教育部高校学生司推荐

高教最新版

全国各类成人高考
复习考试辅导教材

第2版

专科起点升本科

高等数学(一)

KAOSHI

本书编写组

高等教育出版社
HIGHER
EDUCATION
PRESS

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(一)

第 2 版

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.(一)/《高等数学》(一)编写组编.－2版.－北京:高等教育出版社,2002.7

全国各类成人高考复习考试辅导教材.专科起点升本科

ISBN 7－04－011283－3

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学－成人教育:高等教育－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 042870 号

全国各类成人高考复习考试辅导教材　专科起点升本科　高等数学(一)(第2版)

本书编写组

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
		版　　次	2000年9月第1版
开　　本	850×1168　1/16		2002年7月第2版
印　　张	15.75	**印　　次**	2002年8月第2次印刷
字　　数	390 000	**定　　价**	22.10元

出 版 前 言

2002年，教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，专科起点升本科的复习考试大纲将原来的师范类和非师范类统考科目由原来的8科调整为不分师范类和非师范类的共10科统考科目．新大纲规定了哲学、文学、经济学、教育学、管理学、法学、理学、工学、农学、医学等学科的考试科目和复习考试内容，共编为5册，由高等教育出版社出版．

为了满足广大考生复习备考的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授，以及前大纲编写修订和考试命题研究人员，及时修订和新编了与考纲配套的系列复习考试辅导教材．

本系列辅导教材依据2002年教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》的要求而编写，包括《政治》、《英语》、《教育理论》、《大学语文》、《艺术概论》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《生态学基础》、《医学综合》等共10册．

本系列辅导教材融复习内容与考试内容于一体，不仅有助于考生复习并掌握扎实的基础知识，而且有利于考生把握考试的重点、难点，提高应试能力．其内容的编排与“大纲”的知识系统完全一致，不仅充分体现了“大纲”的知识能力要求，而且注重贴近考试实际，收录了大量的应用性和能力型练习题并附有解题指导和参考答案，使考生在整个学习进程中能够做到“学练结合”，及时检验复习效果，增强应考适应力和信心．

此外，为了更直观地突出书中的重点、难点，更有效地遏制盗版，本版书采取双色印刷，从形式上更加新颖．

本套教材的编写，融入了诸多专家、命题研究人员和一线教师的心血；凝结着“从知识立意向能力立意转化”等现代教育思想的精华；体现了我们出版工作者在考试用书编写方面的整体策划思想．

由于编写时间仓促，书中难免还存在这样那样的不足或错误．为了不断改进和完善本系列教材，使之能更适合广大读者的要求，为考生提高复习备考能力和水平发挥更大作用，我们恳切希望各界人士提出批评指正意见．

高等教育出版社

2002年6月

编者的话

成人高等教育事业近年来得到迅速发展，尤其是专科起点本科班的发展更为显著．为了适应教育事业发展的要求，教育部组织有关专家颁布了重新修订的2002年版《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》．为了能为成人高等教育事业的发展作些贡献，为了尽最大可能给成人考生以有益的帮助，使其能适应形势变化，高等教育出版社组织编写了《全国各类成人高考复习考试辅导教材(专科起点升本科)》．

为了能为读者提供一本优秀的考试辅导书，本书编写人员认真研究了2002年版《考试大纲》，在本书编写中遵循“一个按照、两个针对”的原则：

1．严格按照2002年版《考试大纲》规定的考试内容和考试要求编写．

2．针对成人考生的特点，针对考试命题的基本原则而编写．针对考试命题的基本原则体现在本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容．避开复杂的运算与特殊的技巧性运算．针对成人考生的特点体现在突出基本概念的要素、基本性质的特点及基本计算方法的条理化．强调概念或公式的结构形式．书中选配大量的例题，以有助于读者达到理解掌握．在每个例题中加以分析讲解，侧重于问题的形式特点及解决问题的思想方法．有些例题的后面还给出一些说明，在说明中指出应该引起读者注意的问题或一些带有共性的问题特点．意在引导读者自学并能提高效率．例题中包含了自1994年至2002年全国专升本考试高等数学(一)的试题，以有利于考生明了试题的广度与深度，明了自己的问题．例题中还包含了《考试大纲》中所规定的考试内容的常见的基本问题题型．在以试题为例题的题中给出编号注明，如(9804)表示1998年试题中的第4题，(0021)表示2000年试题中第21题，这使读者能明确该题所出现的年份与该题在该年试卷中出现的位置．

