

第二屆和平利用原子能國際會議文獻

# 反應堆物理學與 研究用反應堆

2

中國科學院原子核科學委員會編輯委員會編輯

科學出版社出版

## 反应堆物理学与研究用反应堆(2)

中国科学院原子核科学委员会編輯委员会編

\*

科学出版社出版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

\*

1960 年 4 月第 一 版

1960 年 4 月第一次印刷

(京) 0001-6,500

书号: 2143 字数: 78,000

开本: 787 × 1092 1/16

印张: 3 3/8

定价: 0.44 元

## 目 录

P/272 計算非均匀系統核参变数的某些方法.....	1
P/628 从裂变反应堆中所能得到的最強的热中子流.....	19
P/663 二維空間多組計算中的数学方法.....	24
P/1638 热中子在固体減速剂中的迁移截面 .....	32
P/2104 反应堆动力学方程的一个近似解 .....	43

# 計算非均匀系統核參變數的某些方法\*

巴丁(S. E. Barden)<sup>†</sup> 布拉克布恩(D. Blackburn)  
凱勒(A. Z. Keller) 華特遜(J. M. R. Watson)

## 1. 引言

計算均匀系統的有关参数,基本上有二种适当的方法:

(i) 威格納-賽茲(Winger-Seitz)方法;

(ii) 个别源泉和漏穴法(The individual sink and source method).

在方法(i)中(例如,參閱文献[1]),注意力主要集中在决定反应堆中一个单一的由減速剂和燃料組成的单元中的热中子通量的分布,这一分布决定着反应堆的热利用因素和有效均匀性.方法(ii)是由几个創始人发展起来的,其中主要是加拉宁(Galanin)<sup>[2]</sup>,芬伯(Fernberg)<sup>[3]</sup>和霍宁(Horning)<sup>[4]</sup>.在这方法中,每一燃料孔道被看作是一个快中子的源泉,也看成是热中子的一个漏穴(sink),同样也考虑到如控制棒等别的漏穴,而注意力要集中在燃料孔道本身的通量值.决定減速剂内实际的通量,通常是作为次要的問題来处理的.

本文主要部分是对鈾燃料、气体冷却、石墨減速剂反应堆这一特殊情况,把上述的二种方法加以发展推演,但也結合了某些应用.推广了适合于燃料和孔道普遍的几何条件的一些方法.应用方法(i),得到某些矩形孔道的数值結果.另一个要研究的問題是用方法(ii)考虑柵格中每一燃料棒存在时,为一組控制棒所获取的反应率的大小.我們把这种方法的数值結果和抹均法得到的結果作了比較.小长方形堆和指数堆同样可以用方法(ii)的观点来处理.概括(i)和(ii)的方法是基于一个积分-微分方程,这将在下一节叙述并討論.

## 2. 基本方程的論述

考虑在反应堆内一个包含很大数目燃料孔道的区域,在离反应堆中心面大減速长度的距离处,可以知道,減速剂中的通量滿足以下形式的方程:

$$D_R \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] + D_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \Sigma_m \Phi + \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} A_i \bar{\Sigma}'(\epsilon \eta p_{eff})_i \Phi_i W [ |R - R_i|^2 + a^2(z - z')^2 ] dz' = 0. \quad (2.1)$$

考虑減速剂体积元内中子的平衡,可得到以上方程.为方便起見,取 $z$ 軸方向平行于这些燃料孔道. $D_R$ 和 $D_z$ 是应用貝倫斯(Behrens)公式<sup>[5]</sup>或其他公式对孔道流作改正后的

\* “第二屆和平利用原子能国际會議文献”編号 A/CONF. 15/P/272, 联合王国,原文为英文.  
<sup>†</sup> A. E. I. John Thompson Nuclear Energy Co. Ltd. Knutsford, England.

扩散系数,  $\Sigma_m$  是石墨的宏观吸收截面, 在方程中对每一孔道求和而得到的项代表有源泉的项,  $\Phi_i$  表示在高度  $z$  处孔道面的通量, 并且假定它在孔道的周围为常数,  $A_i$  为孔道的几何截面积, 它可以具有任何的形状,  $\bar{\Sigma}_i^u$  表示在孔道中铀的有效或平均截面, 而且它是这样的, 即使得每单位长度单位时间内第  $i$  个孔道中吸收的中子总数  $I_i^u$  为

$$I_i^u = \Phi_i \bar{\Sigma}_i^u A_i, \quad (2.2)$$

也可规定吸收中子的外鞘物质和其他外部物质的类似的有效截面  $\bar{\Sigma}_i^{sh}$ :

$$I_i^{sh} = \Phi_i \bar{\Sigma}_i^{sh} A_i, \quad (2.3)$$

其中  $I_i^{sh}$  是为外鞘所吸收的中子数, 为了更方便起见, 定义第  $i$  个孔道的总截面  $\bar{\Sigma}_i^t$  为

$$I_i = \Phi_i \bar{\Sigma}_i^t A_i, \quad (2.4)$$

其中  $I_i = I_i^{sh} + I_i^u$  是流入孔道中的总中子流量, 于是有

$$\bar{\Sigma}_i^t = \bar{\Sigma}_i^u + \bar{\Sigma}_i^{sh}. \quad (2.5)$$

在上面的源泉项中,  $(\epsilon\eta p)_{eff}$  为

$$(\epsilon\eta p)_{eff} = \epsilon\eta p \left[ \frac{\bar{\Sigma}_i^u}{\bar{\Sigma}_i^t} \right], \quad (2.6)$$

