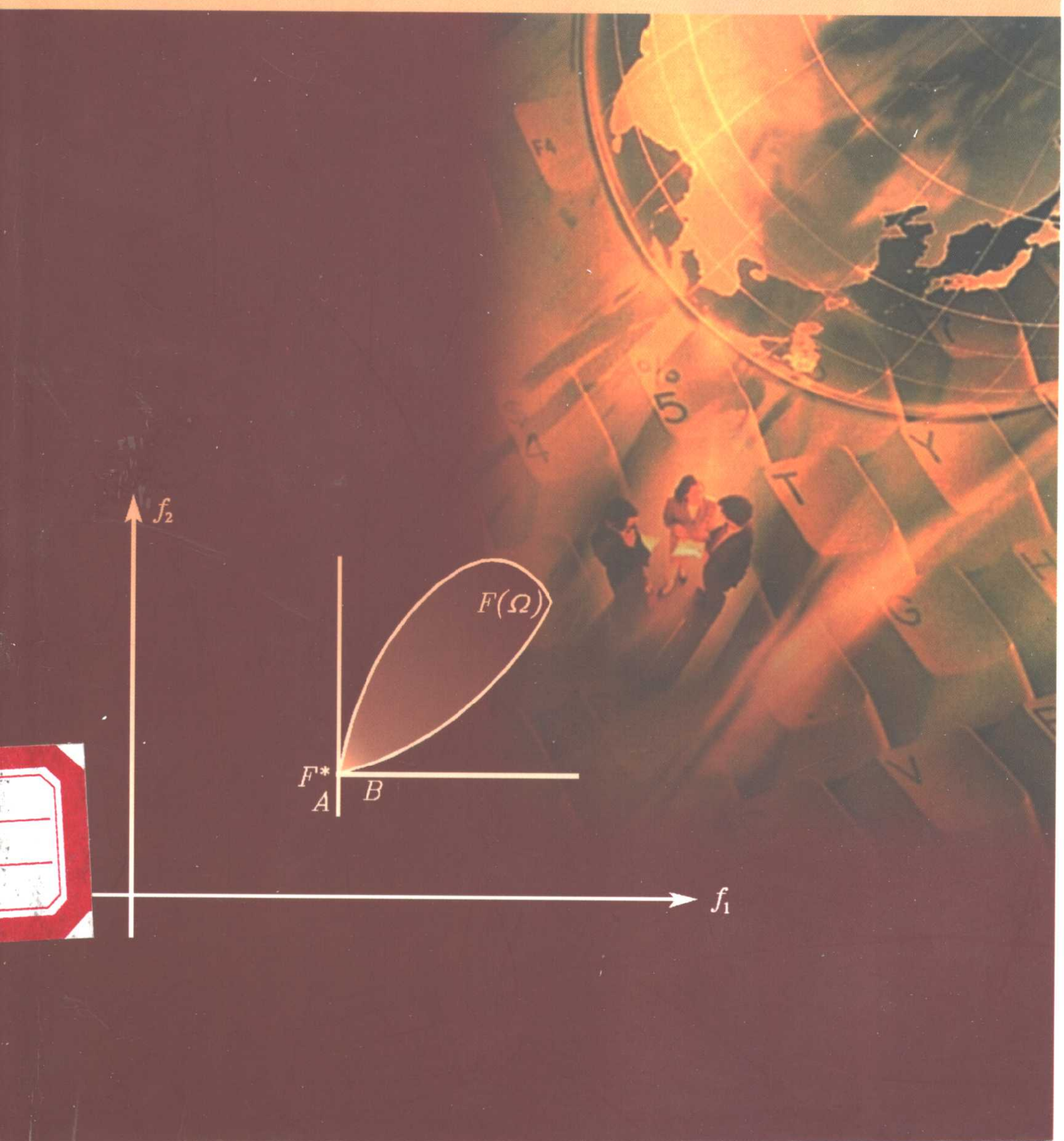
信息管理与信息系统专业系列教材

运筹学（一）

钱渝　主编



科学出版社

信息管理与信息系统专业系列教材

运 筹 学（一）

钱 渝 主编

科 学 出 版 社

2000

内 容 简 介

近20年来，运筹学走向更实用性、模型化方法与信息技术密切结合的新路子，开发出了许多包含经典运筹学的数学模型的软件包。本书以数学规划为中心，将数学、计算机和经济管理有机地结合起来，讲述了运筹学的基本方法、基本数学模型和实用算法。尤其在实例中加强了多目标规划的内容，并引进了新兴的模糊规划的概念和基本方法，以求为信息管理和国民经济建设服务。

本书可供大专院校有关专业的师生作教材，亦可供信息管理和相关专业的技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学(一)/钱渝主编.-北京:科学出版社,2000
（信息管理与信息系统专业系列教材）
ISBN 7-03-006946-3

Ⅰ.运… Ⅱ.钱… Ⅲ.数学-运筹 Ⅳ.TP.022

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第71275号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
北京双青印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
2000年6月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2000年6月第一次印刷 印张：15
印数：1—4 000 字数：339 000

定价：20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

总　序

中南财经大学是财政部直属的一所以经济学科、管理学科为主，兼有法学、文学、哲学、理学等6个一级学科的，具有50年历史的高等学校。中南财经大学经济信息管理系始建于1978年，1980年开始招收本科生，是继中国人民大学之后在全国高校第二个建立信息管理专业的系，并于1990年，经国务院学位委员会批准建立信息经济硕士点，是全国首批设立的该专业4个硕士点之一。