为了加大例题的信息量，我们在选择题中给出了多选题，目的是训练考生对每个选项加以分析，以增强训练力度．需指出入学考试中的选择题都为单选项．如果考试中你能认定某个选项符合题目要求，其余的选项可不再讨论．

在每章中都给出小结，指出本章基本概念、基本运算相关的问题及常见的试题类型．

在每节后选有同步练习题，并在各章后附以参考解答．

本书还附有2002年专升本高等数学(一)试题及参考解答与评分标准，以利于考生对试题有宏观了解．

高等教育出版社考试用书分社对本书的出版作出了大量的工作，作者表示诚挚谢意．

本书编写组

2002年7月

目　　录

第一章　函数、极限、连续 …… 1
第一节　函数 …… 1
同步练习一及参考解答 …… 9
第二节　极限 …… 11
同步练习二及参考解答 …… 25
第三节　连续 …… 28
同步练习三及参考解答 …… 33
小结 …… 35
第二章　一元函数微分学 …… 38
第一节　导数 …… 38
同步练习一及参考解答 …… 48
第二节　微分 …… 51
同步练习二及参考解答 …… 54
第三节　微分中值定理 …… 55
同步练习三及参考解答 …… 58
第四节　洛必达法则 …… 59
同步练习四及参考解答 …… 63
第五节　导数的应用 …… 65
同步练习五及参考解答 …… 76
小结 …… 80
第三章　一元函数积分学 …… 83
第一节　不定积分 …… 83
同步练习一及参考解答 …… 93
第二节　定积分 …… 96
同步练习二及参考解答 …… 108
第三节　定积分的应用 …… 113
同步练习三及参考解答 …… 119
小结 …… 120
第四章　向量代数与空间解析几何 …… 122
第一节　向量代数 …… 122
同步练习一及参考解答 …… 129
第二节　平面与直线 …… 131
同步练习二及参考解答 …… 140
第三节　简单的二次曲面 …… 143
同步练习三及参考解答 …… 145

小结 …… 145
第五章 多元函数微积分学 …… 148
第一节 多元函数、极限与连续性 …… 148
同步练习一及参考解答 …… 150
第二节 偏导数与全微分 …… 150
同步练习二及参考解答 …… 162
第三节 二元函数的极值 …… 166
同步练习三及参考解答 …… 168
第四节 二重积分的概念与性质 …… 168
同步练习四及参考解答 …… 170
第五节 直角坐标系下计算二重积分 …… 170
同步练习五及参考解答 …… 179
第六节 极坐标系下计算二重积分 …… 181
同步练习六及参考解答 …… 185
第七节 二重积分的应用 …… 186
同步练习七及参考解答 …… 188
小结 …… 189
第六章 无穷级数 …… 192
第一节 无穷级数的概念与性质 …… 192
同步练习一及参考解答 …… 194
第二节 正项级数 …… 195
同步练习二及参考解答 …… 200
第三节 任意项级数 …… 201
同步练习三及参考解答 …… 204
第四节 幂级数 …… 205
同步练习四及参考解答 …… 208
第五节 将初等函数展开为幂级数 …… 209
同步练习五及参考解答 …… 213
小结 …… 214
第七章 常微分方程 …… 217
第一节 一阶微分方程 …… 217
同步练习一及参考解答 …… 223
第二节 可降阶的微分方程 …… 224
同步练习二及参考解答 …… 227
第三节 线性常系数微分方程 …… 228
同步练习三及参考解答 …… 235
小结 …… 236
附录 …… 238
2002 年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学(一)试卷 …… 238
2002 年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等数学(一)试题参考答案 …… 240

