

经济应用数学

第一册

(第二版)



中等财经学校教材

☐ 李冠云 何屏生 / 主编

中国财政经济出版社

ZHONG DENG

中等财经学校教材

经济应用数学（第二版）

第一册

李冠云 何屏生 主编

中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

经济应用数学 第1册/李冠云, 何屏生主编. - 2版.

- 北京: 中国财政经济出版社, 1999.1

中等财经学校教材

ISBN 7-5005-4082-5

I. 经… II. ①李… ②何… III. 经济数学 - 专业学校 - 教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 02674 号

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.com>

E-mail: cfeph@dre.gov.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京东城大佛寺东街 8 号 邮政编码: 100010

发行处电话: 64033095 财经书店电话: 64033436

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

850×1168 毫米 32 开 5.375 印张 125 000 字

1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月北京第 1 次印刷

印数: 1—15 000 定价: 7.00 元

ISBN 7-5005-4082-5/F·3709

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前 言

本教材是在财政部培训中心的主持下，按照财政部培训中心1997—1998年度教材编写计划及审定的教学大纲编写的。

全书共分三册。各册内容为：

第一册：集合，函数，三角函数。

第二册：数列、数学归纳法，排列、组合、二项式定理，概率阅读，矩阵与线性方程组，直线，二次曲线简介。

第三册：极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分。

本书供三年制财经（政）类中等专业学校使用，标有“*”号的内容为选学内容。

习题分二类：习题，复习题。

习题供课内外练习和作业用。复习题供复习本章知识使用。

本书编写组成员有：江苏省徐州财经学校讲师赵宏（第一、第二、第三章），秦皇岛市财经学校高级讲师邱庆云（第四、第七、第八章），云南省财经学校讲师李冠云（第五章、第六章及读一读、随机事件及其概率），山西省财政税务专科学校副教授阎慷（第九、第十章），云南省财经学校高级讲师何屏生（第十一、第十二章）。

本教材由云南省财经学校李冠云、何屏生担任主编。由湖南财经高等专科学校刘应辉教授担任大纲及教材的审定。

云南师范大学数学系张华副教授、肖薇副教授、云南省财经学校王岚讲师参加了全书的校订。

教材的编写中，曾得到云南省财经学校，秦皇岛市财经学校，山西省财政税务专科学校及湖南财经高等专科学校领导和同仁们的关心和指导，在此一并致以衷心的感谢。

书中不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

1998年10月

目 录

第一章 集合	(1)
§ 1-1 集合的概念	(1)
§ 1-2 集合的运算	(9)
§ 1-3 一元一次不等式组和一元二次不等式	(18)
第二章 函数	(33)
§ 2-1 函数	(33)
§ 2-2 幂函数	(39)
§ 2-3 指数函数	(54)
§ 2-4 反函数	(59)
§ 2-5 对数与对数函数	(64)
§ 2-6 经济函数举例	(75)
第三章 三角函数	(84)
§ 3-1 任意角的三角函数	(84)
§ 3-2 同角三角函数的关系	(99)
§ 3-3 三角函数的简化公式	(104)
§ 3-4 三角函数的图像与性质	(116)
§ 3-5 加法定理及其推论	(131)
* § 3-6 反三角函数	(147)