改革开放20年，正是信息管理与信息系统专业不断建设成长的20年。中南财经大学信息系经过不断的探索和建设，在教学研究、师资队伍建设、教材建设、实验室建设及教学管理等方面均打下了良好的基础。

在专业发展和教材建设中，我们遵循教育必须为社会主义建设服务和必须面向现代化、面向世界、面向未来的要求，20年来，无论是专业目录调整前的管理信息系统专业，还是专业目录调整后的信息管理与信息系统专业，我们都努力在专业建设的深度以及市场经济建设的应用力度上下功夫，力求学生所学的专业知识在实际工作中能派上用场，在教学体系建设及教材建设中力求体现本专业的特色。经过20年艰苦奋斗与教学科研实践，中南财经大学信息管理与信息系统专业已经建立起规模适当，多层次多形式的办学体系；初步形成多学科有机结合，互相渗透的专业特色；建立了结构合理的教师队伍；具备了比较完善的办学条件；取得了一批先进水平的科研成果，为国家培养了大批受社会欢迎的信息管理专门人才。

为了建设一套有信息管理与信息系统专业特色的教材，我们长期以来在加强基础、拓宽知识面、增强适应性、建立主动适应社会主义建设需要和适应现代科学技术、文化发展趋势的教学内容以及课程结构等方面搜集了大量的素材和案例，特别是在理论联系实际，面向经济建设主战场，强化学生的动手能力，结合最新的科技发展以及在教材中融进各位教师的研究成果上花了不少的精力。1998年我们按照教育部公布调整后的新专业目录，组织了两个小组到兄弟学校调查研究，进行了多次座谈和研讨，进一步明确**了信息管理与信息系统专业的性质是以系统的方法、现代信息处理技术来研究人类管理活动规律及其应用的学科**。它融合了管理学、经济学、计算机科学与技术等学科的知识，以系统观点为指导，运用定性与定量结合的方法及相关学科的研究手段，深入研究并有效地解决社会中各类信息管理问题。本专业的目标是：培养具备现代管理学理论基础、计算机科学技术知识及应用能力，掌握系统思想和信息系统分析与设计方法以及信息管理等方面的知识与能力，能在国家各级管理部门、工商企业、金融机构、科研单位等部门从事信息管理以及信息系统分析、设计、实施管理和评价等方面的高级专门人才。本专业的培养要求是：学生主要学习经济、管理、数量分析方法、信息资源管理、计算机及信息系统方面的基本理论和基本知识，接受系统和设计方法以及信息管理方法的基本训练，具备综合运用所学知识去分析和解决问题的基本能力。本专业的毕业生应具备以下的知识和能力：（1）掌握信息管理和信息系统的基本理论、基本知识；（2）掌

