高等学校交流講义

# 解析几何

JIEXI JIHE

北京大学数学力学系
几何与代数教研室編

人民教育出版社

# 解 析 几 何

JIEXI JIHE

北京大学数学力学系
几何与代数教研室编

人 民 教 育 出 版 社

本书是北京大学数学力学系几何与代数教研室编写的。全书內容包括平面直角坐标、直綫和圓、常見的平面曲綫、坐标变换、二次曲綫的一般討論、空間直角坐标、向量代数及其几何应用、常見的曲面与曲綫、变形几何学等九章。可作为綜合大学、高等师范学校数学各专业解析几何課程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

# 解 析 几 何


北京大学数学力学系
几何与代数教研室编
人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号
（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）
人 民 教 育 印 刷 厂 印 装
新华书店科技发行所发行
各 地 新 华 书 店 經 售

统一书号 13010·977 开本 850×1168 $^1/_{32}$ 印张 7 $^4/_{16}$
字数 171,000 印数1,601—28,000定价（6）¥0.70
1961年7月第1版 1961年7月北京第2次印刷

# 目　录

附注：目录和正文中标上*号的章、节、段,結合講授时間和进度等具体情况,可不講授。

# 第一章　平面直角坐标

在生产实践中，随着活动范圍的扩大和对精密度要求的提高，特别是，对描写和掌握运动規律的要求，人們就需要比較精确地刻划一个物体的位置。

刻划一个物体位置的方法就是选取几个物体作为参考，按一定的方法来标明这一物体与它們的相互位置的关系。在有了一定的度量单位之后，相互位置的关系通常是用数来表示的。例如，由于航海的需要而产生的地理坐标(經緯度)。又如，为了掌握天体运行的規律或标明天体的位置而产生的各种天文坐标。就是在日常生活中，我們也常常按这样的方法来确定地点的位置。下面所講的平面直角坐标就是一种最常見的，同时也是最自然的一种坐标。

在这一章中，我們将引进平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系建立点与数、方程与图形的联系，熟悉这些內容和掌握坐标方法，对学习这門課程将是十分重要的。

## §1. 平面直角坐标系

在講平面直角坐标之前，先来看一下我們通常是怎样确定直綫上点的位置的。在直綫上，取定一点，記为 $O$；取一长度的单位；再取定一个方向。于是对于直綫上任一点 $P$，就可以按下面的方法来标明它的位置：首先按所取的长度单位量出綫段 $OP$ 的长度 $|OP|=x$，如果 $P$ 点不是 $O$ 点，按照从 $O$ 到 $P$ 的方向与选定的方向相同或相反以正数 $+x$ 或負数 $-x$ 来标明 $P$ 点的位置，这个数就称为 $P$ 点的坐标。而 $O$ 点的坐标就是 $0$。反之，給定任意一个实数，

直綫上有唯一的（即有一个且只有一个）点以这个数为坐标。于是，就給出了直綫上点与全体实数之間的一个一一对应。点 $O$，长度单位以及选定的方向三者就构成直綫上的一个坐标系（图 1.1）。

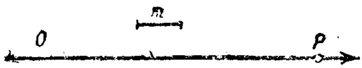


图　1.1

**1. 平面上点的坐标。**

为了确定平面上点的位置，先在平面上取两根互相垂直的并选定了方向的直綫，一根叫 $x$ 軸（或横軸），一根叫 $y$ 軸（或縱軸），它們的交点 $O$ 称为原点。于是平面上任意一点 $M$ 的位置便可以这样来确定：由 $M$ 到 $x$ 軸和 $y$ 軸分別作垂綫，$P$、$Q$ 分別是它們的垂足。設 $x$ 是 $P$ 在 $x$ 軸上的坐标，$y$ 是 $Q$ 在 $y$ 軸上的坐标，不难看出，$|x|$ 就給出了 $M$ 点到 $y$ 軸的距离，$x$ 的符号就説明了它在 $y$ 軸的哪一側；$|y|$ 就給出了 $M$ 点到 $x$ 軸的距离，$y$ 的符号就説明了它在 $x$ 軸的哪一側。因之，$M$ 点的位置便可以数对 $(x, y)$ 来表示（图1.2）。如此取定的两根互相垂直的且有方向的直綫和长度单位称为**平面上的一个直角坐标系**，記为 $Oxy$；数对 $(x, y)$ 为 $M$ 点的**坐标**，$x$ 为**横坐标**，$y$ 为**縱坐标**。

