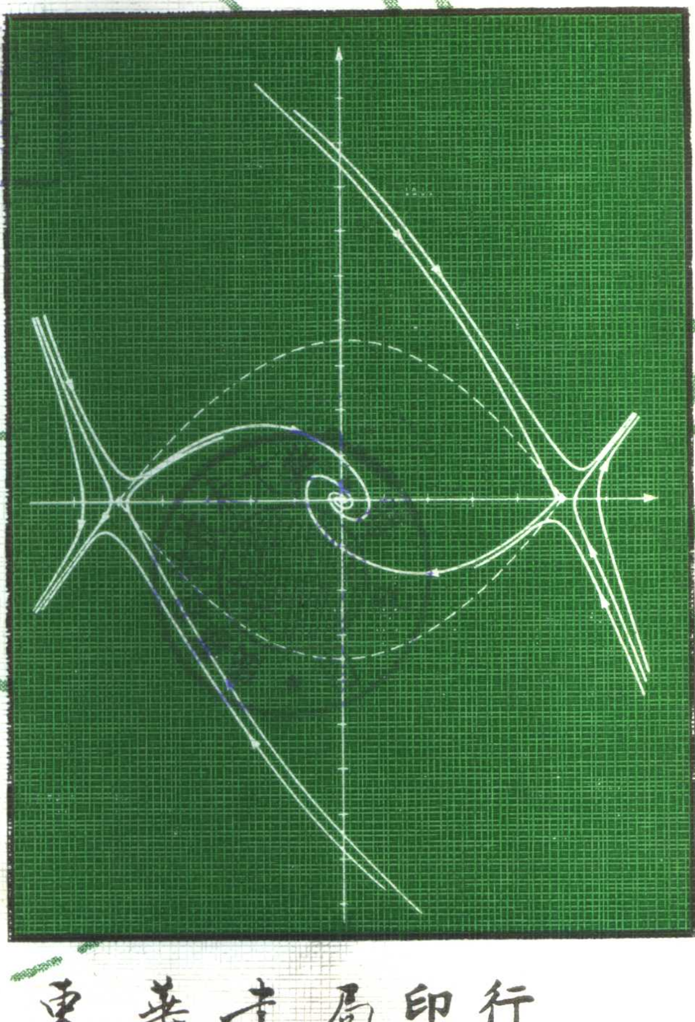
高等工程數學

綱要及題解

第一冊

編著者
劉偉源 傅光華



東華書局印行

高等工程數學

綱要及題解

（題解部份完全照 1979

Erwin Kreyszig 第四版）

第 一 冊

編 著 者

劉 偉 源 傅 光 華

私立大同工學院教授

東華書局印行

中華民國七十年五月初版
中華民國七十一年十月二版

大專用書 高等工程數學綱要及題解

（全四册）

第一册 定價 新臺幣壹百元整

（外埠酌加運費滙費）

編著者 劉偉源 傅光華
發行人 卓鑫淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481
印刷者 合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（70011）

前　言

國內大學工程學系的工程數學教本，一向超越大二學生的程度。以各工程學系作爲教本最多的二種高等工程數學（Advanced Engineering Mathematics－由Kreyszig或由Wiley所著）來說，在美國都是用來作大四或研究所一年級的教本。因此，對剛接觸工程學系必修學科的一般二年級學生而言，頗不易接受，即使接受了也不知有何應用之感。

編者有鑑於此，乃決定將高等工程數學分爲四個部分，依專業學科之由淺入深，予以適當配合。由於電算科技之日新月異，故在適當處配合電算分析，使內容不限於傳統上的範圍。

本書在基本架構上，第一部分爲常微分方程式及其相關問題；包括了基本常微分方程式、聯立常微分方程式、冪級數法、拉普拉斯轉變式、電算分析法、積分法簡介、以及非線性常微分方程式之介紹。第二部分有向量分析、線性代數、張量分析、及微分幾何等之簡介。第三部分爲偏微分方程式。除了基本型態之偏微分方程式外，還包括了各種積分式之轉變式方法；如拉普拉斯轉變式、傅利葉轉變式等應用於偏微分方程中。此外，尚含有圖形轉變、及電算分析各一章。第四部分是複變函數及其相關課題；含複變數基本性質、複變函數之各種性質、基本與特殊型態之圖形轉變方法及應用等。

