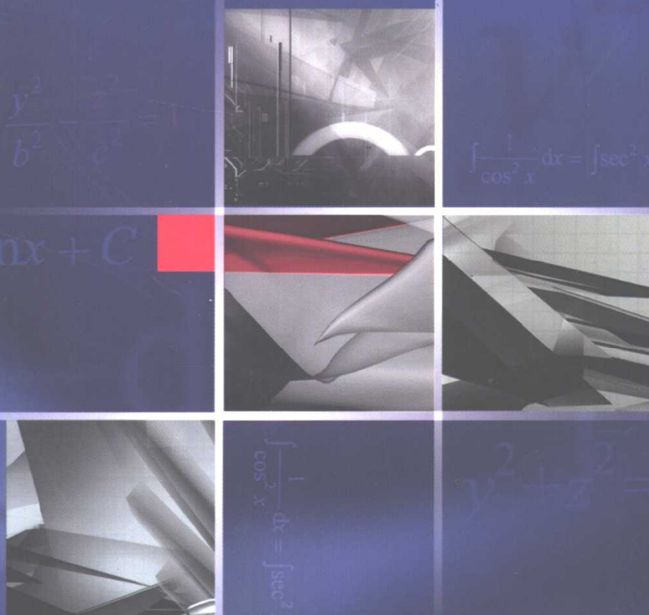
全国工程硕士研究生入学考试考前辅导教材

考研数学习题详解

宋国栋　鞠洪尧　编著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
PHEI
http://www.phei.com.cn

全国工程硕士研究生入学考试考前辅导教材

考研数学习题详解

宋国栋　鞠洪尧　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

考研数学习题详解/宋国栋等编著.—北京:电子工业出版社,2002.11
全国工程硕士研究生入学考试考前辅导教材
ISBN 7-5053-8234-9

Ⅰ.考… Ⅱ.宋… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－解题 Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 090938 号

责任编辑：刘宪兰　特约编辑：王东宝
印　　刷：北京东光印刷厂
出版发行：电子工业出版社　http://www.phei.com.cn
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×980　1/16　印张：24.25 字数：540 千字
版　　次：2002 年 11 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　　定价：31.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：(010)68279077

前　　言

由全国工程硕士专业学位教育指导委员会编写的《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材(修订版)》,是工程硕士研究生入学考试数学考试的权威备考资料。每个报考者有了这本辅导教材，必然还希望有一本该书的习题详解，系统地了解解题方法。本书第 1 篇是针对该书的习题解答，包括全部习题的详解，还补充了少部分典型习题及其详解。这些习题详解多数用数学软件作了验算，订正了原书答案中的少量错误。第 2 篇是解题方法示例，吸收了近两年的有关试题，并按题目类型归纳分类，通过示例阐明方法。这些方法都是备考时需要掌握的，具有代表性、典型性的方法。最后是附录，辑录了有关公式（包括初等数学的公式）、定义及定理等资料。由于工程硕士高等数学考试大纲与许多专业的高等教育自学考试的数学课程考试要求相近，既与管理、财经类研究生入学考试大纲相近，也与高等院校的少学时高等数学课程考试要求相近，所以本书也适合上述几种读者备考使用。

备考者为什么要有一本习题详解? 工程硕士招生对象多为在职业务骨干，他们大都对大学基础课生疏多年，并且备考时间紧迫。大学读过的基础课本，演算的习题，不再适合备考使用。显然，备考不与题打交道是不行的；但是读者往往没有把习题全系统演算一遍的时间,本习题详解就是要帮助读者以尽量少的时间把习题过一遍。详解，就是写出做题的每一细节，使读者大部分不动笔，就可以边看边想，解决做题的问题。

本详解有什么特点? 为了使读者一册在手，资料齐全，也为了解决读者遇到考题无从下手的困难，掌握解题方法,本书中采取三种做法：①在本书第一部分，从边做题边复习大纲范围内容的角度，对本书的每题、每例，都按“习题——解题思路——本题解答”的模式编写。使读者看会一个题，就能做一类题。②在本书第二部分，从掌握方法的角度，以典型试题及本书部分典型习题为例，分类、分系统地阐明解题方法，包括备考与答题须知，选择与填空题解法，计算题解法，应用题及证明题解法。③在本书第三部分，从方便读者、节省读者时间的角度，在附录 A 里辑录了定义及定理等简明资料（包括函数与极限、一元函数微分、一元函数积分、向量与空间解析几何、多元函数微积分、级数和常微分方程与线性代数），在附录 B 里辑录了本书前面引用过的全部公式（包括初等数学公式和高等数学公式）。

