垂直于椭球面的法线（直线）投影到椭球面上，得到Q点，直线段QP为**大地高h**。足点Q的椭球地理坐标就是P点的**大地纬度**φ和**大地经度**λ。更确切的说，φ是椭球面法线与赤道面（即XY平面）的交角，λ是P点的子午面（该平面通过P点和Z轴）与零子午面（即XZ平面）的夹角。

坐标系（φ，λ，h）与坐标系（x，y，z）之间的关系为一封闭公式：

$$\begin{aligned} x &= (\nu + h)\cos\varphi\cos\lambda, \\ y &= (\nu + h)\cos\varphi\sin\lambda, \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2}\nu + h\right)\sin\varphi, \end{aligned} \tag{2-1}$$

式中

$$\nu=\frac{c}{\sqrt{1+e'^2\cos^2\varphi}}, \tag{2-2}$$

$$c=\frac{a^2}{b}, \tag{2-3}$$

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}; \tag{2-4}$$

ν 是椭球面的卯酉圈曲率半径，c 是极曲率半径，而 e' 称为第二偏心率。

铅垂线和椭球面法线之间的偏差是以两个小角 ξ、η，即垂线偏差分量来表示的，如图 2-2 所示。（天文的）天顶 Z 是垂线的球面象点，具有球面坐标 Φ 和 Λ，如图 1-2 所示。大地天顶 Z' 是椭球面法线的象点，具有坐标 φ 和 λ。

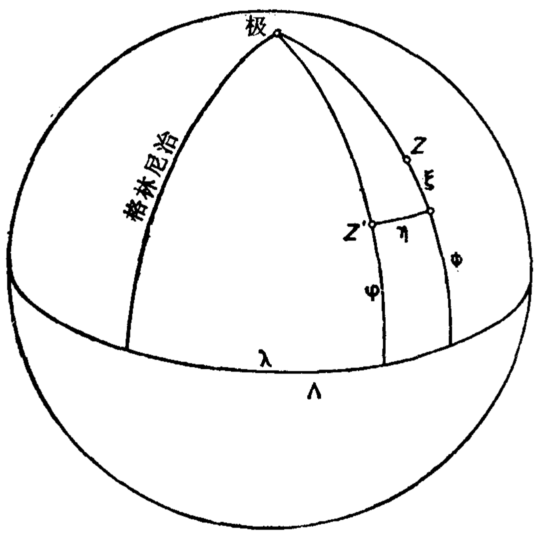

图 2-2　单位球上的垂线偏差

由图 2-2 直接得到

$$\begin{aligned}\xi&=\Phi-\varphi,\\ \eta&=(\Lambda-\lambda)\cos\varphi.\end{aligned} \tag{2-5}$$

同样，在图 2-3 中 N 可足够精度地表示为**大地水准面高度**，则有

$$N=h-H. \tag{2-6}$$

（2-5）和（2-6）式通过垂线偏差和大地水准面高度将大地坐标与自然坐标相联系。

正常重力场　椭球面可以看成是大地水准面的某一"正常面"：经过适当选择的一个旋转椭球面，它非常近似于大地水准面，并代表大地水准面的全球形状(大地水准面与这样一个最适合的椭球面最大偏差仅为 100m 左右!)。所以把一个旋转椭球面的外部重力位当作**正常重力位** U 来近似地表示地球的外部重力位 W，也就是很自然的。

因为大地水准面

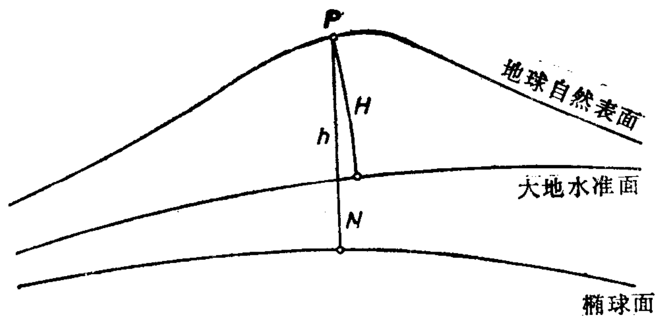

图 2-3　大地水准面高度

$$W(x,\ y,\ z)=W_0=\text{常数} \tag{2-7}$$

是W的等位面，显然要求椭球面也是一个U的等位面

$$U(x,\ y,\ z)=U_0=\text{常数}, \tag{2-8}$$

所以这一给定的椭球面就成为一个等位椭球面，或称水准椭球面。此外，U必定是正常引力位$\overline{V}$和离心力位的和

$$U(x,\ y,\ z)=\overline{V}\ (x,\ y,\ z)+\frac{1}{2}\ \omega^2(x^2+y^2), \tag{2-9}$$

在椭球面外部$\overline{V}$必须满足拉普拉斯方程

$$\Delta\overline{V}=0, \tag{2-10}$$

而$\overline{V}$在无穷远处的性质可近似地看作为一个质点所产生的引力位的性质

$$\overline{V}=\frac{G\overline{M}}{r}+0\left(\frac{1}{r^2}\right)\qquad \text{当}\ r\to\infty, \tag{2-11}$$

$\overline{M}$表示椭球所包含的总质量。这些方程式分别相应于(1-5)，(1-9)和(1-3)式。

可以证明，只要给出下列数值：

$$\begin{aligned} a,\ b &\text{——椭球半轴,}\\ \omega &\text{——旋转角速度,}\\ U_0 &\text{——椭球面上的正常位,}\end{aligned} \tag{2-12}$$