第一章　函数、极限、连续

第一节　函　数

一、函数的定义

若变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应，则称 y 为 x 的函数．记为 $y=f(x)$．

常称 x 为自变量，y 为函数．称使函数有定义的点的全体为函数的定义域．

由函数定义可以看出，其关键特征是：

x 的允许范围，即函数的定义域；

对应规则，即函数的依赖规则．

因此说函数概念有两个基本要素为：定义域，对应规则(或称依赖关系)．

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才认为它们是同一个函数．

二、函数常用的三种表示方法

解析法，如 $y=f(x)$；图象法；表格法．

三、函数解析表示法中常见的几个形式

1．由一个解析式表示，如 $y=f(x)=x^2+2x+3$．

2．分段函数　如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的，则称之为分段函数．

如

$$y=\begin{cases} x & x\leqslant 0 \\ x+1 & 0<x<1 \\ x^2 & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数，而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数，它是由三个解析式来表达．

3．隐函数　如果函数的对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 给出，则称 y 为 x 的隐函数．

如由方程 $x^2+2xy+2y^2-3x=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 为隐函数．

相对于隐函数来说，人们称由解析表达式 $y=f(x)$ 确定的函数为显函数．

4．参数方程表示的函数　如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来，如

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数．

例 1　下列表达式中可以认作 y 是 x 的函数有哪些？

(1) $y=2$；　　(2) $x^2+y^2-2xy+y=1$；

(3) $\begin{cases}x=t+1\\y=t^3+5\end{cases}$;　　(4) $y=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\2 & x>0\end{cases}$.

分析　判定上述问题的依据是函数的定义.

函数的定义中指出变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某个确定的规则有值与之对应．至于说“对应规则”的特点及 y 的取值特点，并没有限制．因此可能出现：

(1) 当自变量 x 的值变动时，变量 y 的值并不一定随 x 的变化而变化，即 y 有可能总取同一个值．如 $y=2$，虽然表达式中没有出现 x，但是这个表达式可以解释为不论 x 取什么值，y 所对应的值总是 2．因此依函数定义可知，$y=2$ 表示函数．事实上，对于任意常数 C 来说，$y=C$ 也表示一个函数.

(2) 在函数的解析表示法中也没有限定对应关系必须用 $y=f(x)$ 表示，它们的依赖关系可能是某个方程 $F(x,y)=0$，此时称 y 为 x 的隐函数．因此可以将 y 认作由 $x^2+y^2-2xy+y=1$ 确定的 x 的函数.

(3) 在函数的对应关系中也没有限定这个依赖关系必须是 x 与 y 的直接关系，如果 x，y 通过第三个变量联系起来，如 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 也完全允许，此时称之为参数方程表示的函数．因此可以将 $\begin{cases}x=t+1\\y=t^3+5\end{cases}$ 认作由参数方程确定的函数.

(4) 在函数的解析表示法中并没有限定一个函数只能用一个解析式子来表示，因此完全可能出现用两个或三个或更多个解析表达式才能表达一个函数的情形，此时称之为分段函数．因此 $y=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 0\\2 & x>0\end{cases}$ 为 x 的函数.

例 2　下列各组函数中，表示同一个函数的有(　　).

A. $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

B. $y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $y_2=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$；

C. $y_1=\sqrt{x(x+1)}$ 与 $y_2=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$；

D. $y_1=\sqrt{x^2}$ 与 $y_2=x$.

分析　对于 A，$y_1=\cos x$，$y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|$，可知 y_1 与 y_2 的表达式不相同，因此 y_1 与 y_2 不是同一个函数，应排除 A.

