

夹层板壳的弯曲 稳定和振动

中国科学院北京力学研究所
固体力学研究室板壳组著

科学出版社

内 容 简 介

本书对夹层板壳的力学性能进行了分析和讨论,对现有主要的夹层板壳实用理论作了比较,阐明各个实用理论的力学基础和实用范围,给出夹层板壳的弯曲、稳定性和振动的公式,以及一些常用典型实例的计算结果和简化公式,以便于工程设计人员使用。

本书可供航空、造船、建筑等方面从事夹层结构工作的研究人员和工程技术人员参考。

夹层板壳的弯曲、稳定和振动

中国科学院北京力学研究所
固体力学研究室板壳组 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

北京印刷三厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1977年12月第一版	开本: 850×1165 1/32
1977年12月第一次印刷	印张: 8 3/8
印数: 0001—5,960	字数: 218,000

统一书号: 13031·646

本社书号: 940·13—2

定价: 1.05 元

引 言

近二十多年来,在航空、宇航和船舶制造等部门,夹层结构这种新型结构得到了愈来愈广泛的重视。

夹层板壳是由两块高强度的薄表层(承载层)和充填其中用以保证两块表层共同工作的、软而轻的中间层(夹心)所组成。表层通常采用金属(不锈钢、铝)、玻璃钢、硬塑料等。夹心可以采用泡沫塑料、波纹金属薄片、铝或不锈钢箔片制成的蜂窝等。这样的结构具有重量轻、强度高、刚性大的特点。若适当选择表层和夹心,还可以获得良好的抗振、隔热、隔音及其它必要的性能。此外,由于不采用大面积铆接,可以减少应力集中,而使疲劳强度有较大的提高。由于以上这些优点,夹层结构正在各种军用和民用部门得到愈来愈广泛的应用。

在设计夹层结构时,必须校核它的强度和稳定性。夹层板壳结构在力学上的特点是表层为主要承载层,而夹心的作用是把两块表板撑开,和表层牢固地结合在一起并承受剪应力。这与工字梁的想法相似,即表层起着翼板的作用,夹心起着腹板的作用。在夹层板壳的理论工作中,已经提出了不少计算模型;仅就线性理论来分析,常见的理论大致可以概括为以下几种类型:

1. **Reissner 型理论** 把表层薄板看作为一薄膜,即认为只承受平面力,忽略了其本身的抗弯刚度,夹心则认为只承受抗剪作用。

2. **Hoff 型理论** 把表层看作为普通的薄板而夹心仍认为只承受剪切作用。

3. **Прусаков-杜庆华型理论** 把表层看作为普通薄板,夹心除了承受剪切外,还存在夹心的横向弹性变形的作用。

除了以上三种基本理论模型外,还有一些更为复杂或更简单

的计算方法,这里不再赘述。

在国际上,就以上几种类型的理论和计算已发表了大量的文章,但是感到不足的是在这些文章中,包括提出各种理论的作者在内,没有讲清楚各种理论的力学特点和适用范围,这些理论的内在联系和差别,因而在具体应用时,工程技术人员常常会感到无所适从。

本书以弹性理论为依据,计及各种主要因素,详细分析了各力学因素的作用,采用不同的参数将方程分解出来,再从理论上指出其相互关系。这样,上述的几种夹层板壳的理论,都可以由第三种类型的理论略去个别的方程或项而得到。本书还指出所作简化的适用范围,这样可以便于工程技术人员在设计时,根据具体情况选用合适的简化方程,也有助于读者学习和掌握夹层板壳理论。

应该指出,本书着重介绍我们的研究工作,对国内外的有关研究成果一般不作评述。对文献及理论发展综述有兴趣的读者可参看[15],[21],[22],[48],[62]。