第一章 集 合

集合是数学中重要的基本概念，集合的概念已经广泛渗透到数学的各个领域。本章将介绍集合的有关概念、常用符号、集合的表示法和集合的运算。

§ 1-1 集合的概念

一、集 合

在数学中，把具有某种特定性质的对象的全体叫做由这些对象组成的集合（简称为集），把组成集合的各个对象叫做这个集合的元素。例如：

(1) 方程 $(x-1)^2(x+2)=0$ 的所有实数根组成一个集合，该方程的实数根 $x=-2$ 、 $x=1$ 是这个集合的元素；

(2) 某公司的全体财务管理人员组成一个集合，其中每一个财务管理人员都是这个集合的元素；

(3) 不大于 100 的全体自然数组成一个集合，自然数 1, 2, 3, ..., 100 是这个集合的元素；

(4) 全体正偶数组成一个集合，每一个正偶数都是这个集合的元素；

(5) 不等式 $x+3>0$ 的所有解组成一个集合，满足条件 x

> -3 的所有实数 x 都是这个集合的元素；

(6) 直线 $y = x + 1$ 上所有的点组成一个集合，满足直线方程 $y = x + 1$ 的每一个点 (x, y) 都是这个集合的元素；

(7) 所有的直角三角形组成一个集合，每一个直角三角形都是这个集合的元素。

一般用大写字母 A 、 B 、 C 、 D 、 $\cdots$ 表示集合，而用小写字母 a 、 b 、 c 、 $\cdots$ 表示元素。如果 a 是集合 A 的一个元素，则称 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

由数组成的集合叫做**数集**。通常用以下记号来表示常见数集：

全体自然数的集合（简称自然数集），记作 N ；

全体整数的集合（简称整数集），记作 Z ；

全体有理数的集合（简称有理数集），记作 Q ；

全体实数的集合（简称实数集），记作 R 。

为了方便，还常用 R^+ 表示正实数集， Q^- 表示负有理数集等等。

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**。如前面的例子中 (1)、(2)、(3) 都是有限集，(4)、(5)、(6)、(7) 都是无限集。

只有一个元素的集合叫做**单元素集合**，例如方程 $x - 1 = 0$ 实数根的集合只含有一个元素 $x = 1$ ，是一个单元素集合。为了研究方便，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 Φ 。例如，方程 $x^2 + 1 = 0$ 没有实数根，该方程实数根的集合不含任何元素，是一个空集。至少有一个元素的集合叫做**非空集合**。

给定一个集合，其元素具有以下三个特性：

(1) 确定性。“对象的特定性质”含义必须是确定的，可以

用来判断一个对象是否为集合的元素，也就是说一个给定集合的元素应具有确定性。例如，“全体中学生”的含义是确定的，可以用来判断一个对象“是”或“不是”它的元素，因此“全体中学生”可以组成一个集合。而“全体好学生”，则由于“好”没有一个确定的含义，所以不能组成集合。

(2) 互异性。一个集合中的任何两个元素都是不同的，相同的对象归入一个集合时，只能算作集合的一个元素，也就是说一个给定集合的元素应具有互异性。例如，方程

$$(x-1)^2(x+2)=0$$

的解集里只含 1 和 -2 两个元素，方程的二重根 1 应视为其解集中的一个元素。

(3) 无序性。集合中的元素一一列举出来时，不必考虑元素的排列顺序，也就是说一个给定集合的元素应具有无序性。

二、集合的表示法

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号 $\{ \}$ 内，每个元素只写一次，不考虑顺序，这种表示集合的方法叫做列举法。