为了突出本书的资料性和便于查阅的方便性，凡在题解或例题中需要提及定理、公式的地方，都注明了章节号或公式号。详解中的题目号，用数字加半字线表示，例如 7-12(1) 就是第 7 章第 12 题的(1)题。附录 A 中的公式号用数字加半字线表示，例如(2-3)表示附

录A.2的第3个公式。附录B中的公式号，用数字加点表示，例如(1.7)表示初等数学公式7。考虑到中国高等院校工科高等数学课程的习题集多使用同济大学编写的《高等数学习题集》，为使读者易于回忆当年所做练习，本书也对原辅导教材中引用的《高等教学习题集》的部分习题进行了详解和分析。

第1篇的第2章至第12章和附录的大部分由鞠洪尧编写，其余部分由宋国栋编写，并由宋国栋统稿。

编者对引用了资料的作者，特别是《考前辅导教材》的主编俞正光教授及各位作者致以衷心的感谢。诚望读者对书中的疏漏、错误予以批评指正。

编者

2002年8月

目　　录

第 1 篇　习题详解

第 1 章　函数、极限与连续

1-1　下列函数 $f(x)$，$g(x)$ 是否相等，为什么？

(1) $f(x) = x$，　$g(x) = (\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x) = \sin(\arcsin x)$，　$g(x) = \arcsin(\sin x)$。

解题思路：

两个函数相等的条件是：① 它们的定义域相同；② 它们在定义域内对应函数值相等，因而值域相同。若证明两个具有表达式的函数相等，则必须证明两个函数表达式是恒等式。若证明两个函数不等，则只要说明它们的定义域或值域不同，或者找到这两个函数一对对应值不等即可。

本题解答：

(1) $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, +\infty)$，$g(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$，值域不同，所以两函数不等。

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\pi/2, \pi/2)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，定义域不同，所以两函数不等。

1-2　设 $f(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$，求 $f(1)$，$f(-2)$，$f(\pi/4)$，$f(-\pi/4)$。

解题思路：

根据自变量的不同取值范围，选取对应的不同的表达式来计算函数值。

本题解答：

因为 $1, -2$ 属于范围 $|x| \geqslant 1$，所以 $f(1) = f(-2) = 0$；又因为 $\pm\frac{\pi}{4}$ 属于范围 $|x| < 1$，所以 $f(\pi/4) = f(-\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

1-3　作下列函数图形：

(1) $y = |\sin x + \cos x|$。

解题思路：

首先利用公式 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$将函数表达式变形（参见附录 B 的公式(1.16)），然后作$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$的图像，并把其在横轴下方的图像对映到轴上，参见图 1.1。

本题解答：

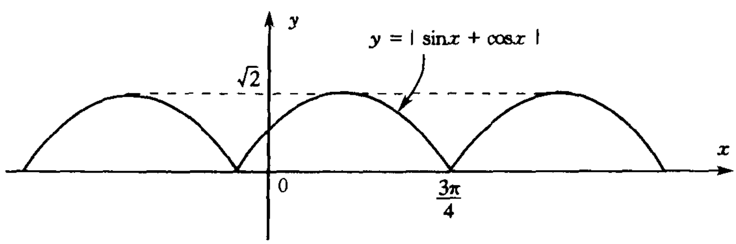


图 1.1

(2) $y = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \leqslant 1 \\ x^{-1} & |x| > 1 \end{cases}$。

解题思路：

因为这是一个分两段的分段函数，所以函数图像由两部分组成。在$[-1, 1]$上，函数图像是顶点在$(0, 2)$处的开口向下的（部分）抛物线；在$[-1, 1]$之外，函数图像是以坐标轴（横轴）为渐近线的（部分）双曲线，如图 1.2 所示。

