成人高等教育系列教材

微积分

主　编 章　德
副主编 罗亚平

南京大学出版社

微 积 分

主　编　章　德
副主编　罗亚平

南京大学出版社

内容简介

本书主要为一元函数微积分.包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分,最后一章简要介绍了多元函数微积分的基本知识.

本书少而精、突出重点,深入浅出,例题丰富、易读易懂,适合文科类及成人教育系列各专业作教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/章德等主编. —南京:南京大学出版社,2001.8

(成人高等教育教材系列)

ISBN 7-305-03713-3

Ⅰ.微… Ⅱ.章… Ⅲ.微积分-成人教育:高等教育-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 030499 号

书　　名　**微积分**
主　　编　章　德　副主编　罗业平
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话　025-3596923　025-3592317　传真　025-3303347
网　　址　www.njupress.com
电子函件　nupress1@public1.ptt.js.cn
经　　销　全国新华书店
照　　排　南京理工排版校对有限公司
印　　刷　丹阳市兴华印刷厂
开　　本　850×1168　1/32　印张　10.25　字数　265 千
版　　次　2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
印　　数　1～4100
ISBN 7-305-03713-3/O·263
定　　价　20.00 元

前　　言

本书编著者在南京大学担任数学课的教学工作数十年，具有极为丰富的教学经验．同时长期从事大专层次高等数学的教学工作．十分熟悉大专层次高等数学教学的内容和特点．由于作者连续多年参加全国有关高等数学考试大纲的制订、考试教材及考试辅导教材的编写工作，多次参加江苏省有关高等数学考试的命题工作，因此对文科类大专层次高等数学的课程内容及考试要求均非常熟悉．

本书包含四部分内容：一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微分学（以二元函数为主要内容）及多元函数积分学（以二重积分为主要内容）．前三部分是必修的内容，第四部分可根据学时安排的多少而进行取舍．这部分内容是与“专升本”考试内容相衔接的．

本书的编写具有以下特点：

(1) 充分掌握课程设置的目的，强调高等数学课程的设置主要是为后继课程服务的．

(2) 合理取舍教材内容，突出高等数学“广泛的应用性”，而不过分追求数学“高度的抽象性”．

(3) 与“专升本”高等数学考试的内容紧密联系与衔接，便于今后学生参加“专升本”相应的升学考试．

(4) 充分体现大专层次对高等数学的要求，不过分强调数学“严密的逻辑性”，而是通过讲解大量的例题来提高学生的理解能力和计算能力．

(5) 强调基本概念、基本知识、基本技能的理解与运用，强调计算能力的掌握与提高．

由于作者水平的限制，书中难免有不妥之处，敬请有关的专家、教师和读者提出宝贵的意见，以便在今后改正.

最后借此机会向南京大学继续教育学院的领导表示衷心的感谢，由于他们的关心，使本书得以早日出版.

编者

2001年5月

目　录

1

函　　数

函数是微积分学的基本概念和主要研究对象.本章从复习初等数学中的某些知识开始,逐步建立函数的一般定义,并讨论函数的主要性质.在总结基本初等函数的基础上,分析初等函数的结构.最后给出在经济学中常用的几种函数.

1.1　实数与数轴

人们对数的认识是随着生产力的发展和科学技术进步的需要而逐步深入的.最早是自然数,然后是负整数和0,继而发展到有理数(正负整数、正负分数和0),再发展到无理数(中学里已知 $\sqrt{2}$, π, $\ln 3$, $\sin 10^\circ$ 等都是无理数).有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式,而无理数都不能表示成 $\frac{p}{q}$ 的形式,其中 p 和 q 都是整数,且 $q \neq 0$.

我们知道,有理数还可以表示为有穷小数或无穷循环小数,而无理数可表示为无穷不循环小数.

在平面解析几何中,我们已经在实数与数轴上的点之间建立了一一对应的关系.

任取一条直线(习惯上取水平直线),规定一个正方向(习惯上规定自左至右的方向为正向),再在直线上取定一点 O,称为原点,然后规定一单位长度.我们把直线上的原点 O 对应于数0,把原点朝正方向的半直线上的点对应正数,把原点朝反方向的半直线上的点对应负数,这样,直线上的点和全体实数之间建立了一一对应的关系.具有正方向、原点和单位长度的直线称为数轴.见图 1-1.

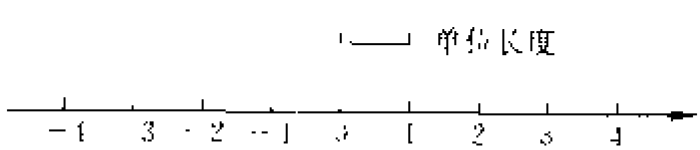

图 1-1

任何一个有理数$\frac{p}{q}$都可以在数轴上找到一个点与之对应，使得从原点到这点的长度与单位长度之比等于$\left|\frac{p}{q}\right|$.（当$\frac{p}{q}>0$时，在原点右边取点，当$\frac{p}{q}<0$时，在原点左边取点，这时从原点到这点的长度与单位长度之比等于$-\frac{p}{q}$）. 我们这样得到的点称为有理点，它是有理数$\frac{p}{q}$在数轴上的几何表示，而$\frac{p}{q}$称为该有理点的坐标. 反之，数轴上任何一个有理点必对应于一个有理数.