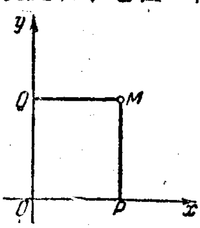


图　1.2

在平面上取定了直角坐标系以后，平面上的点便与全体有順序实数对之間建立了一个一一对应关系，也就是説，在給定坐标系下，平面上的任一点唯一地决定一对有順序的实数，反之，任意給一对有順序的实数，它也唯一地决定平面上的一个点。

平面上的直角坐标系按 $x$ 軸和 $y$ 軸上选取的方向可以分成两大类：把 $x$ 軸按逆时鈡方向[①]繞 $O$ 点轉 $90°$ 而与 $y$ 軸重合时，如果

① 説"逆时鈡方向"时，已表示我們取定了平面的一面作为正面，否則这句話沒有确定的意义。

它們的方向一致，那么这样的坐标系就称为右手系(图 1.3)，这是一类；否则，就称为左手系，这是另一类(图 1.4)。此后我們都用右手系。

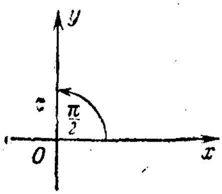


图 1.3

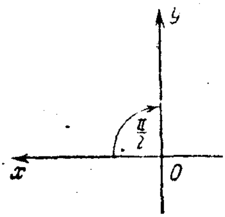


图 1.4

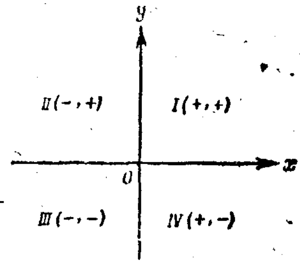


图 1.5

坐标軸把平面分成四部分，称为四个象限。按在其中点的坐标的符号为(+, +)、(−, +)、(−, −)、(+, −)，分别称它們为第一、第二、第三、第四象限(图 1.5)。

2. 两个簡单問題。

既然平面上的点的位置完全被它的坐标决定，因而有关点的問題，如两点間的距离，綫段上的定比分点应該可以通过点的坐标来表示。下面我們就看看这两个簡单而基本的問題。

(1) 两点間的距离。已知两点 $M_1$、$M_2$ 的坐标分别是 $(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$。求 $M_1$、$M_2$ 之間的距离。

我們先考虑一般的情形，即綫段 $M_1M_2$ 不与坐标軸平行的情形。过 $M_1$、$M_2$ 分别作平行于 $y$ 軸、$x$ 軸的两条直綫，它們相交于 $M(x_1, y_2)$。綫段 $M_1M_2$ 是直角三角形 $MM_1M_2$ 的斜边(图 1.6)，由勾股定理得:

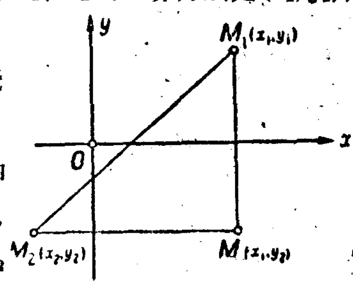


图 1.6

$$|M_1M_2|^2 = |MM_1|^2 + |MM_2|^2,$$

由图不难看出:

$$|M_1M| = |x_1 - x_2|, \quad |M_1M| = |y_1 - y_2|.$$

这里取絕对値，因为綫段的長度总不会是負数。于是

$$|M_1M_2|^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$$
$$=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

