超　　越　　数

C. L. Siegel 著

魏 道 政 譯

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街117号）
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号

書店总經售

1/2

×1092 1/32

字数：55,000

定价：(10) 0.42元

目　录

序

这本小册子是根据 1946 年春季学期我在 Princeton 的演講稿經过很小的改动而写成的. 把它称为超越数理論是不适当的，因为我們关于超越数的知識还是很有限的. 本書处理了一些特殊而比較有趣的超越数問題，但这并不仅仅是一些零碎例子的蒐集，因为它还包含着一个方法，这方法在寻求更一般的結果中或許是有用的.

C. L. Siegel

1949 年 4 月, Princeton, New Jersey.

第一章

指数函数

在超越数方面最为著名的結果就是 Lindemann 在 1882 年所証明的 π 的超越性．他的方法基于 Hermite 早先的工作，Hermite 在 1873 年發現了 e 的超越性．这兩个結果都包含在广义的 Lindemann-Weierstrass 定理之中，这个定理我們將在 §12 中証明．我們先从几个比較簡單的問題，就是先从 e 和 π 的無理性及一些有关的問題开始．

§1. e 的無理性

e 的無理性的常見的証明如下：分級数

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

为兩部分

$$e=s_n+r_n;\quad s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\quad r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\ (n=1,2,\cdots).$$

因为

$$r_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)<\frac{e-1}{(n+1)!},$$

所以我們得到

$$e=s_1+r_1<2+\frac{e-1}{2},\qquad e<3;$$

因此

$$0<r_n<\frac{2}{(n+1)!}.$$

命

$$n!s_n=a_n,\quad n!r_n=b_n,$$

則 a_n 是整数而

$$0<b_n<\frac{2}{n+1}\leqslant 1\quad (n=1,2,\cdots).$$

这証明了 $n!e(=a_n+b_n)$ 决不是一个整数，从而 ne 决不是一个整数．換句話說，e 是無理数．

假如我們用 e^{-1} 的級数来代替 e 的級数，則証明就更簡單些．此时

$$e^{-1}=\sigma_n-\rho_n,\ \sigma_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},\quad \rho_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots)$$

及

$$0<(-1)^{n+1}\rho_n=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\cdots<\frac{1}{(n+1)!}.$$

命

$$n!\sigma_n=\alpha_n,\quad n!\rho_n=\beta_n,$$

則可知 α_n 是整数及

$$0<(-1)^{n+1}\beta_n<\frac{1}{n+1}<1.$$

所以 $n!e^{-1}(=\alpha_n+\beta_n)$ 决不是一个整数，从而 ne^{-1} 决不是一个整数．

我們还可以証明得更多一点，即証明 e 不是一个二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，这里 $a,\ b,\ c$ 是不全为 0 的整数．考慮式子

$$E_n=n!(ae+ce^{-1}),$$

其中整数 a 和 c 不同时为 0．把此式的右端展开，便有

$$E_n=S_n+R_n,\ \ S_n=aa_n+c\alpha_n,\ \ R_n=ab_n+c\beta_n,$$

其中 S_n 是整数，而絕对值

$$|R_n|\leqslant|ab_n|+|c\beta_n|<\frac{2|a|+|c|}{n+1},$$

因此对于所有 $\geqslant 2|a|+|c|$ 的 n，都有

$$|R_n|<1.$$

另一方面从遞推公式

$$nR_{n-1}-R_n=a(nb_{n-1}-b_n)+c(n\beta_{n-1}-\beta_n)=a+(-1)^nc$$

可知，三个数 R_{n-1}，R_n，R_{n+1} 中至少有一个异于 0，否則卽得 $a+c=0$，$a-c=0$，卽 $a=0$，$c=0$. 这証明了存在一个正整数 ν，使得 E_ν 不是整数，因此对于任何整数 b，数

$$b+\frac{E_\nu}{\nu!}=ae+b+ce^{-1}$$

常不等于 0. 这就是說，对于任意的不全为 0 的整数 a, b, c 常有

$$ae^2+be+c\neq 0.$$

换句話說，e 不是一个二次無理数.