其中  $\epsilon, \eta$  和  $p$  为快中子裂变因子、热中子裂变因子和共振逃脱几率,  $w[|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|^2 + a^2(z - z')^2]$  是减速核函数, 给出在高度  $z'$  处第  $i$  个孔道产生的快中子在减速剂中一点  $(R, z')$  处变成热中子的几率,  $w$  是这样规定的, 即当对整个空间积分时, 它等于 1. 为了分别考虑减速长度在  $z$  和  $R$  方向的非对称性而引入了常数  $a^2$ . 这些减速长度定义为

$$4\tau_R = \int_{\text{整个空间}} |\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|^2 w[|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|^2 + a^2(z - z')^2] dV, \quad (2.7)$$

$$2\tau_z = \int (z - z')^2 w[|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|^2 + a^2(z - z')^2] dV. \quad (2.8)$$

上面我们假定, 在气体孔道中不存在减速剂, 并且燃料区域为有限的. 这些情况实际上可由选取适当的  $\tau_R$  和  $\tau_z$  值来校正. 由于快中子和比热中子能量大的中子 (epithermal neutron) 的实验分布没有什么精细的结构, 所以上面所说的处理方法可说是合理的步骤.

用  $S_i$  表示第  $i$  个孔道的边界, 从(2.4)和(2.5)便得到

$$D_R = \int_{S_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = A_i \Phi_i (\bar{\Sigma}_i^u + \bar{\Sigma}_i^{sh}). \quad (2.9)$$

为了方便起见, 把方程(2.1)中的参数归成二大类: “孔道”参数和“减速剂”参数.  $\epsilon, \eta, p, \bar{\Sigma}_i^u$  和  $\bar{\Sigma}_i^{sh}$  属于前者, 而  $D_R, D_z, \Sigma_m, \tau_R$  和  $\tau_z$  属于后者, 在一定程度上, 除了  $p$  以外, 这二组参数彼此是明显独立的, 虽则并不完全如此, 一般说来, 吸收截面  $\Sigma_m, \bar{\Sigma}_i^u$  和  $\bar{\Sigma}_i^{sh}$  依赖于通量的能谱, 而通量又依赖于减速剂和燃料的配置以及它们在反应堆中所处的位置. 但这些效应并不引起截面过多的改变; 当然,  $p$  完全依赖于减速剂和燃料的相对含量和相对配置. 但由于我们主要是处理大而很有规则的排列, 为了方便起见, 仍然把  $p$  考虑为“孔道”的参数. 燃料和外鞘物质任意配置的孔道参数的决定, 我们留在第 4 节再来讨论. 减速剂参数  $\tau_R, \tau_z, D_R$  和  $D_z$  为孔道和它里面包含的必须流过孔道联结处的孔道流所影响.

### 3. 推广了的威格纳-赛兹方法

长期以来就知道, 在包含很多数目相同燃料孔道的堆的一个区域中, 可定义这区域中的宏观通量为  $\Phi$ , 它满足下面形式的方程:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{(k_\infty - 1)}{L_{\text{堆}}^2 + k_\infty t} \Phi = 0, \quad (3.1)$$

其中  $L_{\text{堆}}^2 = L^2(1-f)$ ,  $f$  为热利用因子。

倘若把孔道作为一个线源来处理, 则式(3.1)已在加拉宁<sup>[2]</sup>和芬伯<sup>[3]</sup>等人的工作中得到了严格证明。目前方程(3.1)是用更简易的方式并利用在单元中精密结构的方程而导出的。也将考虑燃料孔道是有相当粗细的, 并讨论它对精密结构及决定它和热利用因子的方法的影响。

为方便起见, 把宏观通量写为  $\Phi$ , 于是在个别孔道中, 它的值是  $\Phi_i$ 。在第5节中, 在相当好的近似程度上将表明, 即使对于很小的堆, 某一点的真实通量也可认为是一宏观通量和一“局部”周期单元通量的乘积。这一结果是把燃料孔道考虑为一漏穴线而得到的。即使孔道的大小是有限的, 我们也将假定同一普遍结果是成立的。

按照以上所述, 可写出

$$\Phi = \Phi_i \chi, \quad (3.2)$$

$\chi$  为“局部”的周期函数, 给出联结单个孔道的减速剂单元中的通量。而且, 在联接减速剂单元的外边界  $S_0^*$  上,

$$\int_{S_0^*} \frac{\partial \chi}{\partial n} ds = 0. \quad (3.3)$$

在单元的内边界上, 燃料孔道的周界为  $S_0$ , 从(2.9)得到

$$D_R = \int_{S_0} \frac{\partial \chi}{\partial n} ds = A(\bar{\Sigma}^U + \bar{\Sigma}^{sh}). \quad (3.4)$$