本题解答：

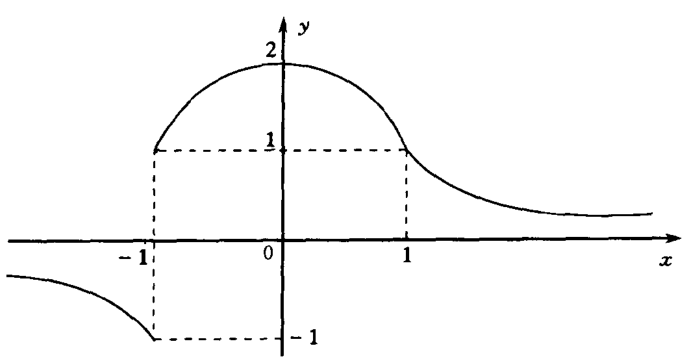


图 1.2

1-4　已知 $f(x)$ 是线性函数，即 $f(x) = ax + b$，且 $f(-1) = 2$，$f(2) = -3$，求 $f(5)$。

解题思路：

先用多项式的待定系数法（参见附录 A.1.4.2）求 $f(x)$ 的系数 a，b。

本题解答：

将自变量的值及其对应函数值代入 $f(x) = ax + b$，得 $f(-1) = -a + b = 2$，$f(2) = 2a + b = -3$。解得 $a = -\dfrac{5}{3}$，$b = \dfrac{1}{3}$。于是 $f(x) = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$，代入 $x = 5$ 得 $f(5) = -8$。

1-5　求下列函数定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{|x| - x}$；　　(2) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$；

(3) $y = \sqrt{x^2 - x}\arcsin x$；　　(4) $y = \arccos\sqrt{\lg(x^2 - 1)}$。

解题思路：

① 在没有赋予具体物理意义的数学问题中，将运算限定在实数范围内，合理地确定出函数值的自变量的所有值（的集合），就是函数定义域。例如分母不能为 0，偶次根式的底为非负数，对数的自变量为正数等；② 如果一个函数有几个子函数，则此函数定义域为各子函数定义域集合的并。

本题解答：

(1) 因为 $x \geqslant 0$ 时，分母 $|x| - x = 0$，所以只有 $x < 0$。于是函数定义域为 $(-\infty, 0)$。

(2) 第一个根式要求 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k + 1)\pi$，$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$；第二个根式要求 $16 - x^2 \geqslant 0$，即 $-4 \leqslant x \leqslant 4$。所以函数定义域为 $[-4, -\pi] \cup [0, \pi]$。

(3) $\sqrt{x^2 - x}$ 要求 $x^2 - x \geqslant 0$，即 $x \geqslant 1$ 及 $x \leqslant 0$；$\arcsin x$ 要求 $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$；因而函数定义域为 $[-\pi/2, 0] \cup [1, \pi/2]$。

(4) $\arccos u$ 要求 $-1 \leqslant u \leqslant 1$，即 $0 \leqslant \sqrt{\lg(x^2 - 1)} \leqslant 1$，要求 $0 \leqslant \lg(x^2 - 1) \leqslant 1$，从而要求 $10^0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 10$，即 $\sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{11}$，由此得函数定义域为 $[-\sqrt{11}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{11}]$。

1-6　若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，分别求 $f(\ln x)$ 和 $f(x + a) + f(x - a)$ $\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域。

解题思路：

求复合函数定义域，有时要根据中间变量的值域倒推中间变量作因变量的函数的定义域。

本题解答：

(1) $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$，则 $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$，所以函数定义域为$[1, \mathrm{e}]$。

(2) $0 \leqslant x + a \leqslant 1$，$0 \leqslant x - a \leqslant 1$，因为 $a < \dfrac{1}{2}$，所以 $a < 1 - a$，因而函数定义域为$[a, 1-a]$。

1-7　建立函数关系：

(1) 在一个半径为 r 的球内，嵌入一个内接圆柱，试求圆柱的体积 V 与圆柱高 h 的函数关系，并求出此函数的定义域。

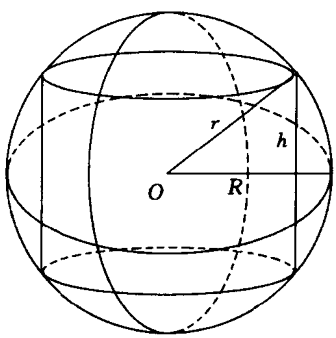


图 1.3

解题思路：

参见图 1.3。

本题解答：

设圆柱半径为 R，则 $R^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 = r^2$，$V = \pi R^2 h$，所求函数为