依目前各工程學系之工程數學內容，第一學期應包含第一、二、三、四、五、八、十三各章；第二學期包含第九、十、十一、十四、十五、二十、二十一各章；第三學期包含第六、七、十六、十七、十八、及十九各章；第四學期則應包含第十二、二十二、二十三、二十四、二十五等各章。

本書採用出版書局之意見，將Erwin Kreyszig所著高等工程數學第四全部習題及詳解按原書之順序列於書後，便於讀者研究複習。

本書內容雖力求直接明白之表示方式，唯編者才疏學淺，疏漏之處在所難免，尚祈學界先進及讀者諸君不吝指正。

本書得以順利編定承系內王明庸老師的幫忙，並承東華書局之全力支持，特此誌謝。

編者謹識

民國七十年五月

目　次

綱　要

習題及解答

綱 要 部 份

第一章　一階常微分方程式

1-1　基本概念

常微分方程式是一個只含一個自變數，但可含其本身對該自變數之微分項所組合成的方程式。例如 $y(x)$ 是只含 x 的函數，則一個含有 $x, y, y', y'', \cdots$ 等項的方程式即爲一常微分方程式，其中 $y' = dy/dx$，$y'' = d^2y/dx^2, \cdots$

$$F(x, y, y', y'', \cdots) = 0$$
$$y'' + 2y - x^2 + 1 = 0 \;; \qquad y' = 3 + \sin x \;;$$
$$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2) y^2 \;;$$
$$y'' + ky = \cos 2x$$

等都是常微分方程式，x 在此可表示時間或坐標位置。

偏微分方程式則含有二個或更多獨立變數的一個未特定函數的部份導來式。例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x$$

常微分方程式的階次（order）係以該方程式中的最高導來式的階次定之，例如 $y' = \cos x$ 爲一階微分方程式，$y''' + 2y' = 3x$ 則爲三階微分方程式。

函數 $y = g(x)$ 可稱爲一個已知的一階微分方程式在某區間內（可以如 $a < x < b$ 或無限）的一個解答。有時候亦以隱函數（implicit function）表示出一個微分方程式的解答，亦即寫成 $G(x, y) = 0$。爲了有所區別起見，前者稱爲顯函數（explicit）解答，後者稱爲隱函數解答。

我們不難發現到 $y = \sin x$，$y = \sin x + 2$，$y = \sin x - 1/5$，$y = \sin x + c$（c 爲任意常數）均可滿足 $y' = \cos x$，亦即爲 $y' = \cos x$ 的解答，但是 $y = \sin x + c$ 可代表全部的解答，所以就稱它爲該微分方程式的通解（general solution），而 c 若訂成某一特定值，則該解答就稱爲特解（particular solution）。故，$y = \sin x + 2$ 等均稱爲特解。如果該微分方程式含有其它解答，但是無法由通解中設定任意常數爲一個定值而求出時，則該解答就稱爲奇異解

(singular solution)。茲舉下列例題說明之。

$y'^2 - xy' + y = 0$ 具有通解 $y = cx - c^2$。其它的另一個解爲 $y = x^2/4$，但是此解無法由設定通解中的任意常數爲定値而求得，故爲奇異解。在工程問題中，奇異解較不易碰到。

$y'^2 - 2y' + 4y = 4x - 1$，其通解爲 $y = x - (x - c)^2$，

其奇異解爲 $y = x$。

微分方程式中有所謂齊次（homogeneous）微分方程式及非齊次（non-homogeneous）微分方程式之區分。若以二階微分方程式爲例，如果 $y'' + f(x)y' = r(x)$ 中，$r(x) \equiv 0$，則稱爲齊次微分方程式；反之，如果 $r(x) \neq 0$，則稱爲非齊次微分方程式。準此，$y'' + 2xy' = 3x$ 屬於非齊次微分方程式，$y'' + 2xy' = 0$ 就爲齊次微分方程式。