本书着重分析夹层板壳中各个力学因素的作用,而不是一般公式、图表的汇编。对公式、图表有兴趣的读者可参看[7],[14],[32],[47],[57]。

本书是在总结力学研究所十多年关于夹层板壳的研究工作的基础上,经整理补充写成的。其中有些工作是理论性的研究工作,有些是有关生产设计部门提出来的。为了便于生产、设计人员工作上的需要,本书尽量给出分析公式、简化公式以及数值结果。

本书共分十章。第一章是最常用的一种理论,在不少工程实际问题中,其精度已能满足要求;因此这一章的篇幅较大,典型实例也较多。第二章主要是在第一章的基础上,讨论将夹心看作为正交各向异性的情况。第三章叙述了夹层板弹性常数的计算公式,给出蜂窝夹层板的各个模量和刚度的测试方法和测定结果。第四章是在第一章的基础上,考虑了表板的抗弯刚度。第五章除了计及表板抗弯刚度外,又考虑了夹心的横向弹性的影响。第六章是在第一章和第四章的理论基础上,研究了曲板的稳定性。第

七章是在第五章的理论基础上,探讨了夹层锥壳和柱壳的轴对称弯曲。第八章是在第一章和第四章的理论基础上,进行夹层板和夹层曲板固有频率的计算。第九章是把 Bijlarrd 在稳定问题中提出的分解刚度法——一种近似计算方法,推广到弯曲和振动问题中去。第十章把夹心作为厚板处理,说明考虑了夹心抗弯作用后,现有夹层板理论问题所概括的公式仍然适用。

本书涉及的范围,仅仅是我们工作中接触到的一部分,没有包括夹层板壳的全部内容。大部分篇幅还只是讨论了线性理论和夹心各向同性的情况。随着航空和宇航事业的发展,在高速、高温条件下,飞行器的新型结构对夹层板壳的构造和材料提出了新的要求,因此,对夹层板壳的理论研究也提出了相应的课题;而随着实验手段、计算工具的进一步完善,我们相信,夹层板壳的研究一定会更加迅速地发展。

目 录

引言

第一章 各向同性夹层板理论	(1)
§ 1. 基本方程	(1)
§ 2. 基本方程的简化及圆板的基本方程	(6)
§ 3. 无限宽夹层板在均布载荷作用下的弯曲	(10)
§ 4. 夹层圆板的轴对称弯曲	(12)
§ 5. 周边简支的矩形和多边形夹层板在横向载荷下的弯曲	(15)
§ 6. 具有固支边或自由边的矩形夹层板在横向载荷作用下的弯曲	(19)
§ 7. 受均布载荷作用的矩形夹层板在各类边界条件下的计算结果	(31)
§ 8. 夹层板非线性弯曲的简例及线性弯曲理论的适用范围	(38)
§ 9. 无限宽板在单向压缩作用下的稳定性	(47)
§ 10. 夹层圆板在均匀压力作用下的稳定性	(49)
§ 11. 四边简支矩形夹层板在均匀纵向压缩下的稳定性	(50)
§ 12. 对边固支另对边简支矩形夹层板在固支边上承受均匀压力的稳定性	(53)
§ 13. 对边固支另对边简支矩形夹层板在简支边上承受均匀压力的稳定性	(58)
§ 14. 对边简支无限长夹层板在均匀剪切力作用下的稳定性	(60)
第二章 正交各向异性夹层板的理论	(63)
§ 1. 基本方程	(63)
§ 2. 蜂窝型夹心的夹层板	(66)
§ 3. 四边简支的矩形蜂窝型夹层板在均布载荷作用下的弯曲	(69)
§ 4. 四边简支的矩形蜂窝型夹层板在纵向均匀压力作用下的稳定性	(71)
§ 5. 波纹型夹心的夹层板	(74)

第三章 软夹心夹层板的弹性常数(77)

- § 1. 夹层板弹性常数的定义和计算式 (77)
- § 2. 蜂窝夹心的折合弹性模量 (79)
- § 3. 弯曲刚度、剪切刚度的测定 (82)
- § 4. 扭转刚度及泊松系数的测定 (85)
- § 5. 平面刚度的测定 (90)
- § 6. 夹心弹性模量的测定 (91)