握管理信息系统的分析方法、设计方法和实现技术；(3) 具有信息组织、分析研究、传播与开发利用的基本能力；(4) 具有综合运用所学知识分析和解决问题的基本能力；(5) 了解本专业相关领域的发展动态；(6) 掌握文献检索、资料查询、收集的基本方法，具有一定的科研和实际工作能力。

基于上述思想，我们修订了信息管理与信息系统专业教学计划，相应地修订了相关课程的教学大纲，组织人员编写出有信息管理与信息系统专业特色的教材，供教学之需。经反复讨论，确定出版 18 种图书作为信息管理与信息系统专业系列教材，即：该套丛书包括以下 18 种教材：

《计算机实用技术基础》
《离散数学》
《数据结构》
《数据库原理与设计》
《计算机网络》
《计算机操作系统》
《管理信息系统分析与设计》
《计算机组成原理》
《多媒体与信息管理》
《管理决策分析》
《信息管理学》
《应用数理统计》
《运筹学（一)》
《运筹学（二)》
《经济预测方法》
《高等数学》
《线性代数》
《语言程序设计》

本套教材得以顺利出版，得到了科学出版社的大力支持，我代表本套教材的各位编写人员向科学出版社表示由衷的感谢！

由于水平所限，在陆续出版的系列教材中错误难免。望读者不吝赐教，以资改进，在此一并致谢！

邱家武

1999 年元旦于中南财经大学

前　言

本书作为信息管理系列教材之一，以规划论为中心介绍运筹学。

二战前后产生的运筹学，由于受冯·诺依曼、康托洛维奇、勃拉凯特与莫尔斯等前辈研究风格奠基性的影响，该学科讲究用自然科学的方法与现代技术手段来研究和解决经济、军事与工程中的问题。提倡不拘门户，各学科间互相渗透、互相补充，以它山之石攻玉，故其发展一直呈现一派百花齐放、万水争流的风光。经过半个多世纪的发展，她已具有众多的分支、宽广的覆盖面，内容可谓相当丰富。由于该学科本身就是多学科交叉的产物，加之诸子百家各执其说，故时至今日，对究竟什么是运筹学、它的内容、意义与方法究竟如何，还一直处于仁者见仁、智者见智、尚难衷一是的状态。本书只希望从一个侧面反映该学科的学术思想和部分内容，反映现代运筹学将实事求是、审时度势、因势利导的建模观念，数学模型化的表现手法与借助计算机进行技术处理三者有机结合的特点，并针对信息管理专业、经济管理专业学生今后从事决策支持与决策分析的需要，介绍部分常用的数学模型框架与相应的常用算法。

本书是在总结我系 20 年来运筹学教学与科研的基础上，根据经济信息管理专业新的全程教学计划编写而成。编写中注意按少而精、由浅入深、理论联系实际的原则取材与编排。在叙述上注意与读者沟通，为便于教学与读者自学，注意了必要的详尽。

本书由周月梅编写第一章至第三章，郝建平编写第九章与第十一章，其余七章及统纂工作由钱渝完成。我们学识浅薄，虽竭力而为，错误缺点却在所难免，敬请指教。

感谢信息系全体同仁对本书出版的支持与帮助。

钱　渝　周月梅　郝建平

1999 年 12 月 7 日

目　录

第一章　线性规划问题及其数学模型

第一节　线性规划问题及其数学模型

线性规划是数学规划的一个主要分支。是一种特定的多元函数的条件极值问题。由于其数学结构简单,并有有效的计算方法,因此常常用它作为现实生活中某些最优化问题的数学模型。在这一节里,我们来看看线性规划的数学模型是怎样的一类模型,线性规划问题是怎样的一个数学问题。