由于孔道现在完全是一样的, 所以去掉了下标  $i$ 。让  $||_{av}$  表示对一个减速剂单元的平均值, 又进一步假定反应堆足够大, 这样,  $\nabla_i^2 \Phi_i$ ,  $\nabla_p \Phi_i$  和  $\Phi_i$  在每一个单元上显然还是常数, 于是

$$|\nabla_i^2 \Phi_i|_{av} = \nabla_i^2 \Phi_i |\chi|_{av} + \frac{2}{A_m} \int_{\text{减速剂单元}} \nabla_p \Phi_i \nabla_p \chi ds + \frac{\Phi_i}{A_m} \int \nabla^2 \chi ds, \quad (3.5)$$

其中  $\nabla_p = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ ,  $A_m$  是与一个简单单元的减速剂截面积。由式(3.4),  $(\Phi_i/A_m)/\nabla_i^2 \chi ds$  可写为

$$-\frac{\Phi_i A}{A_m D_R} (\bar{\Sigma}^U + \bar{\Sigma}^{sh}). \quad (3.6)$$

如果我们引入一个进一步简化的假设, 即孔道和减速剂单元对二个正交轴是对称的, 则得到

$$\int_{\text{减速剂单元}} \nabla_p \Phi_i \cdot \nabla_p \chi ds = 0. \quad (3.7)$$

在导出齐次方程以前, 需要作一最后的简化, 即在(3.1)方程中所给出的有源项的求和号可为下式所代替:

$$(\eta \rho)_{eff} \bar{\Sigma}^c \frac{A}{A_m} \int_{\text{整个空间}} \Phi_i W(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|^2 + a^2(z - z')^2) dV. \quad (3.8)$$

按照加拉宁<sup>[6]</sup>处理的步骤, 因为  $\Phi_i$  是一很慢改变的函数, 式(3.8)可为下式所代替:

$$(\eta \rho)_{eff} \bar{\Sigma}^c \frac{A}{A_m} \left[ \Phi_i + \tau_R \nabla^2 \Phi_i + \tau_s \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} \right]. \quad (3.9)$$

应用(3.5)和(3.9),将式(2.1)对一个单元平均,可写成

$$\left[ 1 + \frac{(\epsilon\eta p)_{\text{eff}} \tau_R A \bar{\Sigma}'}{L_R^2 |\chi|_{\text{av}} A_m \Sigma_m} \right] \nabla_p^2 \Phi_s + \left[ \frac{D_z}{D_R} + \frac{(\epsilon\eta p)_{\text{eff}} \tau_z A \bar{\Sigma}'}{L_R^2 |\chi|_{\text{av}} A_m \Sigma_m} \right] \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial z^2} + \left[ \frac{(\epsilon\eta p)_{\text{eff}} A \bar{\Sigma}'}{L_R^2 |\chi|_{\text{av}} A_m \Sigma_m} - \frac{1}{L_R^2} - \frac{\bar{\Sigma}' A_m}{L_R^2 |\chi|_{\text{av}} \Sigma_m A_m} \right] \Phi_s = 0. \quad (3.10)$$

由于  $f$  为

$$\frac{1}{f} = \frac{\bar{\Sigma}'}{\bar{\Sigma}^0} \left( 1 + \frac{A_m \Sigma_m |\chi|_{\text{av}}}{A \bar{\Sigma}'} \right), \quad (3.11)$$

所以(3.10)可立即简化为

$$(L_{R\text{堆}}^2 + k\tau_R) \nabla_p^2 \Phi_s + \left[ \frac{D_z L_{z\text{堆}}^2}{D_R} + k\tau_z \right] \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial z^2} + (k_\infty - 1) \Phi_s = 0 \quad (3.12)$$

$$(k = \epsilon\eta p f).$$

$L_{R\text{堆}}^2$  和  $L_{z\text{堆}}^2$  为

$$\begin{aligned} L_{R\text{堆}}^2 &= L_R^2 (1 - f^*), \\ L_{z\text{堆}}^2 &= L_z^2 (1 - f^*), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$f^*$  为

$$\frac{1}{f^*} = 1 + \frac{A_m \Sigma_m}{A \bar{\Sigma}'} |\chi|_{\text{av}}. \quad (3.14)$$

要完全决定堆扩散长度和  $f$ , 仍需要量  $|\chi|_{\text{av}}$ . 应用关系式  $\Phi = \Phi \chi$ , 以及把式(2.1)中的有源项和以前同样的方法来处理, 可得到下面的方程:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_p^2 \chi + \frac{2}{\Phi_s} \nabla_p \Phi_s \cdot \nabla_p \chi - \left( \frac{1}{L_R^2} + B_R^2 + \frac{D_z}{D_R} B_z^2 \right) \chi + \\ &+ \frac{A \bar{\Sigma}'}{\Sigma_m A_m L_R^2} (1 - B_R^2 \tau_R - B_z^2 \tau_z) (\epsilon\eta p)_{\text{eff}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