对于 B，y_1 的定义域为 $x^2\neq 0$，即 $x\neq 0$；且 $1-x>0$，即 $1>x$．综之为 $\begin{cases}x<1\\x\neq 0.\end{cases}$ 当 $x\neq 0$ 时，$y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$．而 y_2 的定义域为 $x\neq 0$；且 $1-x>0$，即 $1>x$．综之为 $\begin{cases}x<1\\x\neq 0.\end{cases}$ 易见 y_1 与 y_2 的表达式与定义域皆相同．因此 y_1 与 y_2 表示同一个函数，应选 B.

对于 C，y_1 的定义域为 $x(x+1)\geqslant 0$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 解之得 $x\geqslant 0$；或 $\begin{cases}x\leqslant 0\\x+1\leqslant 0\end{cases}$，解之得 $x\leqslant -1$．综之 y_1 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，而 y_2 的定义域为 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x+1\geqslant 0\end{cases}$，解之得 $x\geqslant 0$，

即 $[0, +\infty)$. 易见 y_1 与 y_2 的定义域不同. 因此 y_1 与 y_2 不是同一函数. 应排除 C.

对于 D，$y_1=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x & 当 x<0 时\\ x & 当 x\geqslant 0 时,\end{cases}$ 为分段函数，它与 $y_2=x$ 的表达式不相同. 因此 y_1 与 y_2 不是同一函数，应排除 D.

综之应选 B.

例 3 函数 $f(x)=\ln(x^2-1)$ 与 $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ 在(　　)内为同一函数.

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；　　B. $(-\infty,-1)$；

C. $(1,+\infty)$；　　D. $(-1,+\infty)$.

分析 注意 $f(x)=\ln(x^2-1)$ 的定义域为 $x^2-1>0$，即 $x>1$ 或 $x<-1$，而 $g(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ 的定义域为 $\begin{cases}x-1>0\\ x+1>0,\end{cases}$ 即 $x>1$. 而当 $x>1$ 时，$f(x)=\ln(x^2-1)=\ln(x-1)+\ln(x+1)=g(x)$. 可知，当 $x>1$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一函数. 因此知应选 C.

例 4 (0006) 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant 0\\ \sqrt{x} & x>0,\end{cases}$ 则 $f(0)=$______.

分析 所给函数为分段函数，注意当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\cos x$，因此可得知 $f(0)=\cos 0=1$.

四、定义域的求法

函数的定义域是指使函数有定义的，变量 x 所允许的取值范围，因此求定义域常常是排除那些使函数没定义的点. 通常对于由解析表达式表达的函数所要求的是：

分式中的分母不能为零；

偶次方根号下的表达式不能取负值；

对数的真数必须大于零；

取反正弦、反余弦的值的绝对值不能大于 1；

取正切的角不能为 $k\pi+\frac{\pi}{2}$(k 为整数)；

对于实际问题则需保证其有符合题意的实际意义.

例 5 设 $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$，则 y 的定义域为(　　).

A. $-2<x<3$；　　B. $-2<x\leqslant 3$ 及 $x\neq -1$；

C. $-3\leqslant x\leqslant 3$；　　D. $-2<x\leqslant 3$ 及 $x\neq 1$.

分析 由于函数表达式中偶次方根号下的表达式必须大于或等于零，因此 $9-x^2\geqslant 0$，即 $-3\leqslant x\leqslant 3$. 由于函数表达式中对数的真数必须大于零，因此 $x+2>0$，即 $x>-2$. 又函数表达式为分式，其分母不能为 0，即 $\ln(x+2)\neq 0$，即 $x+2\neq 1$，从而知 $x\neq -1$. 综之有 $-2<x<-1$，及 $-1<x\leqslant 3$.

因此知应选 B.

例 6 (9701) 函数 $y=\frac{1}{x}\ln(2+x)$ 的定义域为(　　).

A. $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$；　　B. $x>0$；

C. $x>-2$；　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$.

分析 由于对数的真数 $2+x>0$，即 $x>-2$. 而函数分母为 $x\neq 0$，可知应选 D.