先考虑下面两个实例。

【例 1.1】 设有甲、乙、丙、丁四种食品,其每一单位所含的 A,B,C 三种维生素的含量,每一单位的售价以及混合使用时必须达到的营养标准如下表:

表 1.1

维生素	营养单位	食品				需要量(至少)
		甲	乙	丙	丁	
A	国际单位	1000	1500	1750	3250	4000
B	毫克	0.6	0.27	0.68	0.3	1
C	毫克	17.5	7.5	0.9	1.5	30
食品单价(元)		0.8	0.5	0.9	1.5	

问如何搭配这四种食品,使其既满足规定的营养标准,相应的总费用又最低?

解　设 x_1,x_2,x_3,x_4 依次表示甲、乙、丙、丁四种食品的选用数量。则混合使用时,其维生素 A,B,C 的总含量依次为

$$\begin{gathered}1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4\\0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3x_4\\17.5x_1+7.5x_2+0.9x_3+1.5x_4\end{gathered}$$

相应的总费用为

$$Z=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4$$

为了达到营养标准并使总费用最低,可寻求 x_1,x_2,x_3,x_4 的一组值,使得在满足

$$\begin{gathered}1000x_1+1500x_2+1750x_3+3250x_4\geqslant 4000\\0.6x_1+0.27x_2+0.68x_3+0.3x_4\geqslant 1\\17.5x_1+7.5x_2+0.9x_3+1.5x_4\geqslant 30\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0\end{gathered}\tag{1}$$

的条件下

$$Z=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4$$

最小。

这里前三个不等式分别表示混合后，维生素 A,B,C 的含量达到营养标准，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0$ 表示四种食品的选用量必须是非负的。

一般地，设有包含 m 种营养成分的 n 种食品，其中第 j 种食品每单位所含的第 i 种营养成分为 a_{ij} 个营养单位，$(i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots,n)$。第 j 种食品的单位售价为 c_j，$(j=1,2,\cdots,n)$。为了达到正常营养标准，要求这 n 种食品中所含的第 i 种营养成分的总量不低于 b_i 个营养单位 $(i=1,2,\cdots,m)$。问怎样确定最经济的购置方案？

解　设 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为购置第 j 种食品的数量。上述问题可表为数学问题。即“求一组变数 $x_j,j=1,2,\cdots,n$ 的值，使函数

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$
$$=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

在满足

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0$$

的条件下最小”的数学问题。

这个实际问题叫做饮食问题，对应的数学问题是其数学模型。

【例 1.2】　设有两个砖厂 A_1,A_2，产量分别为 23 万块与 27 万块。现将其产品联合供应 B_1,B_2,B_3 三个工地。其需要量分别为 17 万块、18 万块和 15 万块。各产地到各工地的运价如下表：

表 1.2

运价(元/万块)　工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问如何调运才能使总运费最省。

解　设 x_{11} 表示砖厂 A_1 运至工地 B_1 的砖的数量，同理 $x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}$ 表示相应的砖厂运到相应的工地的砖的数量(单位万块)。则由 A_1,A_2 处的运出量分别为

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}$$

由各砖厂运入 B_1,B_2,B_3 处的数量分别为

$$x_{11}+x_{21}$$
$$x_{12}+x_{22}$$

$$x_{13} + x_{23}$$

总运费为

$$Z = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$$

因为总产量 23+27=50 与总需要量 17+18+15=50 相等(此时称为产销平衡),所以,各砖厂(发点)的全部产品应完全运出,各工地(收点)的需要可完全满足,即

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 23 \\ x_{31} + x_{22} + x_{23} &= 27 \\ x_{11} + x_{21} &= 17 \\ x_{12} + x_{22} &= 18 \\ x_{13} + x_{23} &= 15 \end{aligned}$$

于是,如何作总运费最低的调运问题可表为

求一组变数 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ 的值,使函数 $Z = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$ 在满足

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 27 \\ x_{11} + x_{21} &= 17 \\ x_{12} + x_{22} &= 18 \\ x_{13} + x_{23} &= 15 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

的条件下最小。

一般地,设有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 联合供应 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$,各产地的产量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$,各销地的销量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,由第 i 个产地到第 j 个销地的单位运费为 c_{ij},问如何调运才使总运费最省?