从对双群理论(two-group theory)的处理中, 哈特涅耳-贝维斯(Hartnell-Beavis)和希克斯(Hicks)<sup>[7]</sup> 导出了和式(3.15)类似的方程. 对一个大反应堆, (3.15)可为下式所代替:

$$\nabla_p^2 \chi - \frac{\chi}{L_R^2} + \frac{q}{D_R} = 0, \quad (3.16)$$

其中  $q = (\epsilon\eta p)_{\text{eff}} \frac{A \bar{\Sigma}'}{A_m}$ .

方程(3.16)有别于精密结构的“传统”方程(“conventional” equation), 从例[1]中可看到, 那里整体无孔道的石墨扩散系数被已考虑其中有燃料孔道的扩散系数所替代了.

对弱吸收减速剂, 例如石墨或重水, 从[8]可知道,  $\chi$  很容易被表示为  $1/D_R$  的级数:

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^{(n)}}{D_R^n}. \quad (3.17)$$

为方便起见, 目前只考虑具有这样对称性的单元, 它在规定的外边界面  $S_0^*$  上的每一点, 有  $\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0$ . 如只考虑(3.17)的前二项, (3.16)可为下式所代替:

$$\begin{aligned} \nabla_p^2 \chi^{(0)} &= 0, \\ \nabla_p^2 \chi^{(1)} &= -A \bar{\Sigma}' / A_m \end{aligned} \quad (3.18)$$

和边界条件

$$\begin{aligned} \chi^{(0)} &= 1, \chi^{(1)} = 0 \text{ (在 } S_0 \text{ 上)}, \\ \frac{\partial \chi^{(0)}}{\partial n} &= \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ (在 } S_0^* \text{ 上)}. \end{aligned}$$

第一个方程给出

$$\chi^{(0)} \equiv 1. \quad (3.19)$$

把  $\chi^{(1)}$  很顺利地表示成

$$\left. \begin{aligned} \chi^{(1)} &= \frac{A\bar{\Sigma}'}{A_m} g, \\ \nabla_g^2 &= -1, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$g$  是单独地依赖于减速剂单元的几何形状, 但与它的原子核常数无关. 至于  $f$  的表式 (3.11) 现在可重新写成

$$\frac{\bar{\Sigma}^u}{\bar{\Sigma}'} \frac{1}{f} - 1 = \frac{A_m \bar{\Sigma}_m}{A \bar{\Sigma}'} + \frac{|g|_{av}}{L_R^2}. \quad (3.21)$$

$|g|_{av}/L_R^2$  项是中子超过项  $E - 1$  的推广式, 它的表式在简单的几何形状下已由文献 [1] 给出.

对由孔道和减速剂单元形状所引起的方程  $\nabla_g^2 = -1$ , 用数值方法很容易解决, 但不存在简便的解析解.

韩纳 (Hannah)<sup>[9]</sup> 研究了长方形的减速单元中有长方形孔道的情况. 图 1 表示这一单元的四分之一.

应用张弛模拟法, 可得到  $g$  和  $|g|_{av}$  的数值. 所用的模拟方法是用一个电解槽的方法. 有源的项  $-1$  可表示为在适当的点外加了一些点源. 更详细的电解槽可在文献 [10] 中找到. 图 2a 和 2b 给出韩纳研究的数值结果, 图中给出了各种改变的孔道和单元比例  $a = A/(A_m + A)$  在下述六种不同情形下  $|g|_{av}$  的值:

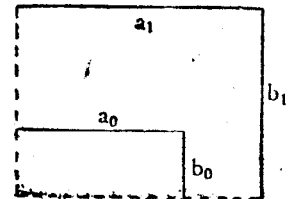


图 1

(i)  $a_0/b_0 = a_1/b_1 = 4,$

(ii)  $a_0/b_0 = a_1/b_1 = 3,$

(iii)  $a_0/b_0 = a_1/b_1 = 2,$

(iv)  $a_0/b_0 = a_1/b_1 = 1,$

(v)  $a_0/b_0 = 3, a_1/b_1 = 2,$

(vi)  $a_0/b_0 = 1, a_1/b_1 = 2.$

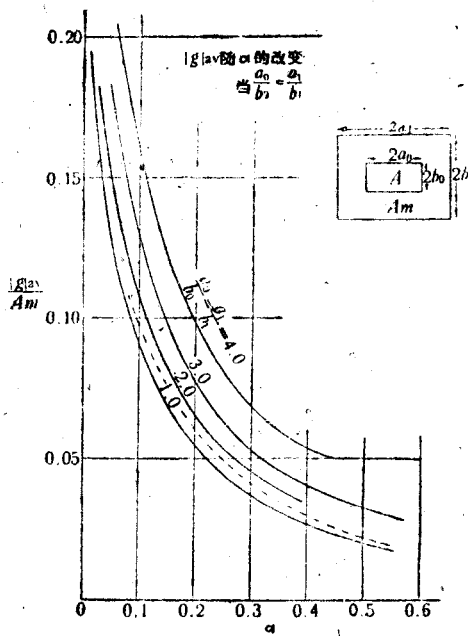
为了进行比较, 图 2b 也给出具有内半径  $a_0$  与外半径  $a_1$  的圆环状的单元的数值; 对这种情况,