§2. 运算子 $f(D)$

我們用 D 表示关于变数 x 的微分。假如

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots$$

是一个冪級数，它的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是实数或者复数；$\varphi=\varphi(x)$ 是 x 的一个函数，那末我們定义

$$f(D)\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}a_nD^n\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{d^n\varphi}{dx^n}. \qquad (1)$$

为了避免收敛性与可微分性的問題，我們將只应用运算子 $f(D)$ 于下面兩种情況：或者 φ 是一个多項式；或者 f 是一个多項式而 φ 具有各級导数. 在这兩种情况下，級数（1）都是有限的.

对于二冪級数 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$，显然有

$$\begin{aligned}(f_1(D)+f_2(D))\varphi&=f_1(D)\varphi+f_2(D)\varphi,\\(f_1(D)f_2(D))\varphi&=f_1(D)(f_2(D)\varphi).\end{aligned} \qquad (2)$$

其次，假如 $a_0\neq 0$，則

$$f^{-1}(t)=b_0+b_1t+\cdots \quad (b_0=a_0^{-1})$$

存在，且由（2），对于多項式 φ

$$f^{-1}(D)(f(D)\varphi)=\varphi.$$

假如冪級数 f 及多項式 φ 都具有整系数，則 $f(D)\varphi$ 也具有整系数；如 $a_0=\pm1$，則 $f^{-1}(D)\varphi$ 也具有整系数.

我們定义

$$J\varphi=\int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

于是

$$DJ\varphi=\varphi(x),\quad JD\varphi=\varphi(x)-\varphi(0)$$

及

$$J^{n+1}\varphi=\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt \quad (n=0,\,1,\,\cdots). \tag{3}$$

我們特别对 $\varphi=e^{\lambda x}P$ 的情况感到兴趣，其中 λ 是一个常数，$P=P(x)$ 是一个多項式．因为

$$D(e^{\lambda x}P)=e^{\lambda x}(\lambda+D)P,$$

所以

$$D^n(e^{\lambda x}P)=e^{\lambda x}(\lambda+D)^nP \quad (n=1,\,2,\,\cdots), \tag{4}$$

而且

$$(\lambda+D)^nP=Q(x) \tag{5}$$

仍旧是一个多項式．反之，假如任意給定 $\lambda\neq 0$ 及多項式 Q，則由（5）得出

$$P=(\lambda+D)^{-n}Q,$$

而且这是微分方程

$$D^n(e^{\lambda x}P)=e^{\lambda x}Q$$

的唯一的多項式解．当 $\lambda=\pm 1$ 时，假如多項式 Q 具有整系数，則多項式 P 也具有整系数．

§3. 用有理函数逼近 e^x

我們現在来定出兩个 n 次多項式 $A=A(x)$ 及 $B=B(x)$，使得和 $e^x+\dfrac{A}{B}$ 在点 $x=0$ 有一 $2n+1$ 次零点．从这个条件卽可得到

$$Be^x+A=R=cx^{2n+1}+\cdots, \tag{6}$$

这里 $R=R(x)$ 是一从 x 的 $2n+1$ 次方开始的冪級数．我們写出 A 和 B 使帶有未定系数，并使（6）式兩端方次为 0，1，…，$2n$ 的項的系数依次相等，由是得到了以 A 和 B 的 $2n+2$ 个未定系数为未知数的 $2n+1$ 个齐次綫性方程．这証明了

(6)式有不全为 0 的解 A, B. 并且由此可以推出 $c\neq 0$.