第四章 考虑表层抗弯刚度的各向同性夹层板理论(93)

- § 1. 基本方程 (93)
- § 2. 无限宽夹层板在均布载荷作用下的弯曲 (100)
- § 3. 基本方程的简化和简支边界条件的简化 (105)
- § 4. 四边简支矩形夹层板在均布载荷和集中载荷作用下的弯曲 (107)
- § 5. 四边简支及对边简支另对边固支矩形夹层板在均布载荷作用下弯曲问题的精确解 (112)
- § 6. 渐近近似解法 (116)
- § 7. 无限宽夹层板在单向压缩下的稳定性 (121)
- § 8. 四边简支矩形夹层板在均匀纵向压缩下的稳定性 (124)
- § 9. 对边简支另对边固支矩形夹层板在简支边上承受均匀压力的稳定性 (126)

第五章 考虑表层抗弯刚度和夹心横向弹性的各向同性夹层板理论(129)

- § 1. 基本方程 (129)
- § 2. 夹层板反对称变形方程的简化和简支边界条件的简化 (136)
- § 3. 四边简支矩形夹层板的弯曲 (138)
- § 4. 四边简支及对边简支对边固支矩形夹层板在均布载荷作用下反对称弯曲的精确解 (143)
- § 5. 渐近近似解法 (146)
- § 6. 计算比较 (151)

第六章 夹层曲板的稳定性(155)

- § 1. 基本方程 (155)
- § 2. 四边简支夹层曲板在均匀轴向压缩下的稳定性 (158)
- § 3. 四边简支夹层曲板在剪切作用下的稳定性 (166)

§ 4. 四边简支夹层曲板在轴向力和剪切联合作用下的稳定性	… (176)
§ 5. 四边简支夹层曲板在均匀轴向压力作用下的大挠度分析	… (180)
§ 6. 均匀轴压下简支曲板的稳定性试验	… (188)
第七章 夹层锥壳和圆柱壳的轴对称弯曲	… (190)
§ 1. 夹层锥壳的基本方程	… (190)
§ 2. 基本方程的简化与近似	… (198)
§ 3. 夹层锥壳边界效应解的算例	… (204)
§ 4. 夹层圆柱壳的方程	… (210)
第八章 夹层板和夹层曲板的固有频率的计算	… (211)
§ 1. 基本方程	… (211)
§ 2. 四边简支矩形夹层板的固有频率	… (213)
§ 3. 对边简支另对边固支的矩形夹层板的固有频率	… (220)
§ 4. 四边固支矩形夹层板的固有频率	… (222)
§ 5. 四边简支夹层曲板的固有频率	… (227)
第九章 分解刚度法在夹层板理论中的应用	… (235)
§ 1. 弯曲问题中的分解刚度法	… (235)
§ 2. 稳定问题中的分解刚度法	… (237)
§ 3. 振动问题中的分解刚度法	… (238)
第十章 厚板理论及夹心为厚板的夹层板理论	… (240)
§ 1. 厚板理论	… (240)
§ 2. 夹心为厚板的夹层板理论	… (251)
参考文献	… (256)

第一章

各向同性夹层板理论

近二十多年以来,不少人提出了各种夹层板理论。本章介绍的 Reissner¹⁾在1947年提出的夹层板理论,是最简单的夹层板理论之一。这种理论,在经典薄板理论的基础上,考虑了夹心的剪应变,而这一点正是夹层板区别于单层板的最主要的因素。由于其数学方程同其它理论相比较为简单,并能解决许多具体问题,而通过大量的工作实践,也证实了对于多数工程问题来说,这种模型具有足够的精度,因此在本章中,我们比较详细地叙述这种理论,并举出较多的典型实例进行计算和讨论。