解 设 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n)$ 表示由第 i 个产地到第 j 个销地的调运量

(1)当产销平衡$\left(\text{即} \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$时,上述问题可表为求一组变数 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$的值,使函数

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

在满足

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i && (i = 1,2,\cdots,m) \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j && (j = 1,2,\cdots,n) \\ &x_{ij} \geqslant 0 && (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

的条件下最小。

(2)当产大于销$\left(\text{即} \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$时,可将(1)中约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

改为

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

以表示产地 A_i 的产量未必全部运出,其余与(1)同。

(3)当销大于产$\left(\text{即} \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$时,可将(1)中约束条件

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

改为

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_i \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

以表示销地 B_j 的销量未必全满足,其余与(1)同。

上述实际问题称为运输问题,其中(1)称为平衡运输问题,(2)与(3)称为不平衡运输问题。稍后可看出,不平衡运输问题均可化为平衡运输问题。因此,今后运输问题即指平衡运输问题。

以上两例虽然实际背景不同,但问题的提法以及问题的数学描述都是采用一种共同的观点,使用同一种数学模型。这种观点即最优化的观点,在这种观点下,决策问题中决策效果的多种属性,被抽象或划分为两个彼此联系,但处于不同地位的部分。其中一部分属性被用来表示客观实际对决策过程的制约和用来表示决策者必须实现的基本目的,另一部分属性则用来衡量决策的优劣。从而使得决策问题表现为一种优化问题,即在决策方案满足客观实际对决策过程的制约并满足决策者的基本目的和要求的条件下,去追求某种标准下的最优。例如,对于确定混合食品中各种食品的数量这一决策问题,决策效果的属性包括很多方面,其中既有各个决策对应的各种营养成分的含量这样一类属性,还有对应的食品成本这一类属性。但在例 1 中,我们将各种营养成分的含量与食品成本当作两类属性处理。对于前者,我们只要求它们满足给定的营养标准,至于各种不同的决策是这样地还是那样地满足营养标准,在我们的观点下无非是满足了营养标准而已。它们间的优劣不在其满足营养标准的各种不同的情形,度量它们优劣的标准在于其后一类属性,即食品成本。又如确定调运方案这一决策问题。决策效果的属性也包括很多方面,但在例 2 中,总运输成本被显著地从调运效果的全部属性中分离出来,并作为度量调运方案优劣的标准。而对于调运效果的其余属性,只要求它们满足调运工作必须满足的供需平衡等等关系。

在最优化观点下,用数学语言来描述实际问题的手法很多,从而产生了多种类型的最优化的数学模型,线性规划的数学模型是其中最简单,最基本的一种。这种模型在描述实际问题的手法上的特点在于以下三点:

(1) 用含 n 个变量的数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$来描述决策。

(2) 用一组含 n 个变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的线性等式和线性不等式来描述客观实际对决策的制约以及决策与决策者要求实现的基本目的之间的关系。

(3) 用一个含有 n 个变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的线性函数来描述决策的优劣指标。从而

将决策问题描述成一种特定的条件极值问题。

定义 1.1　称条件极值问题

$$
\begin{aligned}
& \min(\max) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \vee_1 b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \vee_2 b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \vee_p b_p
\end{aligned}
$$