$$|g|_{av} = \frac{1}{8} \left[ \frac{4a_1^2}{a_1^2 - a_0^2} \log \frac{a_1}{a_0} - 3a_1^2 + a_0^2 \right]. \quad (3.22)$$

#### 4. 燃料孔道参数

在这一节中, 将讨论燃料和外鞘物质在任意配置下的“燃料孔道”参数的计算方法.

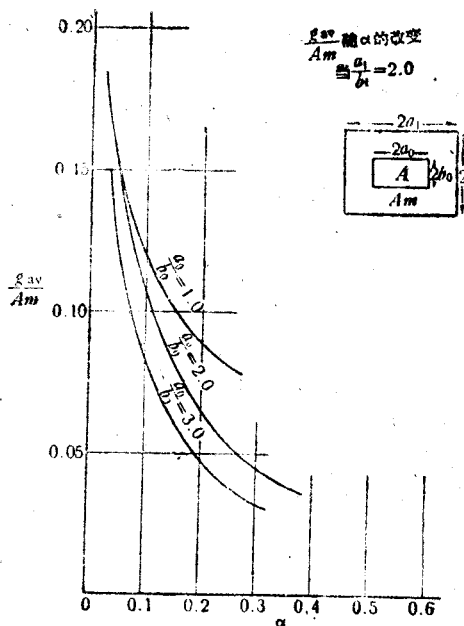




$$\alpha = \frac{A}{A + A_m} = \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1}$$

$A$  = 孔道的横截面积 =  $4a_0 b_0$   
 $A_m$  = 减速剂的横截面 =  $4(a_1 b_1 - a_0 b_0)$   
 —— 长方形截面;  
 - - - 圆截面.

图 2a



$$\alpha = \frac{A}{A + A_m} = \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1}$$

$A$  = 孔道横截面积 =  $4a_0 b_0$   
 $A_m$  = 减速剂横截面 =  $4(a_1 b_1 - a_0 b_0)$   
 —— 长方形截面.

图 2b

有关的参数为

$$\epsilon, \eta, p, \bar{\Sigma}^U \text{ 和 } \bar{\Sigma}^{sh},$$

$\eta$  是原子核常数, 它的值与通量的能谱略有关系。e 可用大家所熟悉的方法来计算, 倘若我们已首先估计了燃料棒中的一级碰撞几率的话。除了简单的几何形状外, 还计算了空心管中的固体棒<sup>[11]</sup>和成簇的棒。这一节所剩下的问题是专门讨论估计  $p, \bar{\Sigma}^U$  和  $\bar{\Sigma}^{sh}$  的方法, 应用斯塔耳特(Stuart)的相继产生方法(successive generations method)<sup>[12]</sup>, 把它推广用在燃料孔道边界面上的通量来表达这些量。

假定在给定的燃料孔道内, 中子在第  $n$  次碰撞时被吸收的几率  $\beta_{na}$  在下述二假设下足够精确地得到估计:

- (a) 在孔道边界, 入射流量的角各向同性。
- (b) 在这区域内, 中子相继产生的空间均匀性。

则每秒进入孔道单位长度的中子总数  $N_0$  可写成

$$N_0 = \int_0^1 \int_0^1 \Phi(\Omega, \mathbf{n}) \frac{d\Omega ds}{4\pi}, \quad (4.1)$$

$$0 \leq \Omega, \mathbf{n} \leq 1.$$

在目前我们假定在孔道内只有单一性质原子核的物质, 例如不带外鞘的铀。假使在燃料孔道内角度  $\Phi$  处在这种固体物质中的径迹长度为  $R_1$ , 则每秒每单位孔道长度

在这区域进行了第一次碰撞后的中子数  $N_1$  可写成

$$N_1 = \int_s \int_{\Omega} (1 - 1^{-\Sigma_T R_1}) \Phi(\Omega, \mathbf{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} dS, \quad 0 \leq (\Omega, \mathbf{n}) \leq 1 \quad (4.2)$$

$$= \Phi A_0 \Sigma_T (1 - P_c). \quad (4.3)$$

其中  $\Sigma_T$  为这一物质总的宏观截面,  $P_c$  为在这物质中均匀地产生的中子的第一次碰撞几率, 这物质的截面积为  $A_0$ , 于是

$$\beta_1 = \frac{N_1}{N_0} = \frac{A_0}{S} \Sigma_T (1 - P_c) \quad (4.4)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1a} &= f_c \beta_1, \\ f_c &= (\Sigma_A / \Sigma_T). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$\Sigma_A$  为对应的宏观吸收截面.