为了得出 A 和 B 的具体公式,我們微分(6)式 $n+1$ 次,于是得到

$$D^{n+1}(Be^x)=D^{n+1}R,$$

$$e^x(1+D)^{n+1}B=D^{n+1}R=c_0x^n+\cdots, \tag{7}$$

这里

$$c_0=(2n+1)\cdots(n+1)c.$$

由于 $(1+D)^{n+1}B$ 是一个次数不超过 n 的多项式,所以

$$(1+D)^{n+1}B=e^{-x}(c_0x^n+\cdots)=c_0x^n+\cdots=c_0x^n, \tag{8}$$

即

$$B=c_0(1+D)^{-n-1}x^n.$$

用同样的方法可以求得 A:

$$D^{n+1}(Ae^{-x})=D^{n+1}(Re^{-x}),$$

$$e^{-x}(-1+D)^{n+1}A=c_0x^n+\cdots,$$

$$(-1+D)^{n+1}A=e^x(c_0x^n+\cdots)=c_0x^n+\cdots=c_0x^n,$$

$$A=c_0(-1+D)^{-n-1}x^n.$$

这証明,除了任意的常数因子 c_0 外, A 和 B 是唯一的. 如果取 $c_0=1$, 则

$$A(x)=(-1+D)^{-n-1}x^n,\quad B(x)=(1+D)^{-n-1}x^n \tag{9}$$

都具有整系数. 其次,由(7)和(8)

$$D^{n+1}R=x^ne^x.$$

因为 R 和它的首 n 次导数在点 $x=0$ 的值都等于0, 所以由(3),得到

$$R=J^{n+1}D^{n+1}R=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nt^ne^tdt\quad(n=0,1,\cdots),$$

即

$$R(x)=\frac{x^{2n+1}}{n!}\int_0^1t^n(1-t)^ne^{tx}dt\quad(n=0,1,\cdots). \tag{10}$$

于上式中以 $1-t$ 代 t, 得到

$$R(x)=\frac{x^{2n+1}}{n!}\int_0^1t^n(1-t)^ne^{(1-t)x}dt,$$

所以最后得到

$$R(x)=\frac{x^{2n+1}}{n!}e^{\frac{x}{2}}\int_0^1 t^n(1-t)^n\cosh\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)x\right\}dt$$
$$(n=0,\ 1,\ \cdots). \tag{11}$$

§4. 对于有理数 $a\neq 0$，数 e^a 的無理性

由(10)可知，对于任何复数 x，

$$|R(x)|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{n!}e^{|x|}, \tag{12}$$

又对于任何正数 x，

$$R(x)>0. \tag{13}$$

現在設 $x=m$ 是一个正整数，于是 $A(m)$ 和 $B(m)$ 都是整数．設 e^m 是有理数，且 $q>0$ 是它的分母，則由(6)

$$qR(m)=r$$

是整数．但由(12)和(13)，对于所有充分大的 n

$$0<r\leqslant q\frac{m^{2n+1}}{n!}e^m=qme^m\frac{m^{2n}}{n!}<1.$$

这是一个矛盾．

因此，所有的乘冪 $e^m(m=1,2,\cdots)$ 都是無理数．假如 a 是任意一个 $\neq 0$ 的有理数，則可以把它写成 $a=\frac{m}{r}$，其中整数 $m>0$，$r\neq 0$．由 $e^m=(e^a)^r$ 即知，对于任何有理数 $a\neq 0$，数 e^a 都是無理数．

§5. π 的無理性

我們已知，n 次多項式 $A(x)$ 与 $B(x)$ 由公式

$$B(x)e^x+A(x)=R(x)=cx^{2n+1}+\cdots \tag{14}$$

唯一地決定，其中 $c\neq 0$ 是已給的常数．以 $-x$ 代 x，并乘以 e^x，便得

$$A(-x)e^x+B(-x)=e^xR(-x)=-cx^{2n+1}+\cdots,$$

因此

$$A(-x)=-B(x). \tag{15}$$

此式也可以用 A 和 B 的表示式(9)来証明.

取 $x=\pi i$, 并应用(11), (14)及(15), 則有

$$e^{\frac{x}{2}}=i, \cosh\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)x\right\}=\cos\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)\pi\right\}=\sin \pi t,$$

$$A(\pi i)+A(-\pi i)=R(\pi i), \tag{16}$$

$$R(\pi i)=(-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n \sin \pi t\, dt. \tag{17}$$

被积函数在区間 $0<t<1$ 中是正的,所以

$$R(\pi i)\neq 0. \tag{18}$$

函数 $A(x)+A(-x)$ 是变数 x^2 的 $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$ 次整系数多項式. 倘若 π^2 是一个有理数, $q>0$ 是它的分母,則由(16),数

$$q^{\nu}R(\pi i)=j$$

是一整数. 但由(17)和(18)可知,对于所有充分大的 n

$$0<|j|\leqslant\frac{q^{\frac{n}{2}}\pi^{2n+1}}{n!}<1.$$

此矛盾証明了 π^2 是無理数,因而 π 本身也是無理数.