或者

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \tag{1}$$

这就是所求的公式。

**例** $M_1(-2,3)$与$M_2(6,-12)$之間的距离为：

$$|M_1M^2|=\sqrt{(-2-6)^2+(3-(-12))^2}$$
$$=\sqrt{64+225}$$
$$=17.$$

这个公式对于$M_1M_2$平行于$x$軸或$y$軸的情形也是对的。事实上，如果$M_1M_2$平行于$x$軸，那么$y_1=y_2$，于是

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|.$$

平行于$y$軸的情形也一样。

特别地，一点$M(x,y)$到原点的距离$r$就是：

$$r=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

(2)綫段的定比分点，已知两点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$；$M(x,y)$是綫段$M_1M_2$上的一点，它分綫段之比为$\lambda(\lambda\geqslant 0)$，即

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda$$

求$M$点的坐标。

由$M_1$、$M$和$M_2$分别引$x$軸的垂綫，垂足分别是$P_1$, $P$和$P_2$(图 1.7)。由相似性有

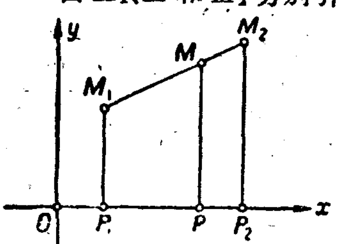


图 1.7

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda$$

而

$$|P_1P|=|x-x_1|,$$
$$|PP_2|=|x_2-x|,$$

所以，有

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\lambda,$$

同样，也可以得到

$$\frac{|y-y_1|}{|y_2-y|}=\lambda,$$

或者

$$\left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right|=\lambda,\quad \left|\frac{y-y_1}{y_2-y}\right|=\lambda. \tag{3}$$

在所考虑的情形下，$M_1$、$M$、$M_2$ 是直綫上顺序的三个点，因而 $x-x_1$ 与 $x_2-x$ 同号，$y-y_1$ 与 $y_2-y$ 同号，所以(3)中絕对值的符号可以不要，即

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda. \tag{4}$$

从(4)中解出 $x$ 和 $y$:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{5}$$

例如，如果 $M$ 是綫段的中点，那么 $\lambda=1$，就有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{6}$$

这样的分点通常称为内分点。还有所謂外分点，即点 $M$ 在 $M_1$ 与 $M_2$ 的联綫上，但在綫段 $M_1M_2$ 之外。对于外分点同样也考虑 $|M_1M|$ 与 $|MM_2|$ 之比。以上的推导中，在(3)以前完全相同，但由(3)到(4)是考虑到 $M_1$、$M$、$M_2$ 这三个点的次序，因之在外分点的情形就不同了。这时，考虑三点的次序，不难看出，$x-x_1$ 与 $x_2-x$ 反号，$y-y_1$ 与 $y_2-y$ 也反号。于是代替(4)的应为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=-\lambda,\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=-\lambda, \tag{4'}$$

其余的推导就一样了。

以上的分析表明：在內分点的情形，由 $M_1$ 到 $M$ 与由 $M$ 到 $M_2$ 的方向相同，因而得出(4)；而在外分点的情形，由 $P_1$ 到 $P$ 与由 $P$ 到 $P_2$ 的方向相反，因而得出(4′)。因之，如果我們在考慮綫段长度之比的同时也考慮綫段的方向，方向相同的取正号，方向相反的取負号，换句話說，內分点的分比用正数表示，而外分点的分比用負数表示，那么內外分点的情形就統一起来了，它們統一的公式就是(5)。

**例**　設 $P(x,y)$ 外分 $P_1(1,2)$ 与 $P_2(3,5)$ 之比为 $-\frac{1}{2}$，求 $P$ 的坐标。

用公式(5)即得

$$x=\frac{1-\frac{1}{2}\times 3}{1-\frac{1}{2}}=-1,$$

$$y=\frac{2-\frac{1}{2}\times 5}{1-\frac{1}{2}}=-1.$$

最后，着重指出，点的坐标必須先有了坐标系才有意义；并且，如果坐标系选得不同，一般的，同一个点在不同的坐标系中有不同的坐标，反之，同样一对数 $(x,y)$ 在不同坐标系下也对应不同的点。例如，$Oxy$ 与 $O'x'y'$ 是两个不同的坐标系，它們的坐标軸的方向相同，而 $O'$ 在坐标系 $Oxy$ 中的坐标是 $(a,b)$ 現在我們看，任一点 $M$ 在这两个不同的坐标系下的坐标有何关系。