对于相继的碰撞,

$$\left. \begin{aligned} \beta_n &= \frac{A_0}{S} \Sigma_T (1 - P_c) (1 - f_c)^{n-1} P_c^{n-1}, \\ \beta_{na} &= (f_c \beta_n). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

于是整个碰撞几率为

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \frac{A_0}{S} \Sigma_T (1 - P_c) / [1 - (1 - f_c) P_c], \\ \beta_a &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{na} = f_c \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

表式(4.7)为斯达耳特表式的一些推广, 斯塔耳特表式是没有空缺(voidage)时的一个特殊情况, 即  $S = S_0$ . 这些普遍表式可用来决定在大体上是凸形的燃料孔道内(例如一簇的燃料棒或燃料板在圆形冷却气体孔道内)具有任意形状的燃料体积元(不一定为凸形)的漏穴的强度.

在应用这一分析方法去估计  $p$  时, 我们假定了在减速剂内有一空间均匀的共振中子通量的分布  $\Phi^R(E)$ , 而且还认为外鞘物质对共振中子是透明的, 因而可被忽略. 在这种情况下, 向孔道内流入的流量  $I_+^R(E)$  为

$$I_+^R(E) = \Phi^R(E) / 4. \quad (4.8)$$

设  $q(E)$  表示在能量  $E$  时的减速密度, 于是

$$- \left[ A_m \frac{dq(E)}{dE} \right] = S I_+^R(E) \beta_i(E) = \frac{\Phi^R(E)}{4} \left[ \frac{4 A_0 \Sigma_A^R (1 - P_c)}{1 - (1 - f_c) P_c} \right], \quad (4.9)$$

$\Sigma_A^R(E)$  为在能量  $E$  时的吸收截面.

此外,

$$q(E) = \Phi^R(E) \Sigma_{sm} \xi_m E \quad (4.10)$$

给出

$$p(E) = \exp \left[ - \frac{A}{\Sigma_{sm} \xi_m A_m} \int_E \frac{\Sigma_A^R (1 - P_c) dE}{(1 - (1 - f_c) P_c) E} \right]. \quad (4.11)$$

在这一形式中, 对一个别的共振峰作精确的积分是不值得的, 因为在燃料区域初始产生的中子大体上不具有空间均匀性的分布. 但纽曼(Neumann)<sup>[13]</sup>指出, 可在(4.11)中取

一更复杂的积分来考虑这一非均匀性。它可写成

$$\int_E \Sigma_A^R(1 - P_c) \left[ 1 + \frac{(1 - f_c)P_c}{(1 - (1 - f_c)P_c)} \right] \frac{dE}{E}, \quad (4.12)$$

其中  $P_c$  是建立在燃料区域产生的初始中子空间分布上的改正碰撞几率。然后他仔细地完成了这一数值积分。

另一方面, (4.12) 的比較简单的积分也可以和参考文献 [14] 中所提到的一个很简单的技巧一齐应用, 利用在均匀性要求范围以内经过共振积分的测量值证实了的一些归一化的截面。

在现在这个推导中的一个有趣的现象是  $\beta_a S$  和冷孔道空洞(void)的存在无关, 这是由式(4.7)而来的, 因为共振中子的吸收率正比于  $\beta_a S$ , 共振积分势必为  $\Sigma^R/N_0$  所规定, 其中

$$\Sigma^R = \int_E \frac{\Sigma_A^R(1 - P_c)}{1 - (1 - f_c)P_c} \frac{dE}{E}, \quad (4.13)$$

而  $N_0$  为每立方厘米中的燃料原子数, 也和冷却孔道空间的存在无关。这一结果可以看成是由实验得到的。

应用这分析方法去估计热中子参数,  $\bar{\Sigma}^u$  和  $\bar{\Sigma}^{sh}$ , 必须重新假定在冷却孔道交界面处, 中子的角分布对  $\beta_a$  没有显著的影响。但可用  $I_+^{th}$  的完全扩散表式联系入射热中子流量和面上的通量  $\Phi^{th}$ :

$$I_+^{th} = \Phi^{th}/2(2 - \beta_a). \quad (4.14)$$

因此, 对充满燃料孔道的黑体,  $\beta_a = 1$ , 而

$$I_+^{th} = I_+^{th} + I_-^{th} = \Phi^{th}/2. \quad (4.15a)$$

对完全空的,  $\beta_a = 0$ , 于是

$$I_+^{th} = I_-^{th} = \Phi^{th}/4. \quad (4.15b)$$

参变数  $\bar{\Sigma}^u$  和  $\bar{\Sigma}^{sh}$  于是可取下面形式:

$$\bar{\Sigma}^u = \frac{S}{2A} \left[ 1 / \sqrt{\frac{2}{\beta_a^u} - 1} \right]; \quad (4.16a)$$

$$\bar{\Sigma}^{sh} = \frac{S}{2A} \left[ 1 / \sqrt{\frac{2}{\beta_a^{sh}} - 1} \right], \quad (4.16b)$$