例如，方程 $(x-1)^2(x+2)=0$ 的解是 $x=1$ 、 $x=-2$ ，其解集可用列举法表示为

$$\{1, -2\} \text{ 或 } \{-2, 1\}$$

不大于 100 的自然数的集合可用列举法表示为

$$\{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

全体正偶数组成的集合（简称正偶数集）可用列举法表示为

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

2. 描述法

把集合的元素所具有的特性描述出来，写在大括号 $\{ \}$

内，这种表示集合的方法叫做**描述法**。

用描述法表示集合时，括号内先写集合元素的一般形式，再划一条竖线，竖线右边写出集合的元素所具有的性质。

例如，方程 $(x-1)^2(x+2)=0$ 的解集表示为

$$\{x | (x-1)^2(x+2)=0\}$$

不大于 100 的自然数的集合表示为

$$\{n | n \leq 100, n \in \mathbb{N}\}$$

正偶数集表示为

$$\{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$$

不等式 $x+3>0$ 的解集表示为

$$\{x | x+3>0\}$$

直线 $y=x+1$ 上所有点的集合表示为

$$\{(x, y) | y = x + 1\}$$

在不致混淆的情况下，有些集合用描述法表示时，为了简便可以省去竖线及其左边的部分。例如，全体正偶数组成的集合，可以表示为 {正偶数}。

集合以及集合之间的关系可以用图形表示，称为文氏图。文氏图是用一些简单的平面图形代表集合，如图 1-1 所示的圆、矩形等，集合的元素用图形内的点表示。

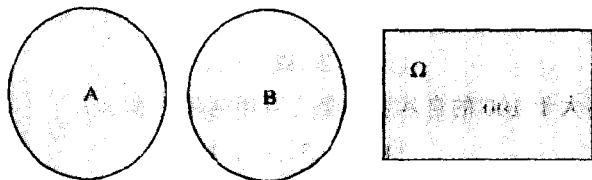


图 1-1

三、集合与集合之间的关系

考察集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 之间的关系，可以

发现 $\{1, 2, 3\}$ 中任何一个元素都是 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 的元素.

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A \text{)}$$

读作“ A 包含于 B ”(或“ B 包含 A ”).

在前面的例子中, $\{1, 2, 3\}$ 是 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 的子集, 记作 $\{1, 2, 3\} \subseteq \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (或 $\{-1, 0, 1, 2, 3\} \supseteq \{1, 2, 3\}$).

对于任何一个集合 A , 因为它的任何一个元素都属于 A 本身, 所以 $A \subseteq A$. 也就是说, 任何一个集合是它本身的子集.

我们还规定空集是任意集合的子集. 这样, 对于任意集合 A , 有

$$\emptyset \subseteq A$$

例 1 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

解 集合 $\{a, b, c\}$ 的子集是: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$, 总共八个.

进一步考察集合 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 与其子集 $\{1, 2, 3\}$ 之间的关系, 可以发现 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 的元素 -1 和 0 不属于其子集 $\{1, 2, 3\}$.

一般地, 如果集合 A 是集合 B 的子集, 且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A \text{)}$$

在前面的例子中, $\{1, 2, 3\}$ 是 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ 的真子集, 记作 $\{1, 2, 3\} \subset \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (或 $\{-1, 0, 1, 2, 3\} \supset \{1, 2, 3\}$).

显然, 空集是任何非空集合的真子集, 任何非空集合都不是

它自身的真子集.

例1中的集合 $\{a, b, c\}$, 除其自身以外的七个子集都是它的真子集.

集合 A 是集合 B 的真子集关系, 可用图 1-2 表示.

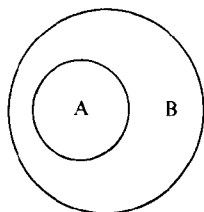


图 1-2

例2 某公司可用于投资的资金共 100 万元, 有四个项目的建设可被考虑, 分别需用资金如下:

a 项目 20 万元, b 项目 20 万元, c 项目 80 万元, d 项目 60 万元. 那么该公司建设项目集合 $\{a, b, c, d\}$ 的哪些子集没有超过投资总额? 恰好为 100 万元的子集又是哪些?

解 建设项目所需投资额不超过 100 万元的子集是 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, d\}$; 其中恰需 100 万元投资的子集是 $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ 及 $\{a, b, d\}$.

对于集合 A 与集合 B , 如果 $A \subseteq B$ 、 $B \supseteq A$ 同时成立, 则称集合 A 与集合 B 是相等的, 记作

$$A = B$$

例如, $\{x | x^2 + 3x - 4 = 0\} = \{1, -4\}$

$$\{\text{不大于 } 5 \text{ 的自然数}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

例3 写出不等式 $\frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x$ 的解集, 并化简.

解 不等式的解集是

$$\left\{x \mid \frac{1}{2}x - 1 \leq 7 - \frac{3}{2}x\right\} = \{x \mid x \leq 4\}$$

习题 1-1

1. 下列各组对象能否组成集合:

- (1) 面积大的长方形的全体;
- (2) 绝对值小于 3 的所有实数;
- (3) 高档消费品的汇总;
- (4) 60 岁以上的老人的全体.