五、函数符号的运用

函数符号的运用问题可分为两类：

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式，求函数 $f[g(x)]$ 的表达式.

这类问题相当于已知函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$.

2. 已知 $f[g(x)]$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式.

这类问题的求解方法有两种途径：

(1) 令 $u=g(x)$，从中反解出 $x=\varphi(u)$，求出 $f(u)$ 的表达式，再将 u 换为 x，即得 $f(x)$ 的表达式.

(2) 将 $f[g(x)]$ 的表达式凑成 $g(x)$ 的函数关系式. 然后将所有 $g(x)$ 的位置换为 x，则得 $f(x)$.

例 7 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f[f(x)]$.

分析 由于 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，可知函数的依赖关系式为 $f(*)=\dfrac{(*)}{1+(*)}$. 因此当 $x\neq-1$，且 $x\neq-\dfrac{1}{2}$ 时

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}.$$

例 8 设 $f(x^2+1)=x^4+1$，求 $f(x)$.

分析 例 8 与例 7 为反问题类型题目.

解法一 令 $u=x^2+1$，则 $x^2=u-1$，因此 $x^4=(u-1)^2$，进而知

$$f(u)=(u-1)^2+1$$

将上述表达式中的 u 换为 x 可知

$$f(x)=(x-1)^2+1.$$

解法二 由于

$$f(x^2+1)=x^4+1=x^4+2x^2-2x^2+1=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+2$$

因此将上述式中 (x^2+1) 换为 x 可得 $f(x)=x^2-2x+2$.

例 9 设 $f(x)=3x+5$，求 $f[f(x)-2]$.

分析 由题设可知 $f(*)=3(*)+5$，因此

$$\begin{aligned}f[f(x)-2]&=3[f(x)-2]+5\\&=3[(3x+5)-2]+5=9x+14.\end{aligned}$$

例 10 (9806) 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，则 $f(x)=$____.

分析 仿例 8 可得.

解法一 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，可得

$$\begin{aligned}f(u)&=(u-1)^2+3(u-1)+5\\&=u^2+u+3\end{aligned}$$

因此 $f(x)=x^2+x+3$.

解法二 将所给表达式右端凑为 $(x+1)$ 的表达式

$$f(x+1)=(x^2+2x+1)+(x+1)+3$$
$$=(x+1)^2+(x+1)+3$$

因此　$f(x)=x^2+x+3$.

例 11　(9611)　若 $f(x^2+1)=x^4+3x^2+2$，则 $f(x)=$______.

分析　由于 $f(x^2+1)=x^4+2x^2+1+x^2+1=(x^2+1)^2+(x^2+1)$，因此

$$f(x)=x^2+x.$$

六、函数的性质

1. 单调性　设 $y=f(x)$在某区间内有定义，如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在该区间内单调增加.

如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在该区间内单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调.

上述区间可以为有限区间，也可以为无穷区间；可以为开区间，也可以为闭区间.

如果没有指明区间，而是说"$f(x)$为单调函数"，总要理解为 $f(x)$在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y=f(x)$单调性的方法：

(1) **依定义判定**　在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_2)$与 $f(x_1)$. 如果总有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，则 $f(x)$在该区间内单调增加；如果总有 $f(x_2)-f(x_1)<0$，则 $f(x)$在该区间内单调减少.

(2) **依导数的符号判定**　如果在某区间内总有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在该区间内单调增加；如果在某区间内总有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在该区间内单调减少.

通常都采取第二种方法判定(留待第二章介绍).

2. 奇偶性　设 $y=f(x)$的定义区间 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则有 $-x\in D$)，如果对于 D 内任意的点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为 D 内的偶函数，如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为该区间内的奇函数.

上述区间可以为有限区间 $[-a,a]$ 或$(-a,a)$，也可以为$(-\infty,+\infty)$.

判定函数奇偶性的方法是利用定义.

奇、偶函数的图象有如下特点：

奇函数的图象关于原点对称；偶函数的图象关于 y 轴对称.

