胡家骥主编

运筹学

高等院校试用教材

中南工业大学出版社

高等院校试用教材

运筹学

胡家骥主编

中南工业大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家教委管理工程类专业教材委员会拟订的经济管理类专业课程设置方案（草案）和课程基本要求，结合教学需要编写的教学用书，内容包括：线性规划 目标规划、整数规划、动态规划、网络图论及其应用、存贮论及排队论基本知识。本书可作为高等院校经济管理工程类专业的试用教材，也可供广大厂矿企业、经济管理部门的干部和工程技术人员参考。

运 筹 学

胡家骥 主编

责任编辑 吴秀清

*

中南工业大学出版社出版发行

长沙市郊区大华印刷厂印装

湖南省新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16 印张：15.75 字数：403千字

1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷

印数：00001——11000

ISBN 7-81020-092-5/O·015

统一书号：13442·031 定价：3.50元

前　言

运筹学作为一门定量优化决策科学，推本溯源，已有半个世纪的历史。

运筹学这个术语起源于三十年代英国的军事系统模拟试验，当时的科学家称之为Operation Research。它研究的内容是综合协调、统筹规划先进的军事技术和装备，以期发挥最大的效益。在第二次世界大战期间和战后的经济、生产恢复时期，一些由多学科专家组成的运筹团体在军事决策、资源合理利用和提高生产效率等领域都作出了很大贡献，他们的工作也促使运筹学在理论方面逐步形成为一门新兴的边缘学科，并迅速得到普及和发展。

新中国成立后的五十年代，我国运筹学界在翻译Operations Research这一术语时，从《史记·高祖本记》中"夫运筹策帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房。"一语，摘取"运筹"二字作为这门科学的名称，既显示其军事的起源，也表明运筹学的哲理思想远在我国古代已悠久存在。于是，"运筹学"之名不胫而走，为学界普遍接受。

作为一门定量优化决策科学，运筹学利用了现代数学、计算机科学以及其他科学的最新成果，来研究人类从事各种活动中处理事务的数量化规律，使有限的人、财、物、时、空、信息等资源得到充分和合理的利用，以期获得尽可能满意的经济和社会效果。其内容相当丰富，包括很多个分支科学。就其理论和应用意义来归纳，运筹学具有以下的性质和特征：

一、运筹学是一门以数学为工具，寻求各种问题最优方案的学科，所以是一门优化科学。它是应用数学之一，可以说是一门内容相当广泛、实践性很强的应用数学，正因如此，在我国早期引进和从事这一学科的先驱者多为数学家。我国著名科学家、数学界老前辈华罗庚教授在普及推广统筹法、优选法方面的学术活动和贡献，受到国家和人民的推崇和敬意；

二、运筹学研究问题的特点是从系统的观点出发，研究全局性的规划问题、综合优化的规律，它是一门新兴科学——系统工程学的主要基础理论。促使运筹学与系统工程学在我国的普及和应用，最早的宣传和组织工作是由著名科学家钱学森教授倡导和主持的；

三、运筹学知识的适用范围不仅可解决具体工程技术范畴的优化课题，更为主要的是："它的目的是为行政管理人员在作决策时提供科学的依据，因此，它是实现管理现代化的有力工具。"（中国数学会运筹学会许国志、桂湘云研究员语）。运筹学从它产生之日起，就以组织管理科学化作为己任，它的理论和实践已表明是现代化管理科学的重要组成部分。随着我国四个现代化对管理科学提出更高的要求，近几年来在许多高等院校的经济、管理、信息工程等专业中都相继开设了运筹学课程。

本书是根据国家教育委员会管理工程类专业教材委员会1986年拟订的课程设置方案（草案）和课程基本要求中"H·《运筹学（I）》教学基本要求"，并在编者多年使用的内部教材基础之上重编而成。对函授、大专班、以及干部研修班等成人教育培训，

可根据实际学时数选学，对章节前标*号的内容可不进行讲授。

在内容编写方面，考虑到经济管理专业、厂矿企业管理和工程技术人员的需要，应注重运筹学原理和方法的应用，以及掌握处理和解决实际问题的能力。因此，本书在讲清原理方法的基础上，通过大量应用举例，阐明经济事理意义。内容叙述力求通俗易懂，便于自学。每章后附有必要的习题。