§1. 基本方程

考虑一块由两层平面刚度较大、厚度较小的各向同性表层和一层材料较软、厚度较大的各向同性夹心所组成的三层板,如图1.1所示。取夹心的中面为 xy 平面, z 轴垂直于 xy 面,在 $z > 0$ 一边的表层称为上表层,在 $z < 0$ 一边的表层称为下表层。

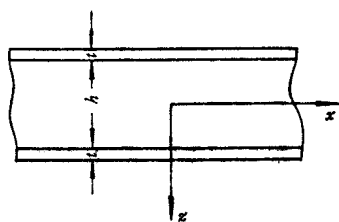


图 1.1

夹层板的 Reissner 理论,是在下列几点假设的基础上建立起来的:

(1) 由于表层很薄,所以假定应力沿表层厚度是均匀分布的,即假定表层处于薄膜应力状态。

1) Reissner, E., Quar. of Appl. Math., 1947, v 5, No.1.

(2) 由于夹心较软, 所以忽略夹心中平行于 xy 平面的应力分量, 即假定在夹心中 $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

(3) 由于在本章中只考虑夹层板的反对称变形, 所以可假定在夹心和表层中 $\varepsilon_z = 0$.

(4) 由于在夹心和表层中, 应力分量 σ_z 很小, 所以可假定 $\sigma_z = 0$.

根据假设 (2), 夹心在 x, y 方向上的平衡方程可简化为:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0. \quad (1.1)$$

由此可知, τ_{xz} 和 τ_{yz} 只是 x, y 的函数, 即剪应力沿夹心厚度为均匀分布.

令 Q_x, Q_y 为夹层板中的总横向剪力. 根据假设 (1), 只有夹心中的剪应力构成 Q_x 和 Q_y , 故有

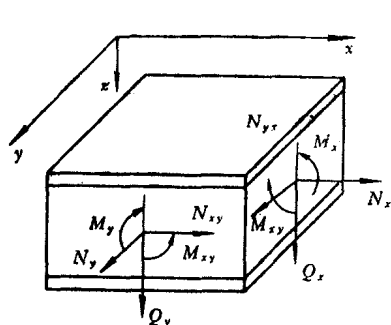


图 1.2

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{h}, \quad \tau_{yz} = \frac{Q_y}{h};$$

但根据后面章节讲到的原因, 下列公式比上式更接近实际情况:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{Q_x}{h+t}, \\ \tau_{yx} &= \frac{Q_y}{h+t}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

根据虎克定律, 相应的剪应变变为

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Q_x}{G_c(h+t)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{Q_y}{G_c(h+t)}. \quad (1.3)$$

式中 G_c 为夹心在 xz 和 yz 平面内的剪切模量, u, v, w 为夹心中各点在 x, y, z 轴方向的位移.

将公式 (1.3) 对 z 积分一次, 得到

$$u = -z\phi_x, \quad v = -z\phi_y, \quad (1.4)$$

其中

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{Q_x}{G_c(h+t)}, \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{Q_y}{G_c(h+t)}. \quad (1.5)$$

将(1.5)式各项整理一下可得

$$Q_x = C \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right), \quad Q_y = C \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right), \quad (1.6)$$

其中 C 表示夹层板的剪切刚度, 其值为

$$C = G_c(h+t). \quad (1.7)$$

公式(1.4)表明, 夹心中垂直于中面的直线段, 在变形以后仍为直线. 函数 ϕ_x, ϕ_y 即为直线段在 xz 及 yz 平面内的转角. 转角 ϕ_x, ϕ_y 的方向分别在 xz 和 yz 平面中, x 轴和 y 轴到 z 轴的转向为正方向. 变形后的直线段一般不再垂直于中面.