性质　两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；两个奇(偶)函数之积必为偶函数；奇函数与偶函数之积必为奇函数.

也可以利用上述性质判定函数的奇偶性.

3. 周期性　若存在 $T>0$，对于任意的 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为周期函数，使得上述关系式成立的最小正数 T，称为 $f(x)$的最小周期，简称为函数 $f(x)$的周期.

需指出并不是每个周期函数都有周期.

4. 有界性　设 $y=f(x)$在某区间内有定义. 若存在 $M>0$，对于该区间内任意的 x，恒有 $|f(x)|<M$,则称 $f(x)$在该区间内为有界函数.

上述区间可以为有限区间，也可以为无穷区间；可以为开区间，也可以为闭区间.

如果没有指明区间，而是说"$f(x)$为有界函数"，总要理解为 $f(x)$在其定义区间内为有

界函数.

判定函数有界性的方法通常是利用导数性质判定，留待第二章介绍．这里常采取：

(1) 利用基本初等函数图形.

(2) 适当放大或缩小有关表达式导出其界.

(3) 如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 或 $(a,+\infty)$ 或 (a,b) 内为单调函数，只需分别考察 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$；或考察 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；或考察 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$.

例 12 (9501) 函数 $f(x)=\cos x^3$ 在 xOy 平面上的图形(　　).

A. 关于 x 轴对称；　　　　B. 关于 y 轴对称；

C. 关于坐标原点对称；　　　D. 以上结论都不对.

分析 由于 $f(x)=\cos x^3$，因此 $f(-x)=\cos(-x)^3=\cos(-x^3)=\cos x^3=f(x)$，即 $f(x)=\cos x^3$ 为偶函数，可知其在 xOy 平面上的图形关于 y 轴对称.

故应选 B.

例 13 下列函数中为奇函数的有(　　).

A. $\dfrac{|x|}{x}$；　　　　B. $x\sin x^2$；

C. $x^2\sin x$；　　　　D. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

分析 对于 $f_1(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$f_1(-x)=\dfrac{|-x|}{-x}=\dfrac{|x|}{-x}=-f_1(x)$，可知 $\dfrac{|x|}{x}$ 为奇函数，因此应该选 A.

对于 $f_2(x)=x\sin x^2$，$f_2(-x)=(-x)\sin(-x)^2=-x\sin x^2=-f_2(x)$，即 $f_2(x)=x\sin x^2$ 也为奇函数，因此应选 B.

对于 $f_3(x)=x^2\sin x$，$f_3(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f_3(x)$，即 $f_3(x)=x^2\sin x$ 也为奇函数，因此应选 C.

对于 $f_4(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，$f_4(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f_4(x)$，因此 $f_4(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 也为奇函数，故也应选 D.

综之，应选 A，B，C，D.

例 14 设 $f(x)$ 为奇函数，$F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，$a$ 为不等于 1 的正常数，$F(x)$ 为(　　).

A. 偶函数；　　　　B. 奇函数；

C. 非奇非偶函数；　　D. 奇偶性与 a 有关.

分析 由题设 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(-x)=-f(x)$，又由于

$$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\frac{2a^x-(1+a^x)}{2(1+a^x)}$$

$$=\frac{1-a^x}{2(1+a^x)}f(x)$$

$$F(x)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2-(1+a^x)}{2(1+a^x)}f(x)=\frac{1-a^x}{2(1+a^x)}f(x)$$

因此 $F(-x)=F(x)$，即 $F(x)$为偶函数.

因此应该选 A.

例 15 (9916) 设 $F(x)=(2^x+2^{-x})f(x)$，其中 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的奇函数，判定 $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的奇偶性.

分析 可以利用函数奇偶性定义来判定. 由于

$$F(-x)=(2^{-x}+2^x)f(-x)$$

由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内为奇函数，因此 $f(-x)=-f(x)$，从而

$$F(-x)=-(2^{-x}+2^x)f(x)=-F(x)$$

可知 $F(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的奇函数.

