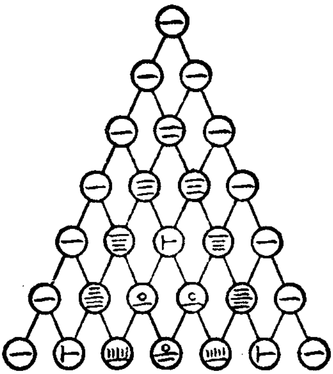
高級中学課本

代　　　　　数

DAISHU

第三册



人民教育出版社

高級中学課本

代　数

第三册

北京市書刊出版业营业許可証出字第二号
人民教育出版社編輯出版（北京景山东街）
統一書号：K7012·706　字数：94千

北京出版社重印（北京东单麻綫胡同3号）
北京市書刊出版业营业許可証出字第095号
新 华 書 店 发 行
北京新华印刷厂印刷
开本：787×1092 公厘$\frac{1}{32}$　印張：$4\frac{3}{8}$
1957年第一版
1959年4月第一版第一次印刷
北京：00,001--24,000册
*
定价 0.24 元

目　录

第八章　排列、組合和二项式定理

I　排列、組合

109. 排列　从三个先进工作者張、王、李里面，选出一个人当組长、一个人当副組长，可以有下面的 6 种选法：

組　长：	張	張	王	王	李	李
副組长：	王	李	張	李	張	王

从三个不同的数字 4、7、9 里，每次取出两个不同的数字排列起来，可以得到下面的 6 个两位数：

$$47;\ 49;\ 74;\ 79;\ 94;\ 97.$$

从 m 个元素（人、数字或者其他）里，每次取出 n 个元素，按照一定的順序摆成一排，叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的**排列**.

在本书中，只研究从 m 个各不相同的元素里每次取出 n 个 $(1\leqq n\leqq m)$ 各不相同的元素的排列，以后所說的从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列，都是指这样的排列. 例如，从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的排列，就是指下面的 6 种排列：

$$ab;\ ac;\ ba;\ bc;\ ca;\ cb.$$

根据排列的定义可以知道：如果两种排列里所含的元素不完全一样，例如，ab 和 ac，那末就是不同的排列；如果所含的元素完全一样，而排列的順序不同，例如 ab 和 ba，那末也是不同的排列.

从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有不同的排列的种数，

通常用符号 A_m^n 表示.*

现在我們来研究計算 A_m^n 的公式.

設有 m 个元素: $a, b, c, d, \cdots\cdots, k, l$.

从这 m 个元素里每次取出 1 个元素所有的排列的种数, 很明显地是 m. 就是

$$A_m^1 = m.$$

要得出从 m 个元素里每次取出 2 个元素所有的排列, 我們可以先作出从 m 个元素里每次取出 1 个元素所有的排列, 然后在每一种这样的排列的后边, 都排上其余的 $m-1$ 个元素里的每 1 个元素. 例如我們先取出 a, 再把 $b, c, d, \cdots\cdots, k, l$ 逐一地排在它的后边; 然后取出 b, 再把 $a, c, d, \cdots\cdots, k, l$ 逐一地排在它的后边; 等等. 这样就得:

$$m\text{ 列}\begin{cases} ab, ac, ad, \cdots\cdots, ak, al; & (m-1\text{ 个排列}) \\ ba, bc, bd, \cdots\cdots, bk, bl; & (m-1\text{ 个排列}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ la, lb, lc, \cdots\cdots, lk. & (m-1\text{ 个排列}) \end{cases}$$

因为从 m 个元素里每次取出 1 个元素的排列一共有 m 种, 对于这样的每一种排列, 把其余的 $m-1$ 个元素逐一地排在它的后边, 都可以得出 $m-1$ 种从 m 个元素里每次取出 2 个元素的排列, 所以一共就可以得出 $m(m-1)$ 种从 m 个元素里每次取出 2 个元素的排列, 并且其中沒有两种是相同的. 就是

$$A_m^2 = m(m-1).$$

要得出从 m 个元素里每次取出 3 个元素所有的排列, 我們可以先作出从这 m 个元素里每次取出 2 个元素所有的排列, 然

后在每一种这样的排列的后边，排上其余的$m-2$个元素里的每一个元素. 例如我們先取出ab，再把$c, d, \cdots\cdots, k, l$逐一地排在它的后边；然后取出ac，再把$b, d, \cdots\cdots, k, l$逐一地排在它的后边；等等. 这样就得：

$$m(m-1)\text{列}\begin{cases} abc, abd, \cdots\cdots, abk, abl; & (m-2\text{ 个排列}) \\ acb, acd, \cdots\cdots, ack, acl; & (m-2\text{ 个排列}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ lka, lkb, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. & (m-2\text{ 个排列}) \end{cases}$$