为线性规划问题。记为(LP),这里符号“$\vee_i$”,$i=1,2,\cdots,p$ 表示关系符号“=”、“$\leqslant$”或“$\geqslant$”三者之一。称变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为(LP)的决策变量。称线性等式或线性不等式

$$
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \vee_i b_i
$$

$$
i = 1,2,\cdots,p
$$

为(LP)的约束条件,简写为 s.t.。称线性函数

$$
Z = c_1x + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$

为(LP)的目标函数。

由上述定义可知,例 1.1 和例 1.2 中对应的数学问题均为线性规划问题。在例 1.1 中,这个线性规划问题的决策变量为 x_1,x_2,x_3,x_4,目标函数为线性函数

$$
Z = 0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.9x_3 + 1.5x_4
$$

约束条件是

$$
\begin{cases}
1000x_1 + 1500x_2 + 1750x_3 + 3250x_4 \geqslant 4000 \\
0.6x_1 + 0.27x_2 + 0.68x_3 + 0.3x_4 \geqslant 1 \\
17.5x_1 + 7.5x_2 + 0.9x_3 + 1.5x_4 \geqslant 30 \\
x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0
\end{cases}
$$

定义 1.2　若(LP)的决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的某一组取值满足全部约束条件,则称该组取值为(LP)的一个可行解。称可行解全体,即集合

$$
T = \{(x_1,x_2,\cdots x_n) \mid a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_n \vee_i b_i,
$$

$$
i = 1,2,\cdots,p\}
$$

为 LP 的可行解集或可行解空间。记为 T。

定义 1.3　若$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$是($LP$)的一可行解,且对($LP$)的任一可行解

$$
(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in T
$$

均有

$$
c_1x_1^{(0)} + c_2x_2^{(0)} + \cdots + c_nx_n^{(0)}
$$

$$
\leqslant (\geqslant) c_1x + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n
$$

则称$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$为($LP$)的最优解。

如在例 1.1 中,可行解是决策变量(x_1,x_2,x_3,x_4)的那些满足不等式组(1)的取值。可行解空间 T 则为这种取值情形的全体,即不等式组(1)的解集,其实际意义是全体满足营养标准的食品配料方案。最优解则是 T 中关于目标函数 $Z=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.5x_4$ 的最小值点,它的实际意义正好回答例 1.1 提出的问题——满足营养要求的各种

食品配料方案中，成本最低的方案。

建立某些实际问题的线性规划数学模型，是其应用中一个重要而又生动活泼的环节。这个环节与其计算和分析等环节一起，在国民经济的许多领域里，架起一座座理论与实际间的桥梁。下面将进一步列举一些线性规划的数学模型。希望帮助读者体会怎样按照最优化的观点去观察和提出问题；怎样用线性规划的表现手法去建立问题的数学形式。

【例 1.3】 要从宽度分别为 3 m 和 5 m 的 B_1 型和 B_2 型两种标准卷纸中，沿着卷纸伸长的方向切割出宽度分别为 1.5m，2.1m 和 2.7m 的 A_1 型、A_2 型和 A_3 型三种卷纸 3000m，10000m 和 6000m。问如何切割才能使耗费的标准卷纸的面积最少。

一种考虑是全部使用 B_1 型标准卷纸，并分别按要求的宽度规格进行切割。于是，为生产 A_1 型卷纸，需 1500m(将 3m 宽的标准卷纸对开成两条 1.5m 宽的卷纸)。为生产 A_2 型卷纸需 10000m(只能切下一条 2.1m 宽的卷纸，余下一条宽 0.9m 的边角余料)，为生产 A_3 型卷纸需 6000m(只能切下一条 2.7m 宽的卷纸，余下一条宽 0.3m 的边角余料)。这样共用去 B_1 型标准卷纸 17500m，合 $17500 \times 3 = 52500\text{m}^2$)。