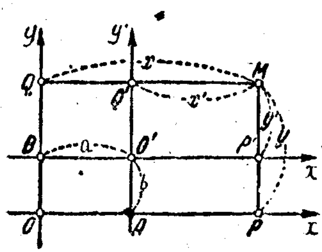


图　1.8

設 $M$ 在 $Oxy$ 中的坐标为 $(x,y)$，而在 $O'x'y'$ 中的坐标为 $(x',y')$（图 1.8）

从图上不难看出 $x,y$ 与 $x',y'$ 之間的关系为：

$$x=x'+a,$$
$$y=y'+b. \tag{7}$$

对于这种情况，我們可以把坐标系 $O'x'y'$ 看成由坐标系 $Oxy$ 經过移軸得出的，(7)就是移軸的坐标变换公式。

## §2. 方程与图形

上一节中，我們初步說明了坐标法，即說明了如何通过直角坐标系来确立平面上的点与数对——它的坐标——之間的一一对应，以及如何通过坐标来解决一些簡单的問題。現在要进一步說明，如何通过坐标系来建立函数与图形和方程与图形（在平面情形通常是曲綫）之間的联系。

### 1. 曲綫的方程

曲綫，通常都是作为物体的形状、或物体运动的軌迹而出現的。除了大家熟悉的最常見的直綫与圓外，还有許多其他的也是常見的較复杂的曲綫，如圓形物体的斜投影就呈橢圓形，行星运动的軌道也是橢圓形，抛射体运动的軌迹是抛物綫等。許多簡单而重要的曲綫，都具有一定的規律性，这个規律性常常就反映为曲綫上点所共同具有的某些特征性質，即曲綫可以看成具有某些特征性質的点所构成的。例如，半徑为 $R$ 的圓就可以看成为所有到一定点距离为 $R$ 的点构成的。而在引进坐标系以后，由于点完全被它的坐标所决定，因而曲綫上的点的共同性質，就反映为曲綫上点的坐标 $(x, y)$ 所应当滿足的限制条件，它們常常被表示为一个等式：

$$F(x, y)=0,$$

叫作曲綫的方程。或者，有时可以写成 $y=f(x)$。

所以，求一条曲綫的方程，实际上就是，在給定的坐标系下，将此曲綫的几何性質用代数式子写出来。

**例 1** 設已知两点 $M_1(1,2)$，$M_2(0,-3)$，求綫段 $M_1M_2$ 的中垂綫的方程。

首先，我們知道 $M_1M_2$ 的中垂綫可以看成是由所有到 $M_1$、$M_2$ 等距离的点构成的，也就是說，它是到 $M_1$ 和 $M_2$ 距离相等的点的軌迹。

設軌迹上任意一点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$。

根据条件：$|M_1M|=|MM_2|$。所以，$x$、$y$ 应满足关系

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(y+3)^2}.$$

两边平方，化簡后得到

$$x+2y+4=0. \tag{1}$$

得到的是不是 $M_1M_2$ 的中垂綫的方程呢？也就是，它是不是完全反映了曲綫的几何性質呢？

显然，軌迹上的点的坐标 $x, y$ 必須滿足方程(1)。反之，滿足上方程的 $x, y$ 所对应的点 $P(x, y)$ 必在中垂綫上，这只要証明，如果 $x, y$ 适合方程(1)，則 $M(x, y)$ 与 $M_1$ 和 $M_2$ 的距离相等。这只要通过計算便可以得到：