这里的  $\beta_a^u$  和  $\beta_a^{sh}$  为在燃料区域和外鞘物质区域内中子吸收的几率。问题是要决定对任何给定燃料体积元形状的这些几率。

对任意形状的燃料体积元, 这个问题是复杂的, 更困难的还在于这样的事实, 即外鞘物质是一种很差的吸收物质, 但却是一种很好的散射介质。在薄的外鞘的情况下, 对吸收几率  $\beta_a^u$  和  $\beta_a^{sh}$ , 我们将采取函数的形式, 而这只是对薄板的几何条件才是正确的。因此,

$$\beta_a^{sh} = \beta_a^{sh0} \left[ 1 - \frac{\beta_a^{u0}}{2} \right]; \quad (4.17)$$

$$\beta_a^u = \beta_a^{u0} \left[ 1 - \frac{\beta_a^{sh0}}{4} \right], \quad (4.18)$$

$\beta_a^{sh0}$  和  $\beta_a^{u0}$  分别为空外鞘区域和不带外鞘的燃料区域的吸收几率, 而  $\beta_a^{sh}$  为空外鞘的散射几率。

当然, 对所考虑的特别的几何形状, 这些函数可得到估计。

为了把这一分析和实验测量进行比较,我们将考虑一个简单的形状在半径为  $c$  的圆形空气孔道中的不带外鞘的金属铀棒,它的半径为  $a$ 。在空气孔道内所测量的数量是通量的比值:

$$B = (\Phi/\Phi_0), \quad (4.19)$$

即在空气孔道边界上的通量和在铀内的平均通量的比值。这一参数通过下式和  $\bar{\Sigma}^u$  联系起来:

$$B = \frac{A_0 \Sigma_{au}}{A \bar{\Sigma}^u} = \frac{2A_0 \Sigma_{au}}{S} \left( \frac{2}{\beta_1^u} - 1 \right), \quad (4.20)$$

其中  $\Sigma_{au}$  是铀的实验吸收截面。对金属铀,应用原子核常数  $\Sigma_T^u$  和  $f_1^u$ ,从(4.7)可得到  $\beta_1^u$ 。对  $a$  和  $c$  数值范围内所计算得到的  $B$  的值已列成表,而且和实验结果作了比较<sup>[15]</sup>,后者写在括弧中间,而某几个值是从方形栅格间隔分别是 7.0 吋,7.875 吋和 8.75 吋而得到的,为了进行比较,所选择的金属铀的原子核常数为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Sigma}_T^u &= 0.334 \text{ 厘米}^{-1}, \\ \Sigma_T^u &= 0.738 \text{ 厘米}^{-1}, \\ f_1^u &= 0.451. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

考虑到开始作的二个近似,这结果是很好符合的。但将表明,这些效应对  $B$  给出 1% 以及相反符号的改正,所以稍小于实验数值(小于 3%)不可能是由于近似的误差所引起。

### 5. 无反射层临界堆和亚临界堆的非均匀理论

在这一节中,源泉与漏穴方法被推广来计算具有正方形或矩形截面和一有限厚度的反射层的反应堆的临界值和通量分布。和在第 2 节中的方法一样,也考虑了在燃料的周围有空气孔道的情形。

对  $Nb, (N+1)b$  等于  $a$  的特殊情况,已求得了精确的解,  $a$  是正方形反应堆的外推宽度[物理宽度加上  $0.71\lambda$ , (石墨)],其中  $N^2$  为燃料棒的总数,  $b$  为栅格的间隔。把这种方法推广到矩形栅格单元反应堆是很简单的,因此不作讨论了。在数学上,可能的  $N^2$  个模(modes)可对应具有形式  $\sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{a}$  的宏观通量的分布。只有基本的模才和临界反应堆有关,而所有其他的模包含在指数或亚临界系统中。

在上面的特殊情形中,我们将表明,即使燃料棒数目很小,详细的通量分布在相当好的近似程度上也可写成为宏观通量和一周期函数(周期为  $b$ )的乘积。热利用因子和由威格纳-赛兹单元方法得到的结果相比较,而临界方程和齐次临界方程相比较。

这方法也可应用于矩形横截面的垂直指数堆,所得到的结果基本上即为普通的理论所得的一些结果。

最后,应用这种个别源泉和漏穴法,计算一方形控制棒组所吸收的反应率。

(i) 考虑一有正方形截面的反应堆,具有单一间隔的栅格和圆截面半径为  $c$  的同一种燃料孔道。为简单起见,首先必须假定反应堆无限高,而且包含  $N$  排孔道,每一排又包含  $N$  个孔道,这些孔道匀称地处在反应堆内。

让  $x_k, y_l$  表示第  $l$  排孔道中心的坐标,这样,  $x_k = d + kb, y_l = d + lb$  ( $k, l = 0, 1, \dots, N-1$ ),其中  $x, y$  为原点在一稜角上的直角坐标,  $d$  是反射层的厚度,而  $b$  是栅格

的間隔,所以  $a = 2d + (n - 1)b$ .