§6. 对于有理数 $a\neq 0$, 数 $\operatorname{tg} a$ 的無理性

命

$$A(x)-A(-x)=xP(x^2),\quad A(x)+A(-x)=Q(x^2),$$

于是 $P=P(x^2)$, $Q=Q(x^2)$ 分别是 x^2 的 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, $\left[\frac{n}{2}\right]=\nu$ 次整系数多項式,且

$$2A(x)=Q+xP,\quad 2A(-x)=Q-xP.$$

以 $e^{-\frac{x}{2}}$ 乘(14), 并利用(11), (15); 則得

$$A(x)e^{-\frac{x}{2}}-A(-x)e^{\frac{x}{2}}=R(x)e^{-\frac{x}{2}},$$

$$xP\cosh\frac{x}{2}-Q\sinh\frac{x}{2}=R(x)e^{-\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{x^{2n+1}}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^n\cosh\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)x\right\}dt=S(x)\quad(\text{定义}). \tag{19}$$

現在設 $a^2=\pm b$ 是一个 $\neq 0$ 的有理数，并設 $\operatorname{tgh} a/a$ 也是有理数．置 $x=2a$，并以 $q>0$ 表示 $x^2=4a^2=\pm 4b$ 的分母．于是

$$x\cosh\frac{x}{2}=\gamma r,\ \sinh\frac{x}{2}=\gamma s,$$

这里 r, s 是整数，而 $\gamma\neq 0$．数 $q^\nu P(x^2)$, $q^\nu Q(x^2)$ 都是整数，所以由(19)可知

$$\gamma^{-1}q^\nu S(x)=j$$

也是一个整数，然而

$$|j|\leqslant\left|\frac{x}{\gamma}\right|e^{\left|\frac{x}{2}\right|}\frac{q^{\frac{n}{2}}|x|^{2n}}{n!}\to 0\quad(n\to\infty);$$

所以我們若能証明 $R(x)\neq 0$，便可得出矛盾．在 $x^2\geqslant-\pi^2$ 的情況，因为(19)式中的被积函数在区間 $0<t<1$ 上是正的，所以不等式 $R(x)\neq 0$ 显然成立．为了完成其余情况的証明，我們更詳細地記 $A=A_n$, $B=B_n$, $R=R_n$, $c=c_n$；于是

$$B_ne^x+A_n=R_n=c_nx^{2n+1}+\cdots,$$

$$B_{n-1}e^x+A_{n-1}=R_{n-1}=c_{n-1}x^{2n-1}+\cdots\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$\begin{aligned}A_{n-1}B_n-A_nB_{n-1}&=R_{n-1}B_n-R_nB_{n-1}=\\&=c_{n-1}B_n(0)x^{2n-1}+\cdots=c_{n-1}B_n(0)x^{2n-1},\end{aligned}\tag{20}$$

因为 $A_{n-1}B_n-A_nB_{n-1}$ 是 x 的一个 $2n-1$ 次多項式．若 $B_n(0)=0$，則 $A_n(0)=B_n(0)-R_n(0)=0$，而公式

$$(B_{n-1}+x^{-1}B_n)e^x+(A_{n-1}+x^{-1}A_n)=c_{n-1}x^{2n-1}+\cdots$$

將与 A_{n-1}, B_{n-1} 的唯一性相冲突，所以 $B_n(0)\neq 0$．这一点也可以从式子 $B(x)=(1+D)^{-n-1}x^n$ 得到証明，因为 $B_n(0)=$ $=\binom{-n-1}{n}n!\neq 0$．