另一种考虑是全部使用 B_2 型标准卷纸，仍分别按要求的三种宽度规格进行切割。则为生产 A_1 型卷纸，需 1000m(从 5m 宽的标准卷纸切下三条 1.5m 宽的卷纸，余下一条 0.5m 宽的边角余料)。为生产 A_2 型卷纸，需用 5000m(从 5m 宽的标准卷纸切下两条 2.1m 宽的卷纸，余下一条宽 0.8m 的边角余料)。为生产 A_3 型卷纸，需 6000m(只能从 5m 宽的标准卷纸中切下一条 2.7m 宽的卷纸，余下一条宽 2.3m 的边角余料。这样共用去 B_2 型标准卷纸 12000m，合 $12000 \times 5 = 60000\text{m}^2$)。

若考虑套裁，例如在第二种考虑中，所有 A_1 型卷纸，全部用生产 A_3 型卷纸的边角余料切割而成，即从 5m 宽的卷纸上切下一条 2.7m 宽和一条 1.5m 宽的两种卷纸。则可节省 B_2 型标准卷纸 1000m，合 $1000 \times 5 = 5000\text{m}^2$)。容易看出，若将 A_2 和 A_3 型套裁，可进一步节省。为了寻求最优的切割方式，考虑全部(沿着卷纸伸长方向切割的)套裁方式如表 1.3。

表 1.3

标准卷纸型号及切割方式 / 切割条数 / 产品型号	B_1			B_2				
	1	2	3	1	2	3	4	5
A_1	2	0	0	3	1	0	0	1
A_2	0	1	0	0	1	2	1	0
A_3	0	0	1	0	0	0	1	1

解 设 x_{11}, x_{12}, x_{13} 分别是用 B_1 型标准卷纸按其第 1 种，第 2 种和第 3 种切割方式切割该种标准卷纸的长度。$x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ 和 x_{25} 分别是用 B_2 型标准卷纸按其第 1 种，第 2 种，…，第 5 种切割方式切割该种标准卷纸的长度，则 A_1 型产品的总长度为

$$2x_{11} + 3x_{21} + x_{22} + x_{25}(\text{m})$$

类似地，A_2 和 A_3 型产品的总长度为

$$x_{12} + x_{22} + 2x_{23} + x_{24}(\text{m})$$

和

$$x_{13} + x_{24} + x_{25}(\mathrm{m})$$

耗费的两种标准卷纸的总面积为

$$3(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 5(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25})(\mathrm{m}^2)$$

于是(假定可以把少数几条同型的卷纸连接起来)上述问题可表为：

$$\text{求 } \min z = 3(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 5(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25})$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 2x_{11} + 3x_{21} + x_{22} + x_{25} \geqslant 3000 \\ & x_{12} + x_{22} + 2x_{23} + x_{24} \geqslant 10000 \\ & x_{13} + x_{24} + x_{25} \geqslant 6000 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, \cdots, x_{25} \geqslant 0 \end{aligned}$$

【例 1.4】 考虑一项将 m 种资源 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 转化为 n 种产品 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的生产活动。(例如企业通过消耗(投入)钢铁、电力及劳务等 m 种资源，达到制造(产出)车床、刨床、钻床等 n 种产品的生产活动)。假定在生产过程中，产品 G_j 关于资源 R_i 的消耗定额为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 是一常量，即每生产一单位的产品 G_j 需要消耗各种资源的数量为 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$。若已知在一个计划期间内，资源 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 的可提供量为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$，产品 $G_j, j=1,2,\cdots,n$ 的单位利润为 c_j；规定产品 $G_j, j=1,2,\cdots,n$ 的计划产量为 $d_j \geqslant 0$。(当 $d_j=0$ 时表示对第 j 种产品无计划要求)。问如何安排产品的生产计划，使生产活动在资源有限及保证完成任务的前提下，获得最大的利润。

解　设产品 G_j 的产量为 $x_j, (j=1,2,\cdots,n)$。则在一个计划期间内，第 i 种资源的消耗额为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