2. 写出下列集合的所有元素:

- (1) $\{ \text{小于} \sqrt{93} \text{的质数} \}$;
- (2) $\{ x | x = (-1)^n, n \in N \}$;
- (3) $\{ x | x^2 = x \}$.

3. 用适当的方式表示下列集合, 并指出它们是有限集还是无限集:

- (1) 小于 6 的正整数集;
- (2) 奇数集;
- (3) 不等式 $2x + 3 < x$ 的解集;
- (4) 二元一次方程 $x - 3y + 1 = 0$ 的解集;
- (5) 由 1、2、3 三个数字组成的没有重复数字的三位自然数集;
- (6) 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上所有点的坐标的集合;
- (7) 方程组 $\begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$ 的解集.

4. 把下列集合用另一种方法表示:

- (1) $\{ x | |x| \leq 3, x \in Z \}$;
- (2) $\{ \text{平方后等于 1 的数} \}$;
- (3) $\{ \text{一年中有 31 天的月份} \}$;
- (4) $\{ 1, 3, 5, 7, 9, \dots \}$;
- (5) $\{ a, a^2, a^3, \dots \}$;
- (6) $\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \}$.

5. 检查下列关系是否正确, 如果不正确, 请予更正.

- (1) $\{ a \} \in \{ a, b, c \}$;
- (2) $a \subseteq \{ a, b, c \}$;
- (3) $3.5 \in \{ x | x < \sqrt{13} \}$;
- (4) $\{ 1, 3, 5 \} \subset \{ 5, 3, 1 \}$;

$$(5) (1, 4) \in \{(x, y) \mid y = 4x\};$$

$$(6) \{x \mid x^2 = 2\} = \{x \mid x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0\};$$

$$(7) \{3, -1\} = \{x \mid |x - 1| = 2\}.$$

6. 指出下列集合哪些是空集, 哪些是有限集, 哪些是无限集?

$$(1) \{x \mid 2x + 1 = 1\};$$

$$(2) \{x \mid x^2 = 1\};$$

$$(3) \{x \mid x^2 + x + 1 = 0, x \in R\}; \quad (4) \{(x, y) \mid x = 0, y = 0\};$$

$$(5) \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}; \quad (6) \{\emptyset\};$$

$$(7) \{x \mid x - 1 > x + 1\}; \quad (8) \{x \mid 3x - 2 < 4\}.$$

7. 写出集合 $\{a, b, c, d\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

8. 设集合 A 为 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, 写出 A 的符合以下条件的子集: (1) 元素是 3 的倍数; (2) 元素是质数.

9. 选择适当的符号 ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\supset$, $=$) 填空:

$$(1) \pi \underline{\hspace{1cm}} Q; \quad (2) \frac{2\sqrt{2}}{3} \underline{\hspace{1cm}} \left\{x \mid x \geq \frac{\sqrt{14}}{4}\right\};$$

$$(3) \{(1, -2)\} \underline{\hspace{1cm}} \{(x, y) \mid y + 3x - 1 = 0, x = 1\};$$

$$(4) \{x \mid -1 \leq x \leq 3\} \underline{\hspace{1cm}} \{-1, 0, 1, 2, 3\};$$

$$(5) \emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{x \mid \sqrt{x^2} < x\}; \quad (6) R^+ \underline{\hspace{1cm}} \{x \mid x \geq 0\};$$

$$(7) \{1, 2, 3\} \underline{\hspace{1cm}} \{x \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\};$$

$$(8) \{(x, y) \mid y = x\} \underline{\hspace{1cm}} \{ \text{第一象限的角平分线上点的坐标} \}.$$

10. 写出下列不等式的解集.

$$(1) x + 3 \geq \frac{x}{2} - 5; \quad (2) x(x - 1) \geq (x + 3)(x - 3).$$

11. 写出方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 的解集.

12. 写出方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

的解集.

§ 1-2 集合的运算

一、交集

设集合 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, f, g\}$, 则集合 $\{b, c\}$ 是由所有属于 A 且属于 B 的元素 (即 A 、 B 的公共元素) 所组成的.