表层

命 u^+, v^+ 为上表层中面上各点在 x, y 轴方向的位移, u^-, v^- 为下表层中面上各点在 x, y 轴方向的位移, 根据假设(1)将有

$$u^\pm = \mp \frac{h+t}{2} \phi_x, \quad v^\pm = \mp \frac{h+t}{2} \phi_y. \quad (1.8)$$

命 $\sigma_x^\pm, \sigma_y^\pm, \tau_{xy}^\pm$ 为上下表层中的应力分量, 根据虎克定律有

$$\begin{aligned} \sigma_x^\pm &= \frac{E_f}{1-\nu_f^2} \left(\frac{\partial u^\pm}{\partial x} + \nu_f \frac{\partial v^\pm}{\partial y} \right), \\ \sigma_y^\pm &= \frac{E_f}{1-\nu_f^2} \left(\frac{\partial v^\pm}{\partial y} + \nu_f \frac{\partial u^\pm}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy}^\pm &= \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \left(\frac{\partial u^\pm}{\partial y} + \frac{\partial v^\pm}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

其中 E_f, ν_f 是表层的弹性模量和泊松系数. 夹层板中的总弯矩 M_x, M_y 和总扭矩 $M_{xy} = M_{yx}$ 为

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} (h+t) t (\sigma_x^+ - \sigma_x^-), \\ M_y &= \frac{1}{2} (h+t) t (\sigma_y^+ - \sigma_y^-), \\ M_{xy} &= \frac{1}{2} (h+t) t (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-). \end{aligned} \quad (1.10)$$

将 (1.8), (1.9) 两式代入 (1.10) 式, 化简后得到

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu_l \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu_l \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{D}{2} (1 - \nu_l) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中

$$D = \frac{E_l(h+t)^2 t}{2(1-\nu_l^2)}; \quad (1.12)$$

D 称为夹层板的抗弯刚度.

在 Reissner 理论中, 考虑横向平衡时, 若以总横向剪力 Q_x, Q_y , 和总弯矩、总扭矩 M_x, M_y, M_{xy} 来表示, 则横向平衡方程与单层板相同, 即为

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (1.15)$$

这里 q 是作用在夹层板上单位面积内的横向载荷, 符号规定为: q 方向与 z 轴方向相同时为正, 相反时为负. 如果在板平面内有预加的内力 N_x, N_y, N_{xy} , 那么在 z 轴方向的平衡方程 (1.15) 应如下式所代替

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0. \quad (1.16)$$

将 (1.6), (1.11) 式代入 (1.13), (1.14), (1.16), 则得到以 ϕ_x, ϕ_y, w 表示的平衡方程如下:

$$D \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_l}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu_l}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) = 0, \quad (1.17)$$

$$D \left(\frac{1+\nu_l}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu_l}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + C \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) = 0, \quad (1.18)$$

$$C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0. \quad (1.19)$$

下面讨论边界条件。令板中面在 xy 平面上的边界线为 c ，边界线的切线方向为 s ，向外的法线方向为 n ，并规定 n 到 s 的转向与 x 轴到 y 轴的转向相同。令 n 与 x 轴的夹角为 α ，则法线方向 n 的方向余弦 l, m 为

$$l = \cos \alpha, \quad m = \sin \alpha. \quad (1.20)$$

与单层板相比不难看出， $M_n, M_s, Q_n, \phi_n, \phi_s, N_n, N_{ns}$ 的表达式与单层板相同即

$$\left. \begin{aligned} M_n &= l^2 M_x + 2lm N_{xy} + m^2 M_y, \\ M_s &= (l^2 - m^2) M_{xy} + (M_y - M_x) lm, \\ Q_n &= l Q_x + m Q_y, \\ \phi_n &= l \phi_x + m \phi_y, \\ \phi_s &= -m \phi_x + l \phi_y, \\ N_n &= l^2 N_x + 2lm N_{xy} + m^2 N_y, \\ N_{ns} &= (l^2 - m^2) N_{xy} + (N_y - N_x) lm. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

边界条件可归纳为以下几种情况：

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{w} \quad \text{或} \quad Q_n + N_n \frac{\partial w}{\partial n} + N_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} = \bar{Q}_n, \\ \phi_n &= \bar{\phi}_n \quad \text{或} \quad M_n = \bar{M}_n, \\ \phi_s &= \bar{\phi}_s \quad \text{或} \quad M_s = \bar{M}_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