$$V = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) \qquad 0 < h < 2r$$

(2) $AC = b$，高 $BD = h$ 的三角形 ABC 中内接矩形 $KLMN$，其高记为 x，将矩形周长 p 和面积 S 表示为 x 的函数。

解题思路：

参见图 1.4，设 $LM = l$，利用相似三角形，求出 l。

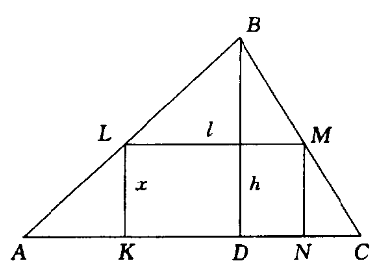


图 1.4

本题解答：

因为 $\triangle LBM \backsim \triangle ABC$，所以 $h : b = (h - x) : l$，则

$$l = \frac{b(h-x)}{h}$$

$$p = 2\left(x + \frac{b(h-x)}{h}\right)$$

$$S = \frac{bx(h-x)}{h} \qquad 0 < x < h$$

(3) 长为 l 的弦，两端固定，在点 C 处将弦提高 h 后呈图 1.5 所示的形状，设提高时弦上各点仅沿着两端连线方向移动，以 x 表示弦上点的原来位置，y 表示点 x 处升高的高度，建立 x 与 y 间的函数关系。

解题思路：

参见图 1.5：设点 C 的横坐标为 c，则此函数图像由两条线段组成：一条连结原点与点 (c, h)，另一条连结点 (c, h) 与点 $(l, 0)$。

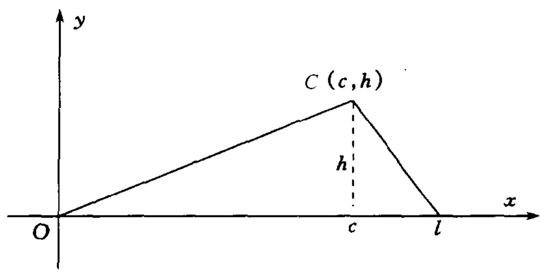


图 1.5

本题解答：

一条直线方程为 $y = \frac{h}{c}x$，另一条直线方程为 $\frac{y-0}{x-l} = \frac{h-0}{c-l}$。由此得分段函数为

$$y = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x & 0 \leqslant x \leqslant c \\ \dfrac{h(x-l)}{c-l} & c < x \leqslant l \end{cases}$$

(4) 图 1.6 是机械中常用的一种既可改变运动方向又可调整运动速度的滑块机构。现设滑块 A，B 与 O 点的距离分别为 x 与 y，$\angle AOB = \alpha$（定值），连接滑块 A 与 B 的杆长为 l（定值），试建立 x 与 y 之间的函数关系。

解题思路：

参见图 1.6，$\angle AOB = \alpha$，在 $\triangle AOB$ 中应用余弦定理。

本题解答： 由余弦定理知 $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\,BO\cos\alpha$，由此得隐函数为

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha - l^2 = 0$$

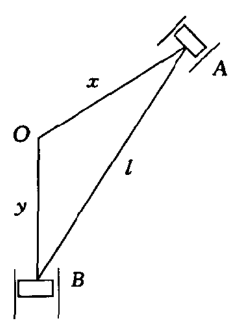


图 1.6

(5) 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内每公里 k 元，超过 a 公里时，超过部分每公里 $0.8k$ 元，求运价 m 和里程的函数 x 关系。

本题解答： 这是一个分段函数，在 $x = a$ 处分段

$$m = \begin{cases} kx & 0 < x \leqslant a \\ ka + 0.8k(x - a) & a < x \end{cases}$$

1-8　指出下列函数中的奇偶函数和周期函数：

(1) $y = |\sin x|$；　　(2) $y = 2 + \tan \pi x$；

(3) $y = 3^{-x}(1 + 3^{x})^2$。

解题思路：

满足 $f(-x) = -f(x)$ 的函数为奇函数；满足 $f(-x) = f(x)$ 的函数为偶函数。对于任意 x，满足 $f(x + T) = f(x)$ 的函数为周期函数，最小正数 T 为周期（参见附录A中的公式(1-2) ~ (1-4) 式）。