对于任意给定的两个有理数$a<b$，在a，b之间可以找到无穷多个有理数. 例如$c_1=\frac{a+b}{2}$，则$a<c_1<b$. 类似地，在c_1，b之间也可找到$c_2=\frac{c_1+b}{2}$，则$c_1<c_2<b$. 反复应用这个结论可知，无论两个有理数a，b相差多么小，在其间总可以找到无穷多个有理数. 这个性质称为有理数的稠密性. 因此数轴上任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的.

有理点在数轴上虽然是处处稠密的，但数轴上还是有非有理点存在. 例如边长为1个长度单位的正方形，其对角线的长度为$\sqrt{2}$个长度单位，由于$\sqrt{2}$是无理数，因此从原点向右截取长度为此正方形对角线长度的点，就不是有理点. 这种点也有无穷多个，而且在数轴上也是处处稠密的. 这种非有理点称为无理点，与无理点对应的数就是无理数. 也称为该点的坐标.

有理数与无理数统称为实数. 数轴上的全部点与全体实数之间构成一一对应的关系. 即数轴上的每一点都表示某一个实数，而每一个实数必定是数轴上某一点的坐标. 本课程所研究的数都是实数，为了简便起见，今后常常将实数和数轴上与它对应的点不加

区别,用相同的符号表示.例如点 a 和实数 a 是相同的意思.

1.2 绝对值与区间

在今后某些问题的讨论中,我们常常用到实数绝对值的概念.下面介绍绝对值的知识.

1.2.1 绝对值的定义

定义 1.1 一个实数 a 的绝对值,记为 $|a|$,是它所对应数轴上的点与原点 O 的距离.即

$$|a|=\begin{cases}a, & 当\ a\geqslant 0;\\ -a, & 当\ a<0.\end{cases}$$

由此可知,$|a|\geqslant 0$,且有 $|a|=\sqrt{a^2}$,并且还有 $|-a|=|a|$.

1.2.2 绝对值的性质

性质 1 任何实数 a 均有关系式

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

因为 $a>0$ 时,有 $-|a|<a=|a|$;

$a<0$ 时,有 $-|a|=a<|a|$;

$a=0$ 时,有 $-|a|=a=|a|$.

综合起来就有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

性质 2 不等式 $|a|\leqslant k\ (k>0)$ 与 $-k\leqslant a\leqslant k$ 是等价的.

根据绝对值定义,关系式 $|a|\leqslant k$ 表示点 a 与原点之间的距离不超过 k,因此有 $-k\leqslant a\leqslant k$.反之,$-k\leqslant a\leqslant k$ 表示点 a 在 $-k$ 与 k 之间,所以点 a 与原点之间的距离也不超过 k,因此有

$|a| \leqslant k$. 见图 1-2.

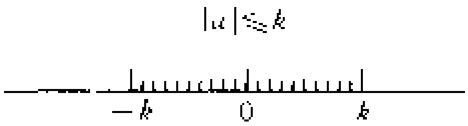

图 1-2

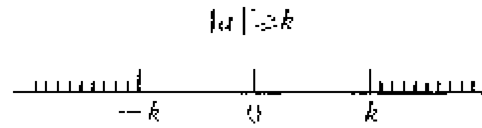

图 1-3

类似地,关系式 $|a| < k\ (k > 0)$ 与 $-k < a < k$ 是等价的.

性质 3 $|a| \geqslant k\ (k > 0)$ 与 $a \leqslant -k$ 或 $a \geqslant k$ 是等价的.

由绝对值定义,关系式 $|a| \geqslant k$ 表示点 a 与原点之间的距离大于等于 k,因此有 $a \leqslant -k$ 或 $a \geqslant k$. 反之,$a \leqslant -k$ 或 $a \geqslant k$,表示点 a 与原点的距离大于等于 k,因此有 $|a| \geqslant k$. 见图 1-3.

类似地,关系式 $|a| > k\ (k > 0)$ 与 $a < -k$ 或 $a > k$ 是等价的.

1.2.3 绝对值的运算规则

1) 和的绝对值不大于各项绝对值的和

即

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

证 由绝对值的性质 1,得知

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

两式相加得到

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant (|a|+|b|),$$

再由性质 2,此式即

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

此关系式还可以推广到任意有限项的和:

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|.$$

2) 差的绝对值不小于各项绝对值之差

即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证　由于 $|a|=|(a-b)+b|$，根据规则 1，有关系式

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|.$$

移项即得　$|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

类似地，也有　$|a-b|\geqslant|b|-|a|$.

3）乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积

即

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|.$$

根据绝对值的定义，此式显然成立.

4）商的绝对值等于被除数及除数的绝对值的商

即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq0).$$

证　由于 $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\cdot a$，因此

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{1}{b}\right|\cdot|a|=\frac{|a|}{|b|}.$$

1.2.4　区间

设 a、b 为实数，且 $a<b$.

（1）满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数 x 的全体，称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b). 见图 1-4.

（2）满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$