学习运筹学应着重培养以下三方面能力：善于运用所学知识，为各种实际问题建立数学模型；掌握各种优化方法和解题技巧；正确理解和应用数学运算中各种参数的经济事理意义。

本书在编写过程中参阅了部分院校的教材。其中第五、六章由李一智编写；第四、七章由陈赫编写；第一、二、三章由胡家骥编写。全书由胡家骥统稿和担任主编。书稿承蒙数理系蔡海涛教授审阅和提出宝贵意见，谨表谢忱。

中南工业大学管理工程系领导、同事和研究生对编写工作给予了多种支持和鼓励，在此一并表示谢意。

由于编者水平有限，书中错误、不妥之处难免，敬请读者批评指正。

编　者　　1987.1.于长沙

目　　录

第一章　线性规划基础

线性规划是运筹学中数学规划的基础部分。数学规划包括：线性规划、整数规划、动态规划、非线性规划等，其中线性规划的用途相当广泛，计算方法也较成熟。

线性规划是起源于生产实际的科学，也是运筹学中兴起较早的一个分支。早在本世纪三十年代末，苏联数学家康特罗维奇（Л.В.Канторович）研究交通运输和机械加工等部门的生产管理工作，于1939年写了"生产组织与计划中的数学方法"一书初稿，为线性规划建立数学模型及解法奠定了基础；与此同时，美国的库普曼（T.C.Koopmans）研究了选择最优化运输方案的方法，建立了"线性规划数学模型"，并取得了重大进展。他们二人由于科学的创建，后来成为诺贝尔经济学奖的获得者。到了四十年代，因第二次世界大战军事需要，线性规划得到进一步应用和发展。战后则应用于工、农业生产管理，交通运输的指挥调度，资源开发和商业、银行等领域，对提高企业的经济效益有显著成效。随着生产规模的扩大和经济事务的繁杂，对线性规划以及整个数学规划提出更多的理论要求，又促使这门学科迅速发展和完善。1946年，世界上出现了第一台电子计算机，从而使得1947年由美国数学家丹捷格（G.B.Dantzig）提出的求解线性规划的通用方法——单纯形法，在处理成千上万个变量和约束条件的大规模问题方面，成为现实可行和最有效的基本方法。此后，线性规划的适用领域就更为广泛。今天，从解决生产技术中的最优化课题，到工农商各行业的经营管理，国防军事的计划和决策，以至国民经济计划的综合平衡，线性规划的知识都可以发挥作用，它是现代管理科学的重要基础理论。

§1—1　线性规划问题及其数学模型

线性规划是利用数学为工具，来研究在一定的人、财、物、时、空等资源条件下，如何精打细算巧安排，用最少的资源耗费，取得最大的经济效果。

在厂矿的生产计划和经营管理业务中，经常遇到的实际规划问题往往是较复杂和变化的。为了说明线性规划问题的性质和解决问题的道理和方法，我们常把实际问题简化和孤立，这样讨论问题对了解这门学科是有益的。

下面我们来讨论一个线性规划问题的引例。

一、线性规划问题引例

例1—1　某厂生产甲、乙两种产品。这两种产品都需在A、B、C三种不同的设备上加工，每种产品在不同设备上加工所需的工时、这些产品销售后所能获得的利润值、以

及这三种加工设备因各种条件限制所能使用的有效加工总时数列于表1－1。

表 1－1

加工工时（小时/吨） 设备 / 产品	A	B	C	利润（元/吨）
甲（产量为x_1吨）	8	5	9	70
乙（产量为x_2吨）	9	5	8	30
能使用的限制工时	540	450	720	

现在的问题是：如何来安排生产计划，即生产多少甲、乙产品的数量，使得该厂所得利润最大？

这样一个简化的生产计划安排问题，就属于我们所讨论的线性规划范围。

为了准确地回答上述问题，首先我们必须用数学公式来定量描述它，这个过程称为建立数学模型，简称建模。建模过程如下：

1．假设所求的甲、乙产品数量分别为x_1、x_2，称之为决策变量，简称变量。因为产量一般是个正的数，所以有x_1、$x_2 \geqslant 0$，称为非负约束。