或者给出其它四个适当的常数，再以（2-8）式为前提，并和固有条件(2-9)、（2-10）和（2-11）式一起就可完全单值地确定正常重力位U。

然而用这样方法确定的函数U是以封闭公式来表示的，它涉及到一些新的符号，本书不予采用，所以在此不写出这个公式，而只指出几个附带关系。读者要详细了解可参阅（Heiskanen and Moritz，1967，2-7节到2-9节）。

椭球的质量表示为

$$G\overline{M}=\frac{E}{\operatorname{arctg}e'}\left(U_0-\frac{1}{3}\omega^2a^2\right), \tag{2-13}$$

式中

$$E=\sqrt{a^2-b^2} \tag{2-14}$$

是线性偏心率，而

$$e'=\frac{E}{b} \tag{2-15}$$

是在（2-4）式中已遇到过的椭球的第二偏心率。

在椭球面上的*正常重力* γ 可由素米里安（Somigliana）公式得出

$$\gamma=\frac{a\gamma_a\cos^2\varphi+b\gamma_b\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}, \tag{2-16}$$

式中 φ 是大地纬度。在赤道上的正常重力值 γ_a 和在极点的正常重力 γ_b 由下式给出

$$\gamma_a=\frac{G\overline{M}}{ab}\left(1-m-\frac{me'q_0'}{6q_0}\right),$$

(2-17)

$$\gamma_b=\frac{G\overline{M}}{a^2}\left(1+\frac{me'q_0'}{3q_0}\right),$$

式中

$$m=\frac{\omega^2a^2b}{G\overline{M}}, \tag{2-18}$$

$$q_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{e'^2}\right)\operatorname{arctg}e'-\frac{3}{2e'}, \tag{2-19}$$

$$q_0'=3\left(1+\frac{1}{e'^2}\right)\left(1-\frac{1}{e'}\operatorname{arctg}e'\right)-1. \tag{2-20}$$

为了以后应用还需要 J_2，即

$$J_2=\frac{C-A}{\overline{M}a^2}, \tag{2-21}$$

式中 A 和 C 是旋转椭球的主惯性矩：A 是对 X（或 Y）轴的惯性矩；C 是对 Z 轴的惯性矩。对于水准椭球来说，J_2 称为*动力形状因子*，它的表达式为

$$J_2=\frac{1}{3}e^2\left(1-\frac{2me'}{15q_0}\right) \tag{2-22}$$

（Heiskanen and Moritz，1967，中译本 53 页），式中

$$e=\frac{E}{a} \tag{2-23}$$

是第一偏心率。

读者应当注意，实际上所有这些量都可以用四个常数（2-12）式来表示。

异常重力场 正常重力位 U 是大地水准面外部实际重力位 W 的好的第一次逼近值。差值

$$T=W-U \tag{2-24}$$

称为异常位，或扰动位，它是微小值。假设在（1-11）式和U的相应公式中ω相同，则由它们之差就得出：在地球外部T是调和函数，满足拉普拉斯方程

$$\Delta T=0. \tag{2-25}$$

写出

$$W=U+T, \tag{2-26}$$

我们可以看出，重力场（位W）被分成为正常场（位U）和异常场(位T)。这样的分解有很大的实用价值，因为由U表示的主项可按封闭（即与椭球有关的）公式求得，而由T表示的余项虽不规则但很小，因而在实际中采用线性逼近已足够了。

现在我们对分别属于大地水准面和参考椭球面的各个量论证其有关分解和线性公式的原理(图 2-4)。

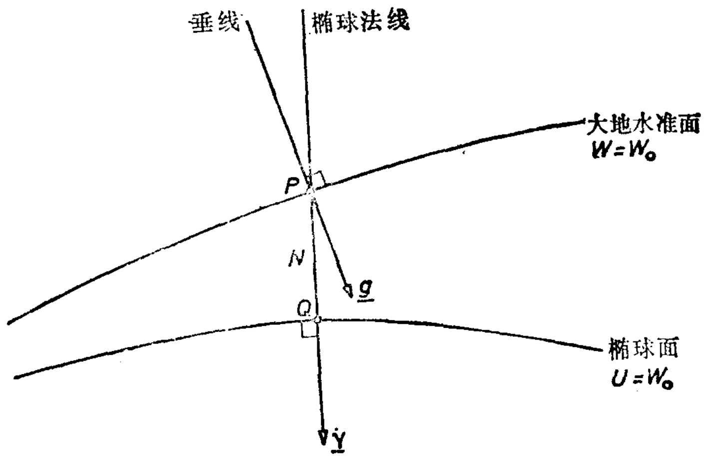

图 2-4　大地水准面和参考椭球面

将大地水准面上的P点沿椭球面法线投影到椭球面上，借此就可以把大地水准面上的任一点P与椭球面相应点Q联系起来。距离PQ就是前面已经介绍过的大地水准面高度N。Q点的正常重力向量为$\underline{\gamma}$，

而

$$\underline{\gamma}=(\mathrm{grad}\,U)_Q, \tag{2-27}$$

可看成是P点的重力向量$\underline{g}$的“正常”部分，

$$\underline{g}=(\mathrm{grad}\,W)_P. \tag{2-28}$$

此两向量的模g和γ之差称为重力异常

$$\Delta g=g-\gamma. \tag{2-29}$$

应当注意，重力g属于P点，而正常重力γ属于Q点。另一方面，在（2-24）式中W和U都属于同一点：或者同属于P，或者同属于Q。

(2-5)、(2-6)、（2-24）和（2-29）式都有着同样的结构：异常重力场的量（T，N，Δg，ξ，η）是通过实际场的量（W，H，g，Φ，Λ）和它们对应的正常的或椭球的量（U，h，γ，φ，λ）之差来表示的。