这里 $\bar{w}, \bar{\phi}_n, \bar{\phi}_s, \bar{Q}_n, \bar{M}_n, \bar{M}_s$ 为边界线上的已知函数，

固支边： w, ϕ_n, ϕ_s 为已知；

简支边： w, M_n, ϕ_s 为已知；

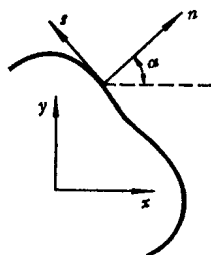


图 1.3

自由边: $M_n, M_s, Q_n + N_n \frac{\partial w}{\partial n} + N_s \frac{\partial w}{\partial s}$ 为已知.

综上所述, 本章所述的理论将归结为求解三个广义位移 w, ϕ_x, ϕ_y 和五个广义内力 $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ 的问题. 而这八个函数分别满足三个平衡方程 (1.13), (1.14), (1.15) 和五个应力应变关系 (1.6), (1.11). 或者若以 w, ϕ_x, ϕ_y 来表示, 则需满足 (1.17), (1.18), (1.19) 三式. 本章的理论在边界上有三个广义位移, 需要三个边界条件.

由于考虑了夹心的剪应变, 将使夹层板的挠度比对应的单层板增加, 而临界载荷则降低.

本章的理论对于夹层板的力学因素作了较大的简化, 因此对于某些问题会带来矛盾, 如计算集中载荷的问题将成为不可能; 在固支边界上, $\frac{\partial w}{\partial n}$ 的值通常不能由边界条件确定. 在薄板理论中, 固支边上 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 是给出的; 因为在薄板理论中

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \phi_n.$$

在本章的理论中, 由 (1.5) 式可知

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \phi_n + \frac{Q_n}{C},$$

而 Q_n 在固支边上是未知数, 因此 $\frac{\partial w}{\partial n}$ 也是未知的.

§ 2. 基本方程的简化及圆板的基本方程

在前一节中, 已经导出了以 w, ϕ_x, ϕ_y 为基本未知量的三个方程 (1.17), (1.18), (1.19). 因方程比较繁复, 胡海昌¹⁾曾把这组方程进行了简化, 归并为求解两个函数的两个方程.

令 ϕ_x, ϕ_y 由另外两个函数 ω, f 来表示, 其表示形式如下:

1) 胡海昌, 各向同性夹层板反对称小挠度的若干问题, 力学学报. 6(1), 1963.

$$\phi_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \phi_y = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.1)$$

这种表示总是可能的,但不是唯一的,也就是说在给定 ϕ_x, ϕ_y 以后,根据 (2.1) 式去找 ω 和 f ,可以得到一组以上的解.这是由于齐次方程

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

有解存在.这是柯西-黎曼方程.(2.2)的解可用一个复变函数 $\varphi(x+iy)$ 表示如下:

$$f_0 + i\omega_0 = \varphi(x+iy). \quad (2.3)$$

由此可见,若将 ω 增加一个 ω_0 ,而同时将 f 增加一个 f_0 时,不会改变 ϕ_x, ϕ_y 的值.

将 (2.1) 式代入 (1.17), (1.18), 则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [D\nabla^2 \omega + C(\omega - \omega)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{D}{2}(1 - \nu_l) \nabla^2 f - Cf \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} [D\nabla^2 \omega + C(\omega - \omega)] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{D}{2}(1 - \nu_l) \nabla^2 f - Cf \right] &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

这里

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.5)$$

由方程 (2.4) 可以看出,它与 (2.2) 属于同一类型,把这组方程中的方括号看作两个独立的函数,那么方程 (2.4) 又是一个柯西-黎曼方程,它的解可以用一个复变函数 $F(x+iy)$ 表示如下:

$$\begin{aligned} \frac{D(1-\nu_l)}{2} \nabla^2 f - Cf + i [D\nabla^2 \omega + C(\omega - \omega)] \\ = F(x+iy) \end{aligned} \quad (2.6)$$