2．假设该厂在生产x_1、x_2的甲、乙产品后所得总利润值为Z，显然它是由甲产品提供的利润值和乙产品提供的利润值所合成。我们希望总利润值Z能达到最大，这个关系可用下面的公式表达：

$$\max \quad Z = 70x_1 + 30x_2$$

式中 max——表示"要求最大值"；

Z——称为目标函数。

3．给出的规划问题往往讲明了一些限制条件。例如本例中讲到的三种加工设备所能使用的有效加工总时数，分别不能超过540、450和720小时，这样就约束了产品的生产量x_1和x_2。

对于A设备来讲，它加工：每吨甲产品，需3小时，共生产x_1吨，故共需$3x_1$小时；每吨乙产品，需9小时，共生产x_2吨，故共需$9x_2$小时，但总加工时数不能超过540小时。这个关系可以用下面的不等式来表达：

$$3x_1 + 9x_2 \leqslant 540$$

同理，对于B和C设备分别有

$$5x_1 + 5x_2 \leqslant 450$$

$$9x_1 + 3x_2 \leqslant 720$$

上述这些不等式我们称之为规划问题的约束条件方程式。

现在我们把上述的所有数学公式归列如下：

$$\max \quad Z = 70x_1 + 30x_2 \qquad ①$$

$$\text{s.t.}^{*} \begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leqslant 540 & ② \\ 5x_1 + 5x_2 \leqslant 450 & ③ \\ 9x_1 + 3x_2 \leqslant 720 & ④ \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 & ⑤ \end{cases}$$

（*s.t.是subject to的简写，意即约束条件。）

这就是线性规划引例的数学模型。由此可知，所谓数学模型就是对一个实际问题以适当的数学公式来表达它的内在相互关系。

二、数模的事理意义

当我们把实际问题表达成数学模型时，一定要注意这些数字、变量、公式的事理含意以及物理量的计量单位。

首先我们注意到，一个线性规划问题的数模有三个基本要素：一组决策变量，一个目标函数和一组约束条件方程。

1．有一组待确定的变量x。满足数模方程组的变量x值，包括它们的计量单位，就是所求规划问题的一个具体方案。一般来讲，构成线性规划的问题都有很多具体方案可供选择，但最优的方案往往只有一个，这是规划问题的一大特点。研究规划的目的和价值就是从很多的可行方案中去求得这个最优方案，使得设备资源得到充分利用，避免因任意选取其它方案而造成资源的浪费，这样做就能达到最优的经济效果。由此可见，线性规划的研究内容就是属于数学优化的课题。

2．为了确定最优方案，被规划的问题都应有明确的目标要求。例如本引例中提出的要求是利润获得最大值。显然，任取一种计划产量x_1和x_2值（只要满足约束方程组）的可行方案，都会提供一定数量利润，但不一定是最大， 因此目标要求是与待定变量x值紧密相关的，也就是说，目标值是变量的函数，故称为目标函数。

在线性规划中，目标函数Z是变量 x的 一次函数，在平面座标上的图形是条直线，为线性方程。

目标要求依具体问题的性质而不同。本引例是求利润值，当然是越大越好，所以是求极大，用符号max；有的情况下问题可能是计算费用，或计算用料、占用的空间和时间等，那么是越小越好，所以就是求极小，用符号 min。因此，目标函数的一般表达式为：

$$\max\ (\text{或}\min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad (1\text{-}1)$$

由此可见，线性规划是求目标函数的极值优化课题。一般按目标要求是求极小或求极大，人们常把线性规划研究的问题归纳为两类：一是一项任务确定后，如何统筹安排，尽量以最少的人力物力资源去完成这一任务；二是现有一定数量的人力物力资源，问题是如何安排使用它们，使任务完成得最多，创造的财富量最大。其实这两类问题是一个问题的两个方面，两种提法，本质都是寻求整个问题的某项整体指标最优解。

3．存在很多约束条件，它们也是用变量的线性方程来表示的。约束条件反映规划的客观限制，在物质生产过程中往往是说明资源有限。约束条件确定规划的实现范围，

也即确定了所求变量的变化域.