因为从m个元素里每次取出2个元素的排列一共有$m(m-1)$种，对于这样的每一种排列，把其余的$m-2$个元素逐一地排在它的后边，都可以得出$m-2$种从m个元素里每次取出3个元素的排列，所以一共就可以得出$m(m-1)(m-2)$种从m个元素里每次取出3个元素的排列，并且其中沒有两种是相同的. 就是

$$A_m^3=m(m-1)(m-2).$$

同样我們可以求得：

$$A_m^4=m(m-1)(m-2)(m-3),$$

$$A_m^5=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).$$

一般来說：

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots[m-(n-1)],$$

就是 $$\boldsymbol{A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1).}$$

这就是說，**从m个元素里每次取出n个元素所有的排列的种数，等于n个連續自然数的积，其中最大的一个数是m.**

---

* A是拉丁字 Arrangement 的第一个字母.

从 m 个元素里每次取出 m 个元素的排列叫做**全排列**. m 个元素所有的全排列的种数，通常用符号 P_m 表示. *

在上面的公式里，設 $n=m$，就得:

$$P_m=A_m^m=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-m+1)$$
$$=m(m-1)(m-2)\cdot\cdots\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

就是 $\quad P_m=m(m-1)(m-2)\cdot\cdots\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

也就是 $\quad \boldsymbol{P_m=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot(m-2)(m-1)m.}$

这就是說，**m 个元素所有的全排列的种数等于自然数 1 到 m 的积.**

自然数 1 到 m 的积 $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot(m-2)(m-1)m$ 通常用 $m!$（或者 $\underline{|m}$，讀作"m 的阶乘"）表示，所以 m 个元素所有的全排列的种数的公式可以写成下面的形式:

$$\boldsymbol{P_m=m!}.$$

例 1 求証: $A_{16}^3=2A_8^4$.

証 $\quad A_{16}^3=16\times 15\times 14=2\times 8\times 3\times 5\times 2\times 7$

$$=2\times 8\times 7\times 6\times 5=2A_8^4.$$

例 2 解方程: $\quad A_{2n+1}^4=140\cdot A_n^3$.

解 $\quad A_{2n+1}^4=140\cdot A_n^3,$

$$(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)=140n(n-1)(n-2),$$
$$4n(2n+1)(2n-1)(n-1)=140n(n-1)(n-2).$$

因为 $n\geqq 3$，所以可以把方程的两边都除以 $4n(n-1)$，得

$$(2n+1)(2n-1)=35(n-2).$$

整理后，得

$$4n^2-35n+69=0.$$

解这个二次方程，得

$$n_1=3;\ n_2=\frac{23}{4}.$$

因为 n 必須是正整数，所以把 $n_2=\frac{23}{4}$ 舍去.

$$\therefore \qquad n=3.$$

例 3 用1、2、3、4四个数字可以組成多少个沒有重复数字的四位数？

解 很明显，所求的四位数的个数等于4个元素的全排列的种数.

$$P_4=4!=24.$$

答：可以組成24个沒有重复数字的四位数.

例 4 某人有9本不同的书，把其中的5本排在书架上，一共有多少种不同的排法？

解 很明显，排法的种数等于从9个元素里每次取出5个元素所有的排列的种数.

$$A_9^5=9\times8\times7\times6\times5=15\,120.$$

答：一共有15 120种不同的排法.

例 5 用0到9这10个数字可以組成多少个沒有重复数字的三位数？

解 从这10个数字里每次取出3个数字所有的排列，除去其中第一个数字是0的，都是所說的三位数. 因为从这10个数字里每次取出3个数字所有的排列的种数是 A_{10}^3，而其中第一个数字是0的排列的种数，等于从0以外的9个数字里每次取出2

---

* P 是拉丁字 Permutation 的第一个字母.

个数字所有的排列的种数，就是 A_9^2，所以所求的三位数的个数是 $A_{10}^3-A_9^2$.

$$A_{10}^3-A_9^2=10\times9\times8-9\times8=648.$$

答：可以組成 648 个沒有重复数字的三位数.