$$\because \quad |M_1M|=\sqrt{(x-1)^2-(y-2)^2},$$
$$|MM_2|=\sqrt{x^2+(y+3)^2}.$$

因而

$$|M_1M|^2-|MM_2|^2=2x+10y+4=0.$$
$$\therefore \quad |M_1M|^2=|MM_2|^2,$$

即

$$|M_1M|=|MM_2|.$$

所以方程(1)就是 $M_1M_2$ 中垂綫的方程。

**例2** 求平行于 $y$ 軸且与 $x$ 軸交于 $(a, 0)$ 的直綫的方程（图 1.9）。

首先，直綫上所有点的橫坐标 $x$ 都等于 $a$；反之，不在直綫上的点的橫坐标都不等于 $a$。所以，此直綫的方程为：

$$x=a.$$

同样地，平行于 $x$ 軸，而与 $y$ 軸交于 $(0, b)$ 的直綫的方程为

$$y=b.$$

特别，$x$ 軸和 $y$ 軸的方程分别为

$$y=0,$$

和

$$x=0.$$

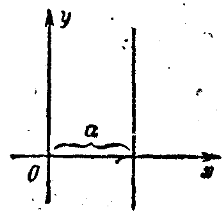

图 1.9

**例 3** 求圓心在原点、半徑为 $R(>0)$ 的圓的方程。

設圓上任一点 $M$ 的坐标为 $(x, y)$。根据它与圓心（原点）的距离都等于 $R$ 的特征。$x$、$y$ 应满足

$$\sqrt{x^2+y^2}=R,$$

或者

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2}$$

显然，圓上任一点的坐标都满足(2)；反之，也不难証明，任一点，只要它的坐标适合(2)，则它与原点的距离必为 $R$，即这一个点必在此圓上。所以(2)就是圓心为原点，半徑为 $R$ 的圓的方程。

一般地，同样的方法可以得到圓心在 $(x_0, y_0)$、半徑为 $R$ 的圓的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

同点的坐标一样，曲綫的方程也必須是先取定了坐标系才有意义，同一条曲綫在不同坐标下的方程一般的是不一样的，以上例而論，同样一个半徑为 $R$ 的圓，按照坐标系的原点取在圓心或不在圓心，就得到了不同的方程。

**2. 函数的图象，方程的图形**

建立曲綫的方程，这只是問題的一方面；另一方面，給定了函数 $y=f(x)$，或方程 $F(x, y)=0$，有时，我們需要在确定的坐标系下給出它的图形。

設給出了函数 $y=f(x)$，而且給定了平面上的一个直角坐标

系 $Oxy$。由 $(x, f(x))$ 便可以确定一点；$x$ 变动时，则这个点的軌迹一般是一条曲綫，即所謂函数 $y=f(x)$ 的图象。例如，自由落体落下的距离 $s$ 与时間 $t$ 的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，$g$ 是重力加速度，在确定的平面直角坐标系中，它的图象是一条抛物綫的右半枝（图 1.10）。

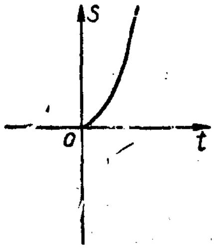


图 1.10

图形有鮮明的直观性，并且它的一些几何性质就反映了函数的一些重要性質，例如曲綫的上升与下降就反映了当自变量 $x$ 增加时，函数值 $y$ 是增大还是减小，曲綫的陡与平就反映了当 $x$ 改变时，$y$ 变化的快慢，有时，也需要直接从图形上測出自变量所对应的函数值。这些却說明了研究函数与图形的关系，对理解函数的性質和精确繪制函数的图形都是十分必要的。

当然，在更多的問題中，給出的变量之間的关系不一定呈現为明显的 $y=f(x)$ 的关系，而是一个方程 $F(x, y)=0$。例如，理想气体，在溫度不变时，压力 $P$ 与体积 $V$ 应滿足关系式 $PV=K$，$K$ 为常数；以原点为圓心，半徑为 $R$ 的圓作圓周运动的質点的坐标 $(x, y)$ 应滿足关系式 $x^2+y^2=R^2$。因此，我們将一般地討論方程 $F(x, y)=0$ 的图形。