由(20)可知，对于任何 $x\neq 0$，$R_{n-1}B_n-R_nB_{n-1}\neq 0$，所以二数 $R_{n-1}(x)$, $R_n(x)$ 中至少有一个异于0．所以我們証明了：当 a^2 是 $\neq 0$ 的有理数时，$\operatorname{tgh} a/a$ 是無理数．

將实数情形和虚数情形分开，可知，对于任何正有理数 b，$\operatorname{tgh}\sqrt{b}/\sqrt{b}$ 及 $\operatorname{tg}\sqrt{b}/\sqrt{b}$ 都是無理数．特别，对于任何有理数 $a\neq 0$，$\operatorname{tg}a$ 是無理数．因为 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ 是有理数，所以这个証明包含了 π 是無理性数証明．

§7．函数 $P_1e^{\rho_1 x}+\cdots+P_m e^{\rho_m x}$

我們来研究下面的問題：設已給 m 个互不相同的复数 ρ_1，$\cdots$，ρ_m 及 m 个非負整数 n_1，$\cdots$，n_m，并設

$$\sum_{k=1}^{m}(n_k+1)=N+1; \tag{21}$$

要定出 m 个次数分别是 $n_1,\cdots,n_m$ 的多項式 $P_1(x),\cdots,P_m(x)$，使得函数

$$R=P_1e^{\rho_1 x}+\cdots+P_m e^{\rho_m x} \tag{22}$$

在 $x=0$ 有一 N 次零点．对特别的情况：$m=2$；$n_1=n_2$；$\rho_1=$ $=1$；$\rho_2=0$，这个問題的解已在 §3 中給出了．

写出 P_1，$\cdots$，P_m 使帶有未定系数，并考虑 R 的冪級数展开式中次数为 $0,1,\cdots,N-1$ 的各項，我們便得到以 $(n_1+1)+$ $+\cdots+(n_m+1)$ 个未定系数为未知数的 N 个齐次綫性方程．由于(21)，可知此方程組有一不全为 0 的解．这証明了存在 m 个不全恒等于 0 而次数 $\leqslant n_k$ 的多項式 $P_k(x)$ $(k=1,\cdots,m)$，使得 R 的冪級数取如下的形式：

$$R=c\frac{x^N}{N!}+\cdots, \tag{23}$$

这里 c 是某个常数．

在 $m=1$ 的情况，解显然是

$$P_1=c\frac{x^{n_1}}{n_1!},$$

所以 $c\neq 0$．对任何 m，也可以推出(23)式中的常数 c 不等于 0；并且对于任何已給的 $c\neq 0$，解是唯一的．

更詳細地写 $N=N_m$，并設 $m>1$．于是由(4)和(22)

$$D^{n_m+1}(Re^{-\rho_m x})=\sum_{k=1}^{m}D^{n_m+1}(e^{(\rho_k-\rho_m)x}P_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}e^{(\rho_k-\rho_m)x}(\rho_k-\rho_m+D)^{n_m+1}P_k; \tag{24}$$

由(23)

$$D^{n_m+1}(Re^{-\rho_m x})=cD^{n_m+1}\left(\frac{x^{N_m}}{N_m!}e^{-\rho_m x}\right)+\cdots=$$

$$=c\frac{x^{N_{m-1}}}{N_{m-1}!}+\cdots. \tag{25}$$

因为 $m-1$ 个多项式

$$Q_k=(\rho_k-\rho_m+D)^{n_m+1}P_k\quad(k=1,\cdots,m-1)$$

与 $P_k(k=1,\cdots,m-1)$ 正好有相同的次数，所以它們也不全恒等于0．由(24)及(25)可知，若以 $m-1$，$\rho_1-\rho_m$，$\cdots$，$\rho_{m-1}-\rho_m$ 分別代替 m，ρ_1，$\cdots$，ρ_m，則函数

$$S=D^{n_m+1}(Re^{-\rho_m x})=Q_1e^{(\rho_1-\rho_m)x}+\cdots+Q_{m-1}e^{(\rho_{m-1}-\rho_m)x}$$