约束条件方程组是规划数模的主体部分，它的一般表达形式（设有m个约束条件）为：

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\leqslant \text{（或}=，\text{或}\geqslant\text{）} b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant \text{（或}=，\text{或}\geqslant\text{）} b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\leqslant \text{（或}=，\text{或}\geqslant\text{）} b_m \end{array}\right. \tag{1-2}$$

此外，实际规划问题的变量经常是一些物理量，因此变量取非负值，即

$$x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-3}$$

这个非负约束条件表面上看起来是理所当然的，好像多此一举，然而在数学求解运算中是非常重要的，不可忽视。

综上所述，线性规划的数学模型从数学结构上来看，它包括目标函数、资源约束条件和决策变量的非负约束三个部分。完整的求和表达式为：

$$\max\ \text{（或}\min\text{）}\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\leqslant \text{（或}=，\text{或}\geqslant\text{）} b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant \text{（或}=，\text{或}\geqslant\text{）} b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\leqslant \text{（或}=，\text{或}\geqslant\text{）} b_m \\ x_j\geqslant 0 \end{array}\right. \tag{1-4}$$

（1-4）式中的方程式都是线性方程，由此得名"线性"规划．这是线性规划的第二个特点．如果在约束条件方程组或目标函数中出现非线性方程，就称为非线性规划。

现在我们分析数模中数字的含意。

4．系数，有：

1）目标函数中决策变量前的系数c_j．在具体的问题中，它有明确的含意和计量单位，如例 1-1 中的系数 70 和30，表示产品单位产量所提供的利润价值，计量单位是〔元/吨〕．我们把c_j称为价值系数；

2）约束方程中变量前的系数a_{ij}，称为约束条件系数。在具体的问题中它也有明确的含意和计量单位，如表示单位产量所占有或消耗的资源量等。像例1-1中的数字3、5、9，它们就表示生产单位产品所需的设备加工时数，单位为〔小时/吨〕；

3）约束方程式的右边常数（或称限制常数）b_i。在具体的问题中常表示受约束的

最大资源量，一般也为非负值，有明确计量单位。如例1-1中的540、450、720即能使用的最大加工时数，单位是〔小时〕。右边常数包括它之前的运算符号是规划问题规定必须满足的最低要求。

5．数模解的名称

从（1-4）数模中，一般我们能找到变量x的很多个解，即能有很多种方案。定义以下几种解的名称：

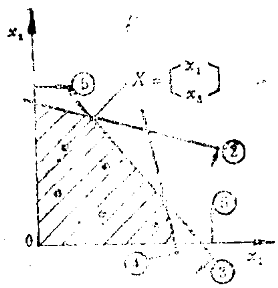

图1-1

1）可行解——即满足（1-2）和(1-3）式约束方程的所有解，因为它们都是可行的方案；

2）可行解域——所有可行解的集合。在二维平面图上，如果把约束方程用带箭头的直线画出，如图1-1所示，那么阴影区域就是可行解域。在这个域中的任何一点，称为可行点，是一种可行的方案。这个点的座标$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$构成一个列向量，所以也称为可行向量；

3）最优解——凡是满足（1-1）式目标函数要求（极大或极小）的可行解称最优解。最优解一般情况下是唯一存在的。但在一些特殊规划问题中，可能有无限多个最优解，或者不存在最优解，这些情况将在§1-3中进行说明。

§1—2　线性规划问题的建模

建模是解决线性规划问题的极为重要环节。从实践的角度来讲，一个正确的数模的建成，标志着问题的解决已接近完成，答案在计算机上就会很快获得。一个正确数模的建立要求建模者熟悉规划问题的生产和管理内容，明确目标要求和错综复杂的约束条件，要通过大量的调查和统计资料获取原始可靠的数据。这些要求对建立一个较复杂的实际模型是要化费相当大的工作量的。对于初学者来说，怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于从数学这个角度有条理地表述出来，掌握建模过程是十分重要的技术。