七、初等函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_x，值域为 D_y. 若对 D_y 中的每一个值 y，通过关系 $y=f(x)$,有值 x 与之对应，这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$，常称 $x=\varphi(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数.

相对于反函数 $x=\varphi(y)$来说，原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.

在研究函数时，往往习惯于将 x 作为自变量，将 y 作为因变量. 因此习惯上总把 $x=\varphi(y)$中的 y 换成 x，将 x 换为 y，从而得到 $y=\varphi(x)$. 通常情况下，$y=f(x)$的反函数都是指 $y=\varphi(x)$,或记作 $f^{-1}(x)$.

求反函数的一般步骤为：

(1) 在 $y=f(x)$中将 y 作为已知量，求出 x，即得 $x=\varphi(y)$.

(2) 在 $x=\varphi(y)$中交换 x，y 的位置，即将 x 换为 y，将 y 换为 x，则可得 $y=f(x)$的反函数 $y=\varphi(x)$.

反函数的图形的特点　函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=\varphi(x)$这两条曲线在 xOy 坐标平面上关于直线 $y=x$ 对称.

需指出，不是每一个函数都存在其反函数. 如函数 $y=C$ 不存在反函数.

2. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^\mu$(μ 为实数).

(2) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$.

(3) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

(4) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$.

上述五类函数的定义域、单调性需记熟.

定义　上述五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

3. 复合函数

设变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$，变量 u 是变量 x 的函数 $u=g(x)$.

定义　若对于 x 在某范围中的每一个确定的值，依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应，而对于 u 的此确定值，y 按确定的规则有值与之对应，则称 y 为 x 的复合函数.

若 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则常记为 $y=f[g(x)]$. 称 x 为自变量，u 为中间变量，y 为函

数.

需指出，并不是任何两个函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都能复合成 y 为 x 的函数. 例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$. 可以看出，不论 x 取什么值，相应的 u 总有不小于 2 的值存在. 但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leqslant 1$，因此可知 $\arcsin(x^2+2)$ 是无意义的. 换言之，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合成复合函数.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

常见的问题：

(1) 将基本初等函数复合成复合函数.

(2) 将复合函数分解成一系列的简单函数.

所谓简单函数是指基本初等函数或经过有限个基本初等函数的四则运算而得到的函数.

其分解方法是依由外到里的顺序进行.

(3) 求复合函数的定义域.

依据求函数定义域的原则，由外层到里层考察相应函数在满足前一层次条件下的定义域，直到最里层，即可求出复合函数的定义域.

例 16 设 $f(x)=2^{x-1}$，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 为(　　).

A. $1+\log_2 x$；　　B. $\log_2 2x$；

C. $2\log_2 x$；　　D. $\dfrac{1}{2}\log_2 x$.

分析 先求 $f(x)=2^{x-1}$ 的反函数，由 $y=2^{x-1}$ 解得 $\log_2 y=\log_2 2^{x-1}=x-1$，从而 $x=1+\log_2 y$.

将上面表达式中的 x，y 位置互换，得 $y=1+\log_2 x$ 为 $f(x)=2^{x-1}$ 的反函数，因此应选 A.

由于 $\log_2 2x=\log_2 2+\log_2 x=1+\log_2 x$，可知 B 也正确，易见 C，D 不正确.

综之，本例应选 A，B.

例 17 函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数为(　　).

A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$；　　B. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；　　D. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

分析 只需求出 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数进行对照即可.

(1) 从 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 中解出 x：

$$y(x+1)=x-1$$

$$x=\frac{1+y}{1-y}$$

(2) 将上表达式中的 x 换为 y，将 y 换为 x，可得 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$，即为所求反函数.

可知应选 D.

例 18 (9906) 设 $y=3^u$，$u=v^2$，$v=\tan x$，则 $y=f(x)=$____.