現舉例說明模式化的步驟。

【例題 1】 實驗顯示一個放射性物質的分解速率與當時該物質的存量成正比。當開始 $t = 0$ 時，其質量爲 2 克，試問在此之後的存量變化將會如何？

【解】 第一步驟：藉著微分方程式而將實際的物理系統轉換成數學模式。

設 $y(t)$ 爲該物質在 t 時刻的存量，其變化率爲 dy/dt，根據實驗顯示的關係，得知其放射過程的關係可以寫成

$$dy/dt = ky$$

其中，k 爲固定的物理常數，其數値隨著放射物質的不同而相異。由於物質的質量必爲正値，其隨時間的減少率 dy/dt 爲負値，故 k 値亦必爲負値。

第二步驟：解微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad \therefore \quad \frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\ln y = kt + c_1, \qquad y = ce^{kt}$$

此解爲通解。

第三步驟：決定特解。

在 $t = 0$ 時，其存量爲 2 克，亦即 $y(0) = 2$，

代入通解中，可得 $2 = c$，

其特解爲 $\qquad y = 2e^{kt}$，

其關係圖形如圖1-1.1所示。

第四步驟：驗算。

$dy/dt = 2ke^{kt} = ky$,

且 $y(0) = 2e = 2$

驗證。

圖 1-1.1

【例題2】（幾何應用）試求出經過 xy 平面上的點（1，1），且其斜率爲 $-y/x$ 的曲線。

【解】 斜率 $= dy/dx = -y/x$

$\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$，積分可得 $\ln y = -\ln x + c_1$

$xy = c$， 將 $x=1$，$y=1$， 代入，得 $c=1$

故該曲線爲 $xy = 1$

1-2 幾何意義，等斜線

任何一階的微分方程式都可以寫成隱函數形式

$$F(x, y, y') = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

亦經常可寫成顯函數形式， $y' = f(x, y)$ ⋯⋯ (2)

如果在 xy 平面的某一個區域內，每一點 (x, y) 僅有一個 $f(x, y)$ 值。則可將 $y' = f(x, y)$ 繪成在 xy 平面內的曲線。首先得知通過點 (x_0, y_0) 的解，其在該點的斜率必等於 $f(x_0, y_0)$. 因而可先在 xy 平面上繪出 $f(x, y) = c =$ 常數的曲線，這些曲線就稱爲等斜率曲線或稱爲等斜線（isocline）。沿著等斜線 $f(x, y) = c$ 畫出許多斜率爲 c 的平行短線段（線素），斜率 c 亦即 $y' = f(x, y)$ 在該等斜線上任一點的解答曲線之斜率。利用此方法求得的線素場就稱爲(2)式的方向場（direction field）。藉著線素可容易地繪出已知方程式(2)的解答曲線的近似曲線，隨而得到這些解答曲線的定性正確圖形。茲舉例說明之。

【例題1】 試繪出一階微分方程式 $y' = xy$ 的方向場，以及通過點（1，2）的近似解答曲線。

【解】 此等斜線族爲等軸雙曲線族 $xy = c$ 加上二個座標軸。首先繪出某幾條曲線，然後沿著一個固定的直尺，滑動著三角板而繪出線素，如圖 1-2.1 所示，由圖中可看出經過點（1，2）的近似解答曲線。