线性规划适用解决的问题面很广，因此不可能有一个统一的建模标准，这就使建模成为一种带技巧性的工作。即使如此，建模过程还是有一定规律的，即通过对实际问题的分析、理解，要明确那些是决策变量，目标要求是什么，有那些资源限制条件，问题提供的数据是属于约束条件还是对应于目标要求，如何把变量、常数、约束条件、目标要求的相互关系联系起来列出相应的方程式。在列方程式过程中要注意变量、系数、常数的计量单位。计量单位要首先统一于标准的常用单位，在这方面任何的混淆都会导至解题答案的严重错误。

本节通过几个例子来说明建模过程，同时介绍不同的类型问题，使我们对线性规划的应用领域和它的现实意义有进一步的认识。

一、资源合理利用问题

资源合理利用是企业编制生产计划时经常考虑的实际问题。其任务是企业（也可以是一个地区，甚至整个国家）如何规划和调配它的有限资源，以达到生产的目的，并使企业获取最大的利润；或使资源、材料耗费最少，从而生产成本为最小。现举一简例说明。

例1－2　某厂生产A、B两种产品，都需用煤、金属材料、电力等资源。已知制造A产品1吨需用煤 6 吨，金属材料80公斤，电力50千瓦；制造B产品1吨需用煤 8 吨，金属材料50公斤，电力10千瓦。现该厂仅有煤540吨，电力 2000千瓦，金属材料 4 吨可供利用，其它资源可以充分供应。又知：A、B产品每吨能得利润分别为 6 千元／吨和 5 千元/吨。问：在现有这些资源限制条件下，应生产多少吨A和B产品，使企业获得利润最大？

分析：这个问题比较直观。建模步骤如下：

1．确定变量。问题要求回答的是 A、B 产品的生产量，设用 x_1 和x_2（单位是吨）表示；

2．目标函数。求企业取得的利润为最大；

3．约束条件。有煤资源限制、金属材料资源限制和电力限制三个约束条件。其它需用资源因能充分供给，不构成约束条件。

可以列出数模如下：

$$\max \quad Z=6x_1+5x_2 \text{（千元）}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 6x_1+8x_2\leqslant 540 \text{（吨）} & \cdots\cdots\text{煤资源约束} \\ 80x_1+50x_2\leqslant 4000 \text{（公斤）} & \cdots\cdots\text{金属材料资源约束} \\ 50x_1+10x_2\leqslant 2000 \text{（千瓦）} & \cdots\cdots\text{电力资源约束} \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 & \cdots\cdots\text{变量非负约束} \end{cases}$$

资源合理利用问题的一般数模如下：

假设某个企业有m种资源，已知每种资源的数量为 b_i（$i=1, 2, \cdots, m$）。该企业能生产n种产品（x_j为第j种产品的产量，$j=1, 2, \cdots, n$），已知生产每一种产品单位产量所消耗的各种资源数量，我们用a_{ij}表示第j种产品对第 i 种资源的单耗。设各种产品的价格为已知，用c_j表示第j种产品的单价。在现有资源条件下，如何规划生产，使得产值最大。其数模如下：

$$\max \quad Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \\ x_j\geqslant 0 \end{cases}$$

（其中$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）

二、合理下料问题的数模

合理下料是许多工业部门中经常遇到的问题。例如，机械加工时，常在一定的条形金属原材料或板料上切割若干段或块，加工成所需的毛坯，在一般情况下，材料不可能

被完全利用，就有边角余料要处理，造成大材小用，优材劣用，甚至当成废物收集搬运回炉。这样产品单耗高，成本也高。因此，如何最大限度地减少边角余料，提高材料利用率，就是提高经济效益的规划问题。现举一例说明。

例1-3　有一批长度为180公分的钢管，需截成70、52和35公分三种管料。它们的需求量应分别不少于100、150和100个，问应如何下料才能使钢管的消耗量为最少？