本题解答：

(1) 因为 $|\sin(-x)| = |\sin x|$，且 $|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$，所以 $y = |\sin x|$ 是偶函数，且是周期函数，周期为 π。

(2) $2 + \tan \pi(x + k) = 2 + \tan \pi x$，其中 k 为整数，所以 $y = 2 + \tan \pi x$ 是周期函数，周期是最小正整数 1，但它不满足函数的奇、偶条件，所以它不是奇函数或偶函数。

(3) 不难验证 $3^{x}(1 + 3^{-x})^2 = 3^{-x}(1 + 3^{x})^2$，所以 $y = 3^{-x}(1 + 3^{x})^2$ 为偶函数。

1-9　指出下列函数的单调区间及有界性：

(1) $y = 1/x$；　　(2) $y = \arctan x$；

(3) $y = \ln(1 + x)$；　　(4) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$。

解题思路：

见单调函数及有界函数定义。参见附录 A.1.1.1 和 A.1.1.2 的内容。

本题解答：

(1) 为$(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$上的单调递减无界函数；(2) 为$(-\infty, +\infty)$上的单调递增有界函数，(3) 为$(-1, +\infty)$上的单调递增无界函数；(4) 因为 $y \leqslant a$，所以它是有界函数，在$[-a, 0]$上递增，在$(0, a]$上递减。

1-10　求下列函数的反函数：

(1) $y = \dfrac{2x}{(1 + 2^{x})}$；　　(2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$。

解题思路：

求反函数的步骤：①解出 x，将 x 表为显式表达式；②交换变量 x，y 使用的字母；③写出（要保证函数单值）定义域。

本题解答：

（1）解出 2^x：$2^x = \dfrac{y}{1-y}$　　$x = \log_2 \dfrac{y}{1-y}$，从而

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x} \qquad x \in (0, 1)$$

（2）解出 x：$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$，$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1$，$x = \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y} = \dfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})$
从而

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

1-11　设 $y = f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，当 $-\pi \leqslant x < \pi$ 时，$f(x) = x$，求函数 $f(x)$。

解题思路：

当 $-\pi + 2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi\ (k \in Z)$ 时，利用周期函数性质 $f(x + 2k\pi) = f(x)$ 确定函数表达式。

本题解答：

因为 $f(x + 2k\pi) = f(x)$，从而 $f(x + 2k\pi) = x$，即 $f(x) = x - 2k\pi$，所以：

$$f(x) = x - 2k\pi$$
$$(2k-1)\pi \leqslant x < (2k+1)\pi \qquad k \in Z$$

1-12　设 $f(x)$ 是奇函数，当 $x \leqslant 0$ 时，$f(x) = x - x^2$，求 $f(x)$。

解题思路：

奇函数必是关于原点对称的，利用 $f(-x) = -f(x)$ 补充 $x > 0$ 时的函数表达式。

本题解答：

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 & x \leqslant 0 \\ x + x^2 & x > 0 \end{cases}$$

1-13　下列函数是由哪些基本初等函数复合的？

（1）$y = \sin^3 \dfrac{1}{x}$；　　（2）$y = 2^{\arcsin x^2}$；

（3）$y = \lg\lg\lg\sqrt{x}$；　　（4）$y = \arctan e^{\cos x}$。

本题解答：

（1）$y = u^3$　　$u = \sin v$　　$v = \dfrac{1}{x}$

(2) $y = 2^u \quad u = \arcsin v \quad v = x^2$

(3) $y = \lg u \quad u = \lg v \quad v = \lg w \quad w = \sqrt{x}$

(4) $y = \arctan u \quad u = e^v \quad v = \cos x$

1-14　设 $f(x) = \sin x$，$f(\varphi(x)) = 1 - x^2$，且 $|\varphi(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

解题思路：

函数关系不会因选择代表变量的字母符号不同而改变。例如 $f(x) = \sin x$ 与 $f(u) = \sin u$ 是相同的函数关系。

本题解答：

(1) 设 $u = \varphi(x)$，则 $f(u) = \sin u = 1 - x^2$，$u = \arcsin(1 - x^2)$，从而 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$。

(2) 求定义域：由于 $-1 \leqslant \sin u \leqslant 1$，$-1 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$，$x^2 \leqslant 2$，从而定义域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$。