卽为我們問題的解，此函数与 R 有相同的常数 c．現在我們得到

$$P_k=(\rho_k-\rho_m+D)^{-n_m-1}Q_k\quad(k=1,\cdots,m-1)$$

以及(由于(3))

$$R=e^{\rho_m x}J^{n_m+1}S=e^{\rho_m x}\int_0^x\frac{(x-t)^{n_m}}{n_m!}S(t)dt. \tag{26}$$

关于 m 来做归納法．我們可以假定 $c=1$，于是

$$P_1=\prod_{l=2}^{m}(\rho_1-\rho_l+D)^{-n_l-1}\frac{x^{n_1}}{n_1!},$$

一般

$$P_k=\prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{m}(\rho_k-\rho_l+D)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\quad(k=1,\cdots,m). \tag{27}$$

为了具体地定出 R，我們先考虑 $m=2$ 的情况．由(26)

$$R=e^{\rho_2 x}\int_0^x \frac{(x-t)^{n_2}}{n_2!}\; e^{(\rho_1-\rho_2)t}\,\frac{t^{n_1}}{n_1!}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\substack{t_1+t_2=x\\ t_1>0,\,t_2>0}} \frac{t_1^{\,n_1}t_2^{\,n_2}}{n_1!\,n_2!}\, e^{\rho_1 t_1+\rho_2 t_2}dt_1 \quad (x>0).$$

假定公式

$$R(x)=\int\limits_{\substack{t_1+\cdots+t_m=x\\ t_1>0,\cdots,t_m>0}}\!\!\cdots\!\!\int \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{t_k^{n_k}}{n_k!}\, e^{\rho_k t_k}\right)dt_1\cdots dt_{m-1} \quad (x>0) \quad (28)$$

当以 $m-1(\geqslant 1)$ 代替 m 时已成立；则

$$S(t)=\int\limits_{\substack{t_1+\cdots+t_{m-1}=t\\ t_1>0,\cdots,t_{m-1}>0}}\!\!\cdots\!\!\int \prod_{k=1}^{m-1}\left(\frac{t_k^{n_k}}{n_k!}e^{(\rho_k-\rho_m)t_k}\right)dt_1\cdots dt_{m-2} \quad (t>0).$$

將此式代入(26)，并令 $t_m=x-t$，即知(28)式对于 m 也成立.

我們称 $R=P_1e^{\rho_1 x}+\cdots+P_m e^{\rho_m x}$ 为一个漸近式.

§8. $R(1)$ 的估值

从(28)式我們可以引出兩个重要的結論：对于任意的互不相同的复数 $\rho_1, \cdots, \rho_m$，我們有上估值

$$|R(1)|\leqslant\frac{e^{|\rho_1|+\cdots+|\rho_m|}}{n_1!\cdots n_m!}; \quad (29)$$

对于任意的互不相同的实数 $\rho_1, \cdots, \rho_m$，我們有下估值

$$R(1)>0. \quad (30)$$

§9. $P_k(1)$ 及其分母的估值

我們利用展开式

$$(\omega+D)^{-n-1}=\omega^{-n-1}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n-1}{r}\omega^{-r}D^r \quad (\omega\neq 0) \quad (31)$$

来求出(27)式中 P_k 的一个估值. 如以 M 表示 $m(m-1)/2$ 个数 $|\rho_k-\rho_l|^{-1}(1\leqslant k<l\leqslant m)$ 的極大值，則有

$$\left|(\rho_k-\rho_l+D)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right|\leqslant M^{n_l+1}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n_l-1}{r}M^rD^r\,\frac{x^{n_k}}{n_k!}=$$

$$=(M^{-1}-D)^{-n_l-1}\,\frac{x^{n_k}}{n_k!} \quad (x>0,\ l\neq k).$$

因此

$$|P_k(x)| \leqslant \prod_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{m} (M^{-1}-D)^{-n_l-1}\frac{x^{n_k}}{n_k!}=$$

$$=(M^{-1}-D)^{n_k-N}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\quad (x>0).$$