分析：我们知道，下料方案是在满足尺寸条件下可能有的各种下料方式中去选择。因此，应首先求出材料的全部下料方式，据此将下料问题构成数学模型。

设在180公分长的钢管上能够下出u个70公分管料，v个52公分管料和w个35公分管料，则必须符合条件。

$$70u+52v+35w\leqslant 180\ (\text{公分}) \qquad ⑥$$

其中管料个数u、v、w只能是正整数。我们从最大尺寸管料下起。显然把180公分长的钢管截成70公分的管料数只有三种可能，即u等于2、1、0。

1）当$u=2$时，⑥式化成

$$140+52v+35w\leqslant 180$$

于是v就只能等于零，w等于1，并有余料5公分，这是第一种下料方式：

u	v	w	余料（公分）
2	0	1	5

2）当$u=1$，⑥式写成

$$70+52v+35w\leqslant 180$$

于是v可能取2、1、0三个数，这样又得到以下三种下料方式：

u	v	w	余料（公分）
1	2	0	6
1	1	1	23
1	0	3	5

3）当$u=0$，⑥式化为

$$0+52v+35w\leqslant 180$$

于是v必须$\leqslant 3$，可能取3、2、1、0、四个数，这样又得到四种下料方式：

u	v	w	余料（公分）
0	3	0	24
0	2	2	6
0	1	3	23
0	0	5	5

下料方式一共为八种，见表1—2。

现在的问题是，在这八种下料方式中找出用料最省的下料方案。也就是说，在保证管料需求量的前提下，使余料最少（因为都有余料，当然所耗的钢管量也是最少）。

从上表中可看出，一、二、四、六、八这五种下料方式余料最小，但只采用任何一种下料方式都不能保证三种管料的需求量。所以必须同时采用多种下料方式，才能满足管料需求量，又使余料最少。

表 1-2

管料尺寸 \ 管料个数 \ 下料方式	一 x_1	二 x_2	三 x_3	四 x_4	五 x_5	六 x_6	七 x_7	八 x_8	管料需求数（个）
70公分（u）	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52公分（v）	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35公分（w）	1	0	1	3	0	2	3	5	100
余料（公分）	5	6	23	5	24	6	23	5	

现在我们可以建模如下：

1．确定变量。假设x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8分别表示八种下料方式所用的钢管数（根）；

2．目标函数。采用第一种下料方式用钢管x_1根，每根有余料5公分，共有余料$5x_1$；第二种下料方式共有余料$6x_2$；……，余料的总数应求最小，即

$$\min \quad Z=5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8 \text{（公分）}$$

3．约束条件。必须使各种下料方式提供的管料个数不少于需求量，即

$$\begin{array}{ll} u\text{约束：} & \left\{\begin{array}{l} 2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100(\text{个}) \\ 2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 \geqslant 150(\text{个}) \\ x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8 \geqslant 100(\text{个}) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \geqslant 0 \text{（根），且为整数} \end{array}\right. \\ v\text{约束：} & \\ w\text{约束：} & \\ \text{非负约束：} & \end{array}$$

根据这个数模求出的x_j表示用j种下料方式下料所要用的钢管数，能保证余料最少，从而保证钢管的消耗量为最少。

合理下料问题的一般数学模型如下：

假设需要切割m种零件毛坯，其数量分别以b_i表示（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）；

设可能有n种下料方式，并分别以a_{1j}，a_{2j}，…，a_{mj}表示第j种下料方式每根原材料（或每块板料）所切割出来的各种零件毛坯数量；

设x_j表示每种下料方式所消耗的原材料根数（或块数），则有：

$$\min \quad Z=x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{j=1}^{n}x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqslant b_m \\ x_j \geqslant 0 \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{array}\right.$$

三、运输问题的数学模型

我们知道，在国民经济中如何组织好一个地区乃至全国范围内的物资调运工作是十分重要的。譬如说，某类产品有若干个生产地，已知每个生产地的产量；这类产品有若干个消费地，各地消费量也知道。假如总产量和总消费量恰好相等，由产地运到各消费