分析 这是复合函数问题，只需依次复合可得.

$$y=3^u=3^{v^2}=3^{\tan^2 x}$$

例 19 将 $y=e^{\sin(x^2+2x)}$ 分解为一系列简单函数.

分析 若从外到里一层层分解. 则可令

$y=e^u$，$u=\sin v$，$v=x^2+2x$

为所求.

说明 本例中 $y=e^u$，$u=\sin v$ 都是基本初等函数，但是 $v=x^2+2x$ 不是基本初等函数，而是两个函数之和，前者为基本初等函数，后者为两个基本初等函数之和，常称之为简单函数.

例 20 求复合函数 $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域.

分析 由外到里将复合函数分解为一系列简单函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=\frac{5x-x^2}{4}$. 再考察各层次函数在满足前一层条件下的定义域：

$u\geqslant 0$ 即 $u=\lg v\geqslant 0$，从而 $v\geqslant 1$，即 $\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$. 进而有 $5x-x^2\geqslant 4$，可化为 $x^2-5x+4\leqslant 0$，解二次不等式化为 $(x-1)(x-4)\leqslant 0$.

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x-4\leqslant 0\end{cases}\quad 或 \begin{cases}x-1\leqslant 0\\x-4\geqslant 0\end{cases}$$

可得 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x\leqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 1\\x\geqslant 4\end{cases}$（舍掉）.

从而可知所求函数的定义域为 $1\leqslant x\leqslant 4$.

例 21 当 x 取值区间为(　　)时，可把 $u=\lg x$ 代入 $y=\sqrt{1-u^2}$ 构成复合函数.

A. $(0,+\infty)$；　　B. $\left(\frac{1}{10},+\infty\right)$；

C. $(0,10)$；　　D. $\left[\frac{1}{10},\ 10\right]$.

分析 由外到里考察两个函数的定义域. $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $1-u^2\geqslant 0$，可得 $-1\leqslant u\leqslant 1$. 为了使复合函数有意义，考察 $-1\leqslant \lg x\leqslant 1$，可得 $\left[\frac{1}{10},\ 10\right]$.

从而应选 D.

同步练习一及参考解答

同步练习一

一、选择题

1. 下列各组函数为同一个函数的是(　　).

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$；

B. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$；

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\cos^2 x+\sin^2 x)$；

D. $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$.

2. 下列各组函数中为相同函数的有(　　).

A. $y_1=x$ 与 $y_2=\sqrt{x^2}$；

B. $y_1=\sqrt{x^2}$ 与 $y_2=|x|$；

C. $y_1=\ln x^2$ 与 $y_2=2\ln x$；

D. $y_1=\ln x^2$ 与 $y_2=2\ln|x|$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{x(x+1)}$ 与 $g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$ 在(　　)内表示同一个函数.

A. $-1\leqslant x\leqslant 0$；

B. $-1\leqslant x$；

C. $0\leqslant x$；

D. $x\leqslant -1$.

4. $y=\dfrac{4}{3x}\ln(x+2)$ 的定义域为(　　).

A. $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$；

B. $x>0$；

C. $x>-2$ 且 $x\neq 0$；

D. $x>-2$.

5. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,1]$；

B. $[4,+\infty)$；

C. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$；

D. $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

6. 函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域是(　　).

A. $(0,5]$；

B. $(1,5]$；

C. $(1,5)$；

D. $(1,+\infty)$.

7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域为(　　).

A. $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$；

B. $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$；

C. $[0, 1]$；

D. $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

8. 下列函数为偶函数的有(　　).

A. xe^{-x^2}；

B. $x^2+\cos x$；

C. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

D. $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

9. 函数 $f(x)=x^3\sin x$ 是(　　).

A. 奇函数；

B. 偶函数；

C. 有界函数；

D. 周期函数.

二、填空题

1. 设 $f(x+1)=x^2+4x+3$，则 $f(x)=$______.

2. (0106)　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$______.

3. 设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=e^{2x+1}$，则 $f[g(x)]=$______.

4. (02106)　设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=$______.