例 6 6 个儿童站成一排，其中某一个儿童不站在排头，也不站在排尾，一共有多少种站法？

解 6 个儿童站成一排，如果沒有限定什么条件，那末可以有 P_6 种站法．如果限定某一个儿童必須站在排头，那末可以有 P_5 种站法；同理，如果限定这一个儿童必須站在排尾，那末也有 P_5 种站法．从 P_6 减去 $2P_5$ 就得出所求的站法的种数.

$$P_6-2P_5=6!-2\times5!=(6-2)\times5!=4\times120=480.$$

答：有 480 种站法.

110. 組合 从三位先进工作者張、王、李里面，选出两位代表去北京参加会議，代表团的組成可以有下列 3 种：

張、王；　張、李；　王、李.

从不在一条直綫上的三个点 A、B、C 里面，每次取出两个点連結成一条直綫，可以得到下面的三条直綫：

AB；AC；BC.

从 m 个元素里，每次取出 n 个元素，不管怎样的順序幷成一組，叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的組合.

在本书中，只研究从 m 个各不相同的元素里每次取出 n 个 $(1\leqq n\leqq m)$ 各不相同的元素的組合，以后所說的从 m 个元素里每次取出 n 个元素的組合，都是指这样的組合．例如，从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的組合，就是指下面的 3 种組合：

$$ab;\ ac;\ bc.$$

根据組合的定义可以知道：如果两种組合里所含的元素不完全一样，例如，ab 和 ac，那末就是不同的組合；但是如果两种組合里所含的元素完全一样，只是排列的順序不同，例如 ab 和 ba，那末仍是相同的組合.

由此可知，組合和排列是不同的. 排列和元素排成的順序有关系，但是組合和这种順序沒有关系. 例如，ab 和 ba 是两种不同的排列，但是它們只是一种組合.

从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有不同的組合的种数，通常用符号 C_m^n 表示.*

現在我們来研究計算 C_m^n 的公式.

設有 m 个元素：$a, b, c, \cdots\cdots, k, l$.

从这 m 个元素里每次取出 1 个元素所有的組合的种数，很明显地是 m，这和从 m 个元素里每次取出 1 个元素所有的排列的种数是相等的. 就是

$$C_m^1 = A_m^1.$$

現在我們来研究从 m 个元素里每次取出 2 个元素所有組合的种数. 我們可以把它和从这 m 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数相比較. 我們已經知道，从 m 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数是 A_m^2. 由于每 P_2 种（2 种）这样的排列（例如 ab, ba），都对应于一种組合（ab），所以，从这 m 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数就等于从这 m 个元素

---

* C 是拉丁字 Combinaison 的第一个字母.

里每次取出 2 个元素所有組合的种数的 P_2 倍. 就是

$$A_m^2=C_m^2\times P_2,$$

因此

$$C_m^2=\frac{A_m^2}{P_2}.$$

再来研究从 m 个元素里每次取出 3 个元素所有組合的种数. 把它和从这 m 个元素里每次取出 3 个元素所有排列的种数 A_m^3 相比較. 由于每 P_3 种(6 种)这样的排列(例如 $abc, acb, bac, bca, cab, cba$), 都对应于一种組合($abc$), 所以, 从这 m 个元素里每次取出 3 个元素所有排列的种数等于从这 m 个元素里每次取出 3 个元素所有組合的种数的 P_3 倍. 就是

$$A_m^3=C_m^3\times P_3,$$

因此

$$C_m^3=\frac{A_m^3}{P_3}.$$

同样我們可以求得:

$$C_m^4=\frac{A_m^4}{P_4},$$

$$C_m^5=\frac{A_m^5}{P_5}.$$

一般来說:

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n}.$$

这就是說, 从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有組合的种数, 等于从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有排列的种数除以 n 个元素的全排列数.