1-15　已知 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$，求 $f(x)$。

解题思路：

根据在函数里代表变量字母符号的使用规则，求 $f(x)$，也就是求 $f(u)$。

本题解答：

因为

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

设 $u = x + \frac{1}{x}$，则

$$f(u) = \frac{1}{u^2 - 2} \text{ 或 } f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$$

1-16　设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 4 \\ e^x & x > 4 \end{cases}$，$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + x & x \leqslant 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$，求 $\varphi(f(x))$。

解题思路：

①设 $u = f(x)$，求 $\varphi(u)$，并注意分段；②根据 $f(x)$ 应满足 $\varphi(u)$ 的定义域的条件作为值域，从而推出复合函数的定义域。

本题解答：

由 $\varphi(u)$ 的表达式知

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 + u & u \leqslant 0 \\ \ln u & u > 0 \end{cases}$$

当 $u\leqslant 0$ 时，只有 $u=x^2(x\leqslant 4)$；当 $u>0$ 时，有 $u=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 4\\ e^x & x>4\end{cases}$。按分段情况分别考虑，则有

$$\varphi(f(x))=\begin{cases}1 & x=0\\ \ln x^2 & x\leqslant 4,\ x\neq 0\\ x & x>4\end{cases}$$

1-17　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$。

解题思路：

表达式为连续函数，连续函数在一点的极限，等于该点的函数值。

本题解答：

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\frac{(-1)^2+2(-1)+5}{(-1)^2+1}=2$$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$。

解题思路：

应用公式 $(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

本题解答：

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=2x$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$。

解题思路：

应用无穷等比收敛数列求和公式 $S=\dfrac{1}{1-q}$，$|q|<1$（参见附录 B 的公式(1.24)）。

本题解答：

设 $q=\dfrac{1}{2}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$。

解题思路：

应用公式 $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$ 及 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$。

本题解答：

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(1+x+x^2)}=-1$$

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$。

解题思路：

利用分子有理化方法，即分子、分母同乘一个共轭因子。

本题解答：

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

(6) $\lim_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$。

解题思路：

这是一个$\dfrac{0}{0}$型，对分子、分母分别进行代数式变换

$$\sqrt{1-x}-3=-\frac{x+8}{\sqrt{1-x}+3}$$

$$2+\sqrt[3]{x}=\frac{x+8}{4-2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}$$

本题解答：

约去相同的无穷小量分子(称为无穷小量分出法)后，这时 $x=-8$ 为分式函数的连续点。则有

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}-\frac{4-2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{1-x}+3}=-2$$

(7) $\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})]$。

解法 1

解题思路：首先用数学归纳法将 $u_n=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})$ 展开为和式。并应用公式 $1+2+2^2+\cdots+2^n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$(参见附录 A.1.4)。

本题解答：

求证

$$u_n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1+2+2^2+\cdots+2^n}$$

当 $n=1$ 时

$$u_1=(1+x)(1+x^2)=1+x+x^2+x^{1+2}$$

假设公式对于 n 公式成立，求证当 $n+1$ 正确

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n(1+x^{2^{n+1}}) \\
&= (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1+2+2^2+\cdots+2^n})(1+x^{2^{n+1}}) \\
&= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^{n+1}-1}+ \\
&\quad x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+1}+1}+\cdots+x^{1+2\cdot 2^2+\cdots+2^n+2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

证毕。

又应用等比数列求和公式知

$$u_n = 1+x+\cdots+x^{2^{n+1}-1} = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})] = \lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & |x|<1 \\ \infty & |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

解法 2

解题思路： 分子分母同乘以$(1-x)$，则有

$$(1-x)(1+x)=1-x^2,\ (1-x^2)(1+x^2)=1-x^4,\ \cdots,\ (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}}$$

本题解答：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

从而得到相同答案。

注：原题答案漏掉 ∞ 的情形。

1-18　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，求常数 a，b。

解题思路：

若使极限为 0，必须使分子的次数小于分母的次数。

本题解答：

因为

$$\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b) = \frac{(1-a)x^2-(a+b)x+(b-1)}{x+1}$$

为使分子的次数小于分母的次数，则令

$$\begin{cases} 1-a=0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=-1$。