这是 f, ω, w 的非齐次微分方程,它的解可表示为任一特解与相应的齐次方程的解之和.由于 $F(x+iy)$ 的实部和虚部都是调和函数,方程 (2.6) 的特解 f_1, ω_1, w_1 可取为

$$f_1 + i\omega_1 = -\frac{1}{C} F(x+iy), \quad w_1 = 0; \quad (2.7)$$

而相应的齐次方程为

$$\frac{D}{2} (1 - \nu_f) \nabla^2 f - C f = 0, \quad (2.8)$$

$$D \nabla^2 \omega + C (\omega - \omega) = 0. \quad (2.9)$$

特解 (2.7) 不产生挠度, 同时由上面对 (2.3) 式的说明, 它也不影响 ϕ_x, ϕ_y 的值; 因此这组特解可以略去. 这样, f, ω 和 ω 只要理解为满足齐次方程 (2.8), (2.9) 的函数便可以了. 由方程 (2.9) 得到

$$\omega = \omega - \frac{D}{C} \nabla^2 \omega. \quad (2.10)$$

将 (2.1), (2.10) 代入 (1.19), 得到 ω 需满足的方程如下:

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 \omega - \left(N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ \cdot \left(\omega - \frac{D}{C} \nabla^2 \omega \right) = q. \end{aligned} \quad (2.11)$$

所以总起来说, 挠度 ω 和转角 ϕ_x, ϕ_y 可以用两个函数 ω, f 表示如下:

$$\begin{aligned} \phi_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \phi_y = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \omega = \omega - \frac{D}{C} \nabla^2 \omega, \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 ω 与 f 分别满足方程 (2.8) 和 (2.11).

由于引进了函数 ω 和 f , 使得基本方程简化为两个不耦合的方程. 但是必须指出, 对于大多数具体问题, 在边界条件的表达式中, ω 与 f 是耦合的; 因此还必须联立求解. 在个别问题的边界条件中, ω 与 f 不同时出现, 这时问题就大大简化了, ω 与 f 便可以分别独立地求解了.

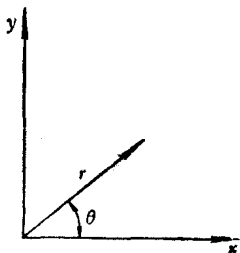


图 1.4

上面介绍了直角坐标系中的 Reissner 理论的基本方程. 现在写出极坐标中的基本方程. 取极坐标为 r, θ 如图 1.4 所示, 使得

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2.13)$$

令 ϕ_r, ϕ_θ 为变形前垂直中面的直线段在 rz 和 θz 平面内的转角, ω 仍为挠度; $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$ 为极坐标中的弯矩和扭矩; Q_r, Q_θ 为在极坐标中的横向剪力, 经过坐标变换, 由 (1.6), (1.11) 可得到极坐标中的内力和应变关系如下:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial \phi_r}{\partial r} + \nu_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} \right) \right], \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\phi_r}{r} + \nu_1 \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right], \\ M_{r\theta} &= -\frac{D}{2} (1 - \nu_1) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} - \frac{\phi_\theta}{r} \right], \\ Q_r &= C \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} - \phi_r \right), \\ Q_\theta &= C \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \phi_\theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

挠度 ω 与转角 ϕ_r, ϕ_θ 可用函数 ω, f 表示如下:

$$\phi_r = \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \phi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\omega = \omega - \frac{D}{C} \nabla^2 \omega, \quad (2.15)$$

其中 ∇^2 为在极坐标中的拉氏微分算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.16)$$

函数 f 仍满足方程 (2.8), 而函数 ω 满足的方程变为

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega - \left[N_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2N_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] \left(\omega - \frac{D}{C} \nabla^2 \omega \right) = q. \quad (2.17)$$

这里 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ 为预加的板向力在极坐标中的分量.