地的运输单价已知，现如何来编制一个最优的运输计划，使总的运输费用为最小。

例1-4　某地区如图1-2有三个有色金属矿 A_1、A_2、A_3，生产同一种金属矿石，A_1矿的年产量为100万吨，A_2矿为80万吨，A_3矿为50万吨。矿石全部供应四个冶炼厂

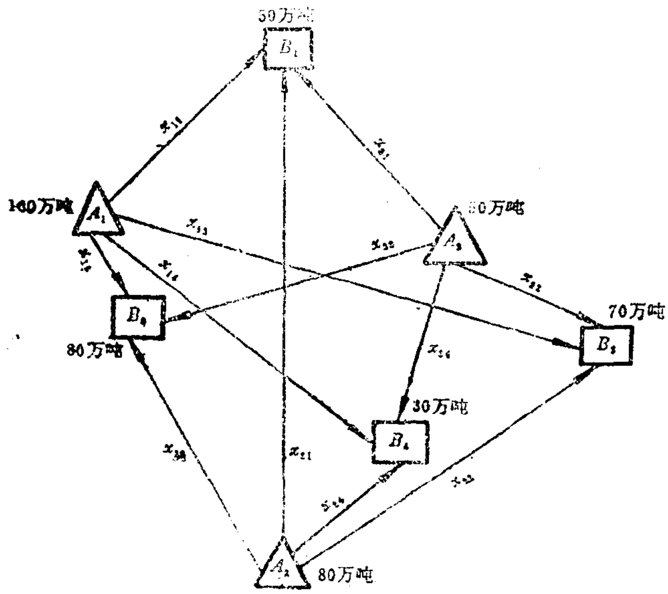

图1-2

B_1厂的年需要量为50万吨，B_2厂为70万吨，B_3厂为80万吨，B_4厂为 30 万吨。总产量恰好等于总需要量。矿石由各矿山运到冶炼厂的单位运价已知，如表1-3。

表1-3　　运价表　　　　单位：元/吨

矿山 \ 冶炼厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1.5	2	0.3	3
A_2	7	0.8	1.4	2
A_3	1.2	0.3	2	2.5

问如何安排运输，使各矿山的矿石运到冶炼厂，满足各厂的需要量，且使总运输费用最小？

建模过程如下：

1．确定变量。设 x_{ij} 表示从第 i 个矿山运到第 j 个冶炼厂的矿石量，可列表1-4。

2．目标函数。本题给出的1-3表中的单位运价就是价值系数 c_j，注意单位是：元/吨。问题的目标是求总运费最小，故目标函数为

$$\begin{aligned}\min\quad Z=&1.5x_{11}+2x_{12}+0.3x_{13}+3x_{14}\\&+7x_{21}+0.8x_{22}+1.4x_{23}+2x_{24}\\&+1.2x_{31}+0.3x_{32}+2x_{33}+2.5x_{34}\qquad(\text{万元})\end{aligned}$$

表 1-4

冶炼厂 运输量（万吨） 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量（万吨）
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	100
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	80
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	50
需要量（万吨）	50	70	80	30	230

3．约束条件。由表1-4可以写出：

$$\text{s.t.}\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=100 & \text{（万吨）} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=80 & \text{〃} \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 & \text{〃} \end{array}\right\} \text{各矿山的输出量与产量平衡条件} \\ \left.\begin{array}{ll} x_{11}+x_{21}+x_{31}=50 & \text{（万吨）} \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=70 & \text{〃} \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=80 & \text{〃} \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 & \text{〃} \end{array}\right\} \text{各冶炼厂的输入量与需要量平衡条件} \\ x_{ij}\geqslant 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{运输量非负条件} \end{cases}$$

$$(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

运输问题的一般数模可表达如下：

设有m个生产地，其产量分别为a_i（$i=1, 2, \cdots, m$）；该产品有n个消费地，其需要量分别为b_j（$j=1, 2, \cdots, n$），并且产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$$

以c_{ij}表示从第i个产地运到第j个消费地的单位产品运价，则数模为：

$$\min \quad Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ x_{ij}\geqslant 0 \end{cases}$$

四、投资方案选择问题

例1-5　某炼油公司为提高炼油能力和增加企业经济效益，经研究有五种技术改造