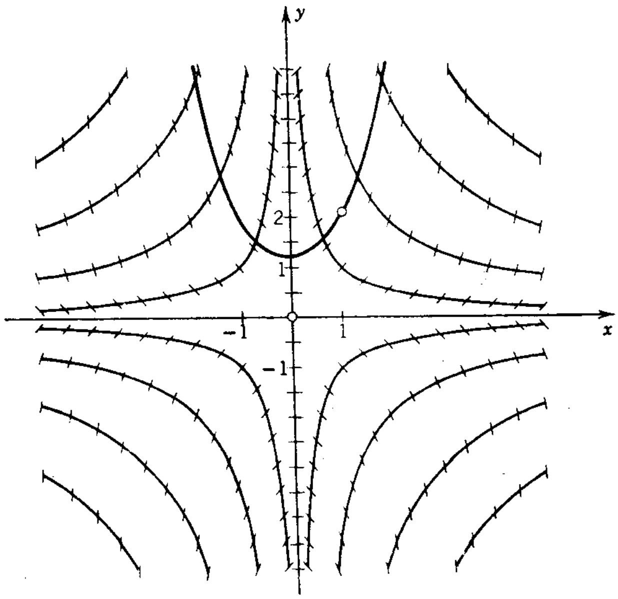


圖 1-2.1

此種方法在一階微分方程式的解答過於複雜或是無法利用已知函數表示時，可助於了解解答的性質。

1-3 可分離變數的方程式

許多的一階微分方程式都可以藉著代數方法而化成

$$g(y)\cdot y' = f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

由於 $y' = dy/dx$，上式可寫成 $\quad g(y)dy = f(x)\,dx$

變數因而分離矣。故稱其爲可分離變數的方程式，其積分結果爲

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c$$

【例題 1】 $\quad 4yy' + 9x = 0$

【解】 即 $\quad 4y\,dy = -9x\,dx$，積分可得 $\quad 2y^2 = -\dfrac{9}{2}x^2 + c_1$

即 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=c$， 此解表示橢圓曲線系。

【例題2】 解 $y'=-3xy$

【解】 分離變數可得 $dy/y=-3x\,dx$

積分可得 $\ln|y|=-\dfrac{3}{2}x^2+c_1$ ……………………………………(2)

上式左邊可藉微分驗證之。當 $y>0$ 時，$(\ln y)'=y'/y$，當 $y<0$ 時，則 $-y>0$，而 $[\ln(-y)]'=-y'/(-y)=y'/y$。 現令，當 $y>0$ 時，$y=|y|$；當 $y<0$ 時，$-y=|y|$。故可合併此二項公式而得出 $[\ln|y|]'=y'/y$。

由(2)式可得

$$|y|=e^{-\frac{3}{2}x^2+c_1} \qquad \text{即} \quad |y|=e^{-\frac{3}{2}x^2}\cdot e^{c_1}$$

當 $y>0$ 時，令 $e^{c_1}=c$； 當 $y<0$ 時，令 $e^{c_1}=-c$，

則 $y=ce^{-\frac{3}{2}x^2}$

其圖形如圖 1-3.1 所示。

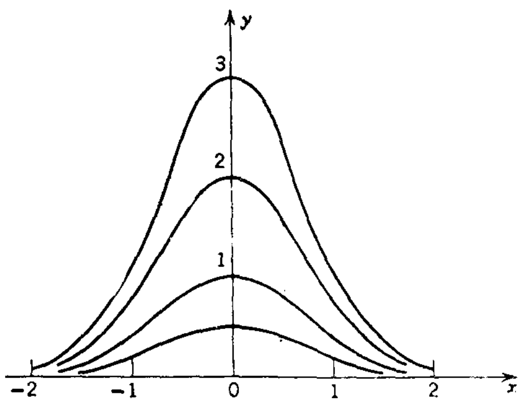


圖 1-3.1

工程應用大多均有許多必須滿足的限定條件。例如設計出來的橫梁在其首、尾兩端或是中點等特殊位置的特定變形情況。或是熱能在導體首、尾兩端的特定溫度以及在時間等於零的特定溫度狀況等等。它會隨著設計者或使用者的需求發生變化，也因而可以滿足工程上的應用。因此，所解出來的解答也就爲滿足某些下列特殊條件的特解。

$$y(x_0)=y_0\ ,\qquad y(x_1)=y_1\quad\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\qquad y(t_0)=y_{t_0}\qquad\cdots\cdots\cdots$$