一般地, 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 用描述法表示为

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$$

例如: $\{a, b, c, d\} \cap \{b, c, f, g\} = \{b, c\}$.

$A \cap B$ 可用图 1-3 的阴影部分表示. 显然, $A \cap B$ 的每一个元素都是 A 、 B 的公共元素.

按交集的定义, 对于任何集合 A 、 B , 有如下性质:

- (1) $A \cap A = A$;
- (2) $A \cap \Phi = \Phi$;
- (3) $A \cap B = B \cap A$.

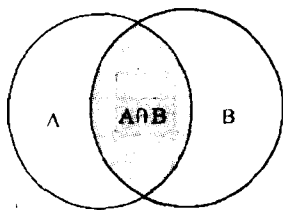


图 1-3

例 1 求 6 与 10 的正公约数集合.

解 $\because$ 6 与 10 的正公约数是 6 的正约数与 10 的正约数的公

共部分，

$$\text{而 } \{6 \text{ 的正约数}\} = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\{10 \text{ 的正约数}\} = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$\therefore \{6 \text{ 与 } 10 \text{ 的正公约}\}$$

$$= \{6 \text{ 的正约数}\} \cap \{10 \text{ 的正约数}\}$$

$$= \{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 5, 10\}$$

$$= \{1, 2\}$$

例 2 已知 $a < b$, $a, b \in R$, 按以下条件求 $A \cap B$:

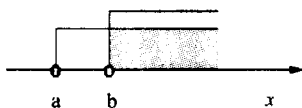
(1) $A = \{x | x > a\}, B = \{x | x > b\};$

(2) $A = \{x | x < a\}, B = \{x | x < b\};$

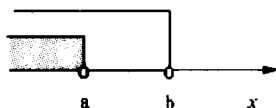
(3) $A = \{x | x > a\}, B = \{x | x < b\};$

(4) $A = \{x | x < a\}, B = \{x | x > b\}.$

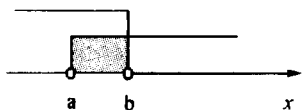
解 将各对集合分别表示在数轴上，并用阴影标出 A 、 B 的公共部分 (见图 1-4).



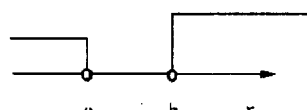
(1)



(2)



(3)



(4)

图 1-4

由图 1-4 可见:

(1) $\{x | x > a\} \cap \{x | x > b\} = \{x | x > b\}$

(2) $\{x | x < a\} \cap \{x | x < b\} = \{x | x < a\}$

$$(3) \{x|x>a\} \cap \{x|x<b\} = \{x|a<x<b\}$$

$$(4) \{x|x<a\} \cap \{x|x>b\} = \Phi$$

例3 设 $A = \{(x, y) | 2x - 3y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 3\}$, 求 $A \cap B$.

$$\text{解 } A \cap B = \{(x, y) | 2x - 3y = 1\} \cap \{(x, y) | x + y = 3\}$$

$$= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \right. \right\}$$

$$= \{(2, 1)\}$$

二、并 集

设集合 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, f, g\}$, 则集合 $\{a, b, c, d, f, g\}$ 是由所有属于 A 或属于 B 的元素 (即 A 、 B 的全部元素) 所组成的.

一般地, 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 用描述法表示为

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$$

例如:

$$\{a, b, c, d\} \cup \{b, c, f, g\} = \{a, b, c, d, f, g\}$$

$A \cup B$ 可用图 1-5 的阴影部分表示, 从图可清楚地看出, $A \cup B$ 是“只属于 A ”、“只属于 B ”及“既属于 A 又属于 B ”这三部分元素的全体.

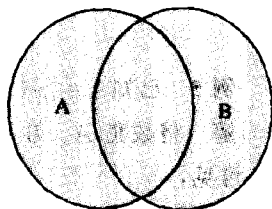


图 1-5

特别地, 当 $A \cap B = \Phi$ 时, $A \cup B$ 可用图 1-6 阴影部分