在給定的坐标系下，滿足方程 $F(x, y)=0$ 的任一对数 $(x, y)$ 就确定了平面上的一点，而它們的全体就构成了平面上的一条曲綫，是此方程的曲綫。

**例 1**　$xy=1$ 的图形是一条双曲綫。

**例 2**　$x=1$ 的图形是一条平行于 $y$ 軸的直綫。

**例 3**　$x^2-1=0$ 的图形是两条平行于 $y$ 軸的直綫 $x=1$ 和 $x=-1$。

**例 4**　$x^2+y^2=0$ 的图形是一个点 $(0,0)$。

如何繪出复杂一些的方程的图形？大家熟悉的方法是描点法；以后，我們将看到，由于通过坐标系建立了曲綫与方程的联系，便可以通过对方程的討論来研究图形的性质。

**3. 总結**

我們对曲綫与方程的关系給出一个确切的定义：在給定的平面直角坐标系下，$F(x, y)=0$ 是曲綫 $C$ 的方程，如果曲綫上任一点的坐标 $(x, y)$ 都满足方程；并且，所有适合方程的 $(x, y)$ 所对应的点都在这条曲綫上。

通过平面直角坐标系，建立了曲綫与方程的联系，这就进一步揭示出数与形的联系，使数与形結合起来。数形結合使我們有可能通过对数量关系的討論来研究图形的性质，另一方面也可以利用几何图形直观地反映函数或方程中的变量之間的关系，有时还能由几何形象中提示解决問題的途徑。这两方面都是很重要的，并且不能截然分割，但在本門課程中将着重前者。因此，我們今后碰到的問題常常是：給了軌迹条件，如何通过坐标系建立它的方程，以及进一步通过对方程的討論，研究方程的图形的性质。下面，我們将通过对几种常見曲綫的討論来体現这一点，一方面熟悉和了解这些曲綫的重要几何性质，同时也学习和掌握坐标方法。

# 第二章　直綫和圓

我們将首先討論两种最簡单最常見的曲綫——直綫和圓；建立它們的方程，幷討論它們的几何性質与方程的联系。一方面更进一步加深对这两种曲綫的了解，同时，为进一步研究其它較复杂的曲綫打下基础。有关直綫和圓的知識在今后的学习中会經常不断的运用，要求讀者能熟練掌握它們。

## §1. 直綫的方程

一点和一个方向就完全确定了一条直綫，点可以完全由它的坐标所确定，但如何确定直綫的方向呢？我們将用直綫与 $x$ 軸的夹角来規定直綫在平面中的方向，确切地說，“直綫 $l$ 与 $x$ 軸的夹角”是指由 $x$ 軸按反时鉀方向到直綫的角度 $\alpha$。显然，这样的角度有两个，它們相差 $\pi$。我們約定 $0\leqslant\alpha<\pi$，称这样的 $\alpha$ 为直綫的傾角(图 2.1)。它完全确定了直綫在平面中的方向。

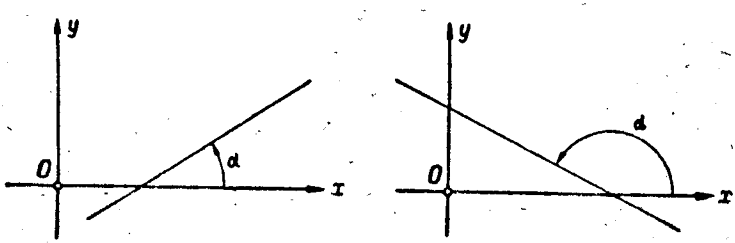


图　2.1

下面，我們首先从这一个大家熟知的直綫的性質来建立直綫的方程。

1）点斜式：已知直綫通过一点 $M_0(x_0, y_0)$，傾角为 $\alpha$，求它的