其次

$$(M^{-1}-D)^{n_k-N}\frac{x^{n_k}}{n_k!}=M^{N-n_k}\sum_{r=0}^{n_k}\binom{N-n_k+r-1}{r}M^rD^r\frac{x^{n_k}}{n_k!}$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{n_k}\binom{N}{r}M^{N-n_k+r}x^{n_k-r}\leqslant(1+1)^N(M+x)^N=$$

$$=(2M+2x)^N\quad (x>0),$$

所以

$$|P_k(1)|\leqslant(2M+2)^N\quad (k=1,\cdots,m). \tag{32}$$

假如 $\rho_1, \cdots, \rho_m$ 是代数数，则 $P_k(1)$ 也是代数数. 为了求出 $P_k(1)$ 的分母的估值，我們取一正有理整数 q，使 $m(m-1)$ 2 个代数数 $\dfrac{q}{\rho_k-\rho_l}$ $(1\leqslant k<l\leqslant m)$ 都是代数整数. 于是由 (27) 和 (31)，可知 $n_k!q^N P_k(1)$ 是代数整数.

§ 10. 对于实代数数 $a\neq 0$，数 e^a 的超越性

設 $a\neq 0$ 是一个实代数数，并設 e^a 也是代数数. 我們引进由 a 及 e^a 所生成的代数数域 K，并以 h 表示它在有理数域上的次数. 对于 K 中的任意一个数 ξ，我們定义它的矩 $\mathfrak{N}(\xi)=\xi^{(1)}\cdots\xi^{(h)}$，就是 ξ 的 h 个共軛数 $\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(h)}$ 的乘积；又定义

$$\overline{|\xi|}=\max(|\xi^{(1)}|, \cdots, |\xi^{(n)}|).$$

取 $m=h+1$, $\rho_k=(k-1)a$ $(k=1, \cdots, m)$, $n_1=n_2=\cdots=n_m=n\geqslant 1$，其中数 n 將取得充分大；并以 $c_1, c_2, \cdots$ 表示与 n 無关的正有理整数.

現在数 $P_k(1)$ 在 K 中. 应用 (27) 于 K 的 h 个共軛域，則得（由 (32)）

$$|P_k(1)| < c_1^n, \tag{33}$$

因为 $N=m(n+1)-1=mn+h<c_2n$. 又

$$R(1)=P_1(1)e^{\rho_1}+\cdots+P_m(1)e^{\rho_m}$$

也在 K 中. 由上节关于 $P_k(1)$ 的分母的估值可知,我們能定出一数

$$T=c_3^n n!, \tag{34}$$

使得

$$\xi=TR(1)$$

是 K 中的一个整数. 由(30), 此整数不等于 0; 所以

$$|\mathfrak{N}(\xi)|\geqslant 1. \tag{35}$$

另一方面,由 (29) 和 (34), 对于 ξ 的一个共軛数, 例如 $\xi=\xi^{(1)}$, 我們有

$$|\xi|<c_4^n(n!)^{-h}.$$

但此式对于任一其余的共軛数 $\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(h)}$ 未必成立, 因为 $h-1$ 个数 $e^x(x=\rho_k^{(2)},\cdots,\rho_k^{(h)})$ 可能不共軛于 $e^{\rho_k^{(1)}}$. 但由(33)及(34), 对于 ξ 的所有共軛数,我們可得估值

$$|\overline{\xi}|<c_5^n n!.$$

因此,对所有充分大的 n

$$|\mathfrak{N}(\xi)|<c_4^n(n!)^{-h}(c_5^n n!)^{h-1}=\frac{c_6^n}{n!}<1.$$

这和(35)相矛盾.

这証明了:对于任何实代数数 $a\neq 0$, 数 e^a 是一个超越数. 特别 e 本身是超越数.

§11. m 个漸近式的行列式

上述証明中的主要点就是代数数 ξ 不等于 0 这一事实,而这是根据(30)得出的. 倘若 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 仍旧是任意的互不相同的复数, 则我們不再能断言 $R(1)\neq 0$. 为了克服这个困难,我們按照下面的方法进行.

对于任意一个固定的 $k=1,2,\cdots,m$, 我們取 $n_l=n\geqslant 1$