如果我們把上面公式里右边的分式的分子和分母都乘以 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots(m-n)$, 就得:

$$C_m^n=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)\cdot(m-n)\cdots\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots(m-n)},$$

就是
$$C_m^n=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}. \tag{1}$$

在这个公式里把 n 换成 $m-n$，就得：

$$C_m^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!\,[m-(m-n)]!}=\frac{m!}{(m-n)!\,n!}. \tag{2}$$

把(1)和(2)加以比較，可以得到：

$$C_m^n=C_m^{m-n}.$$

这就是說，**从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有組合的种数，等于从 m 个元素里每次取出 $m-n$ 个元素所有組合的种数.**

这个公式也可以从組合的定义直接得出．因为从 m 个元素里每次取出 n 个元素，就剩下 $m-n$ 个元素，两次取出的 n 个元素如果完全一样，那末两次剩下的 $m-n$ 个元素也就完全一样，所以从 m 个元素里取出 n 个元素的每一种組合，都对应着从 m 个元素里取出 $m-n$ 个元素的唯一的一种組合．反过来也是一样．因此，从 m 个元素里每次取出 n 个元素所有組合的种数等于从 m 个元素里每次取出 $m-n$ 个元素所有組合的种数.

在 $n>\frac{m}{2}$ 的时候，利用这个公式可以把計算 C_m^n 的过程化簡.

例 1　求 C_7^3, C_{100}^{97}.

解
$$C_7^3=\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}=35,$$

$$C_{100}^{97}=C_{100}^3=\frac{100\times99\times98}{1\times2\times3}=161\,700.$$

例 2　**求証：** $C_m^n+C_m^{n-1}=C_{m+1}^n$.

証 $C_m^n+C_m^{n-1}=\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}+\dfrac{m!}{(n-1)!\,[m-(n-1)]!}$

$$=\frac{m!\,[(m-n+1)+n]}{n!\,(m-n+1)!}=\frac{m!\,(m+1)}{n!\,(m-n+1)!}$$

$$=\frac{(m+1)!}{n!\,[(m+1)-n]!}=C_{m+1}^n.$$

例 3 学校开运动会，一共有 8 个籃球队参加籃球比賽．如果每队都要和其他的队比賽一次，那末全校一共要比賽籃球多少次？

解 很明显，所求的比賽的次数就是从 8 个元素里每次取出 2 个元素所有組合的种数．

$$C_8^2=\frac{8\times 7}{1\times 2}=28.$$

答：一共要比賽籃球 28 次．

例 4 平面內有 12 个点，沒有 3 个点在一条直綫上．以每 3 个点为頂点作三角形，一共可以作出多少个三角形？

解 很明显，所求的三角形的个数就是从 12 个元素里每次取出 3 个元素所有組合的种数．

$$C_{12}^3=\frac{12\times 11\times 10}{1\times 2\times 3}=220.$$

答：一共可以作出 220 个三角形．

例 5 課外科学研究小組共有 13 个人，其中男同学 8 个人，女同学 5 个人．从这 13 个人里选出 3 个人准备报告，在选出的 3 个人里至少要有一个女同学，一共有多少种选法？

解 1 从这 13 个人里选出 3 个人，其中恰有 1 个女同学、恰有 2 个女同学、恰有 3 个女同学的选法分別有 $C_5^1C_8^2$、$C_5^2C_8^1$、C_5^3

种，因此至少有一个女同学的选法有 $C_5^1C_8^2+C_5^2C_8^1+C_5^3$ 种.

$$C_5^1C_8^2+C_5^2C_8^1+C_5^3=5\times 28+10\times 8+10=230.$$

解 2 从 13 个人里选出 3 个人，共有 C_{13}^3 种选法，在这些选法里，3 个人全是男同学的选法有 C_8^3 种，因此至少有一个女同学的选法有 $C_{13}^3-C_8^3$ 种.

$$C_{13}^3-C_8^3=286-56=230.$$

答：共有 230 种选法.

习题三十四

1. 写出：

(1) 从 4 个元素 a、b、c、d 里每次取出 2 个元素的所有排列；

(2) 从 4 个元素 a、b、c、d 里每次取出 3 个元素的所有排列.

2. 計算：

(1) A_{10}^4；　(2) $A_8^4-2A_8^3$；

(3) $\dfrac{A_{15}^9}{A_9^9}$；　(4) $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}$.

3. 計算：

(1) P_8；　(2) $P_{10}-9P_9-8P_8$；

(3) $\dfrac{P_{10}}{P_6\cdot P_4}$；　(4) $\dfrac{A_7^5-P_6}{6!+5!}$.

4. 求証：

(1) $A_2^2+A_3^2+A_4^2=A_5^3$；　(2) $P_{n+1}-P_n=n^2P_{n-1}$；

(3) $A_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}$；　(4) $A_m^n+nA_m^{n-1}=A_{m+1}^n$.