各种产品的总利润额为

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_i$$

于是(在大批量生产或不考虑产品的单位必须为整数的假定下)上述问题可表为

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad && i = 1,2,\cdots,m \\ & x_j \geqslant d_j && j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

第二节　线性规划问题的图解法

在这一节里，我们将借助二维与三维的线性规划问题，了解线性规划的几何意义。

先考虑含两个决策变量的线性规划问题(LP)：

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ \vee_1 b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ \vee_2 b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ \vee_3 b_3 \end{cases}$$

易得知，在未考虑约束时，决策变量的取值(x_1,x_2)可用坐标平面 $O-x_1x_2$ 上的动点 $M(x_1,x_2)$表示，而允许集则对应 $O-x_1x_2$ 平面上的点集

$$T=\{M(x_1,x_2)\mid a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\ \vee_i b_i\quad i=1,2,\cdots,p\}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{p}\{M(x_1,x_2)\mid a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\ \vee_i b_i\}$$

注意到

(1)当关系符号“$\vee_i$”为“=”时，

$$\{M(x_1,x_2)\mid a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\ \vee_i b_i\}$$

即直线
$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$$

(2)当关系符号“$\vee_i$”为“$\leqslant$”或“$\geqslant$”时

$$\{M(x_1,x_2)\mid a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\ \vee_i b_i\}$$

是以直线 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ 为边界的某一闭半平面，其中，法方向$\{a_{i1},a_{i2}\}$所指的一侧表示

$$\{M(x_1,x_2)\mid a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\geqslant b_i\}$$

另一侧表示

$$\{M(x_1,x_2)\mid a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\leqslant b_i\}$$

因此，(LP)的允许集 T 是这些闭半平面或直线的公共部分形成的点集。这类点集可以是空集、单点集、射线、线段、直线，但一般地是一类闭的凸多边形(有界或无界)，参见例1.1，例2，例3所示的允许集。这类图形都包含边界点在内，边界均为直线，特别地，这类点集中，若任取集内相异两点，则连结这两点的线段也在集内，这种点集我们称其为凸集。

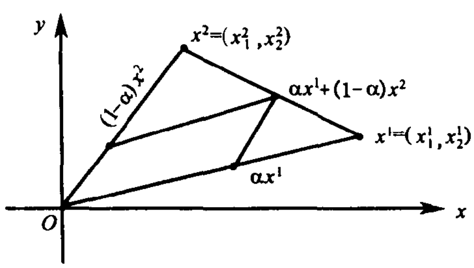


图 1.1

定义 1.4 设 C 是一平面点集，若对任给集内互异两点 $x^1=(x_1^1,x_2^1)$，$x^2=(x_1^2,x_2^2)$，$x^1\neq x^2$ 及实数 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，均有

$$\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\in C$$

则称 C 为凸集。如图 1.1。

上述定义可推广到一般的 n 维空间的凸集。

求解(LP)的工作就可以看作是在这类特定的凸多边形内，按其坐标 x_1,x_2 对应的目标函数值 $Z=c_1x_1+c_2x_2$ 来寻求使目标值最大(小)的点 $x^*=(x_1^*,x_2^*)$，即

$$c_1x_1^*+c_2x_2^*\geqslant(\leqslant)c_1x_1+c_2x_2$$
$$x=(x_1,x_2)\in T,\qquad x^*=(x_1^*,x_2^*)\in T$$

为了找到这种点，我们先来看看允许集中点的目标函数的分布情形，考虑过点 $x^k=(x_1^k,x_2^k)\in T$ 的直线族

$$L_k:\qquad c_1x_1+c_2x_2=c_1x_1^k+c_2x_2^k=z_k$$
$$k=0,1,2,\cdots,n,\cdots$$

易知，族中的直线均为目标函数的等值线，这些等值线两两平行，均垂直于同一法方向$\{c_1,c_2\}$，即目标函数 Z 的梯度 $\nabla Z=\{c_1,c_2\}$，考查各等值线对应的目标函数值 Z_k，由 ∇Z