基於條件的不同而將其分成二大類：

起始條件（initial condition）：如 $y(t_0)=y_{t_0}$。此爲與時間有關的條件。例如某一運動體在時間 $t=0$ 的速度爲 v_0，則 $v(0)=v_0$ 爲該運動體的起始條件。

邊界條件（boundary condition）：如 $y(x_0)=y_0$。此爲與幾何形狀有關的條件。例如某一物體受到外力之後發生變形，它在 $x=0$ 處的變形量爲 $y=0$，而在 $x=l$ 處的變形量爲 $y=\delta$，則此條件稱爲該物體受力的邊界條件。

以上的解釋並不意味著起始條件與邊界條件無法共存在一個工程問題中。事實上是可以並存的。若以細長桿子中的熱能流動爲例子的話，其邊界條件可寫成 $T(0,t)=T_0$，$T(l,t)=T_l$，其中 T_0 及 T_l 爲任意溫度，而起始條件爲 $T(x,0)=f(x)$。茲舉例說明之。

【例題 3】 解 $dx+xydy=y^2dx+ydy,\quad y(0)=2$

【解】 先將 dx 及 dy 的項次積分起來，得 $(1-y^2)dx=y(1-x)dy$

$\therefore$ 即 $\dfrac{dx}{1-x}=\dfrac{ydy}{1-y^2}$ 積分， $2\ln|1-x|=\ln|1-y^2|+c_1$

$\therefore\quad (1-x)^2=c(1-y^2)$

將 $y(0)=2$ 代入，得 $1=c(-3)$， $\therefore\quad c=-1/3$

其解爲 $\quad (1-x)^2=-\dfrac{1}{3}(1-y^2)$

【例題 4】 解 $(x^2+1)y'+y^2+1=0$， $y(0)=1$

【解】 首先將變數分離之，

$$\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{dx}{1+x^2}\qquad \text{積分，得}$$

$$\tan^{-1}y=-\tan^{-1}x+c$$

$$\tan(\tan^{-1}y+\tan^{-1}x)=\tan c$$

因爲 $\quad \tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

故 $$\frac{y+x}{1-xy} = \tan c$$

將 $y(0)=1$ 代入，得 $\tan c = 1$

其特解為 $$x+y=1-xy$$

【例題 5】 將一銅球加熱到 100°C，然後在 $t=0$ 的瞬間放入溫度維持在 30°C 的水中。經過 3 分鐘之後，銅球的溫度下降到 70°C 。試求銅球溫度降至 31°C 的所需時間。

【解】 由牛頓冷却定理得知：銅球溫度的變化率與其本身和外界溫度的相差值成正比。實際上，銅球的導熱性極高，其熱能流動極為快速，銅球每一點在任一時刻的溫度均能維持相等。

第一步驟：模式化

根據牛頓冷却定律得 $$\frac{dT}{dt} = -k(T-30), \quad k>0$$

第二步驟：藉分離變數法解微分方程式，求得通解為

$$T(t) = ce^{-kt} + 30$$

第三步驟：須滿足起始條件 $T(0)=100$，故得 $c=70$

即特解為 $$T(t) = 70e^{-kt} + 30$$

第四步驟：由 $T(3)=70$ 的條件求出 k

$$T(3) = 70e-3k+30 = 70, \quad \therefore \quad k=\frac{1}{3}\ln\frac{7}{4} = 0.1865$$

故 $$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30$$

將 $T=31$ 代入上式，得 $$t = \frac{\ln 70}{0.1865} = 22.78,$$

亦即 23 分鐘後可達到此溫度。

第五步驟：驗算所得結果無誤。

【例題 6】 一個半徑為 R 的半球形容器最初充滿了水。水藉著重力的影響而由容器底端的一個半徑為 r 的小孔流出。試求出水在任意時間 t 的深度，並求出多久方可令容器內的水完全排出？