5. 解方程：

(1) $A_x^2=30$；　(2) $A_x^3=xP_3$；

(3) $A_{2x}^3=10A_x^3$；　(4) $\dfrac{A_x^5+A_x^4}{A_x^3}=4$.

6. (1) 从多少个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数是 56?

(2) 已知从 n 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数等于从 $(n-4)$ 个元素里每次取出 2 个元素所有排列的种数的 7 倍，求 n。

7. 5 个人坐在一条长凳上，有多少种坐法?

8. 从 40 本不同的书中取出三本，送給三人，每人一本，有多少种方法?

9. (1) 由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 可以組成多少个沒有重复数字的五位数?

(2) 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以組成多少个沒有重复数字的五位数?

(3) 由数字 1, 2, 3, 4, 5 可以組成多少个沒有重复数字的自然数?

(4) 由数字 1, 2, 3, 4, 5 可以組成多少个沒有重复数字并且比 13 000 大的自然数?

10. 7 个人并坐照相:

(1) 如果某一人必須坐在中間，有多少种坐法?

(2) 如果某两人必須坐在两端(左右不限)，有多少种坐法?

(3) 如果某一人不坐在中間，也不坐在两端，有多少种坐法?

11. (1) 求在由 2、3、4、5 所組成的所有沒有重复数字的四位数里，各个数字的和.

(2) 求由 2、3、4、5 所組成的所有沒有重复数字的四位数的和.

12. 写出:

(1) 从 4 个元素 a、b、c、d 里每次取出 2 个元素的所有組合;

(2) 从 4 个元素 a、b、c、d 里每次取出 3 个元素的所有組合;

并且和第 1 題的結果相比較.

13. 計算:

(1) C_{15}^{3};　　(2) C_{200}^{197};

(3) $C_7^3-C_6^2$;　　(4) $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$.

14. 求証:

(1) $C_6^3=2C_5^3$;　　(2) $C_{10}^3=2A_5^3$;

(3) $C_m^{n+1}\div C_m^n=\dfrac{m-n}{n+1}$;　　(4) $C_{m+1}^n=C_m^{n-1}+C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}$.

15. 解方程:

(1) $C_x^3=A_x^2$;　　(2) $11C_x^3=24C_{x+1}^2$;

(3) $C_{x+2}^x+C_x^{x-2}=C_6^3+C_3^3$;　　(4) $xC_x^{x-3}+A_x^3=4C_{x+1}^3$.

16. (1) 10个人相遇，每两个人握手一次，一共握了几次？

(2) 每两个人握手一次，一共握了10次，有多少个人？

17. 某生产队有12个队員，从这里面打算选出5个人去做一件工作，一共有多少种选法？

18. 从9个字母 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7、a_8、a_9 里面，每次取出不同的4个相乘，可以組成多少种不相恒等的积？

19. (1) 平面內有8个点，沒有三个点在一条直綫上，过每两个点作一条直綫，一共可以作出多少条直綫？

(2) 空間有10个点，沒有四个点在一个平面內，过每三个点作一个平面，一共可以作出多少个平面？

20. 求下列凸多边形的对角綫的数目：

(1) 五边形；　　(2) n 边形．

21. 平面內有10个点，其中有某三个点在一条直綫上，此外沒有三个点在一条直綫上．过这10个点里的每两个点可以連多少条直綫？

22. 8个学生参加学校里举办的象棋比赛，每个学生应当和其他的学生每人比赛3次，那末一共比賽多少次？

23. 从 $m+1$ 个元素 a_1、a_2、a_3、……、a_m、a_{m+1} 里面，每次取出 n 个元素 $(1\leqq n\leqq m)$：

(1) 可以組成多少个組合？

(2) 在这些組合里，有多少个是不含有 a_1 的？

(3) 在这些組合里，有多少个是含有 a_1 的？

(4) 从上面的結果，可以得出一个怎样的公式？

24. 从全班52个人当中挑出5个人参加某种課外活动：

(1) 如果班長和副班長必須在內，有多少种挑法？

(2) 如果班長和副班長必須有一个人并且只能有一个人在內，有多少种挑法？

(3) 如果班長和副班長都不在內，有多少种挑法？

(4) 如果班長和副班長至少有一个人在內，有多少种挑法？

25. 有6件东西，从它們中間取出一件、两件、三件、四件、五件或者六件，一共有多少种取法？

26. 設有 m 个字母 a、b、c、……、k、l：