在整个空間內減速劑中,热中子通量分布的解析連續解  $\Phi$  的方程,于是可写成(忽略和在孔道附近真实通量的差异):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\Phi}{L_R^2} = -\frac{1}{L_R^2 \Sigma'_m} \left[ \sum_{k,l} \{Q(x, y, x_k, y_l, \tau_R) - i_{k,l} \delta(x - x_k) \delta(y - y_l)\} \right],$$

其中  $L_R^2$  和  $\Sigma'_m$  为石墨的有效扩散面积和宏观吸收截面,  $L_R^2$  正如式(2.1)一样,已用貝伦斯公式<sup>[5]</sup>对石墨的孔道流(streaming)和密度减小作了改正,而  $\Sigma'_m$  正比于在柵格中总的改正平均自由程:

$$\Sigma'_m = \frac{A_m}{A + A_m} \Sigma_m,$$

因为吸收平均自由程实际上增大一个  $\frac{\text{单元体积}}{\text{減速剂体积}}$  的因子,而对铀的吸收,必須还要考虑

$\Sigma_m$  中的因子  $\frac{\text{固体体积}}{\text{減速剂体积}}$ . 同样

$$i_{k,l} = A \bar{\Sigma}' \Phi_i$$

是热中子在孔道  $(x_k, y_l)$  的漏穴强度. 引入第一个参数  $\lambda$  将是很方便的,  $\lambda = A \bar{\Sigma}'$ .  $Q(x, y, x_k, y_l, \tau_R)$  为每单位時間每单位体积由  $x_k, y_l$  孔道中的快中子在  $(x, y)$  产生的热中子数. 这一快中子源的强度为  $(\lambda \Phi_i)_{(nsp)_{eff}}$ ,  $\tau_R$  为径向的慢化年龄,正如第2节中的一样.

假定慢化密度和解析連續的热中子通量在边界  $x = 0, a$  和  $y = 0, a$  上都为零. 則在費米年龄的假設下,它将可表示为

$$\Phi(x, y) = \frac{4\lambda'}{\pi^2 \Sigma'_m L_R^2} \sum_{k,l} \Phi_p(x_k, y_l) \sum_{m,n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x_k}{a} \frac{\sin n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y_l}{a} - (m^2 + n^2) \pi^2 \tau_R / a^2, \quad (5.2)$$

其中

$$G_{mn} = \frac{\mu c}{m^2 + n^2 + a^2 / \pi^2 L_R^2}, \quad \lambda' = \frac{\lambda \Phi_i}{\Phi_p}, \quad \mu = (\eta sp)_{eff},$$

$\Phi_p(x_k, y_l)$  是在  $(x_k, y_l)$  点任意小半径四周的、要被估計的解析連續的通量,而  $i_{k,l} = \nabla \Phi_p(x_k, y_l)$ .

如果把  $x = x_p, y = y_q$  代入式(5.2),則可得一系列数值为  $\Phi_p$  的  $N^2$  个齐次方程. 如果点  $x_k, y_l$  不对应于在式(5.2)中所要估計的通量的这一个点,則  $x, y$  可以被放在孔道的中心;如果这样,則  $m, n$  的求和是一个奇异值,必須用半径  $\rho$  来估計. 而且也只有当  $\lambda'$  或  $\mu$  为  $N^2$  个分离值中的一个时——系統的本征值,  $N^2$  个齐次方程才有有意义的解.

一般說来,找  $N^2$  个齐次方程的数值解和求方程隐藏的根,是一件很煩瑣的工作. 但对二个特殊反射层的厚度,  $d = \frac{1}{2}b$  或  $b$ , 可以有精确的解,这是由于  $N_b$  或  $(N + 1)b$  等于  $a$  的緣故,而求和可表示成

$$S_r = \sum_k \sin \frac{r\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi x_k}{a} \quad (r = \text{整数}). \quad (5.3)$$

按照  $d = \frac{1}{2}b$  或  $b$ , 除了  $n = 2sN \pm r, 2s(N+1) \pm r$  以外,  $S$  都等于零。

当  $n$  取以上的形式时, 则可表示为

$$S_r \sin \frac{n\pi x_p}{a} = \frac{N^*}{2} \sin \frac{\pi x_p}{a},$$

如果  $d = b/2$ , 则  $N^* = N$ ;  $d = b$ ,  $N^* = N + 1$ 。

所以可看到, 函数  $A_{rs} \sin \frac{r\pi x_p}{a} \sin \frac{s\pi y_q}{a}$  为  $x = x_p, y = y_q$  时的方程的精确解; 而且为对应于本征值  $\lambda'_{rs}$  或  $\mu'_{rs}$  的系统的本征函数。

如果当  $r, s$  大于  $N$  时,  $r', s'$  等于  $r, s$ ; 当  $r, s$  小于  $N$  时,  $r' = r + 2pN^*, s' = s + 2qN^*, p, q$  为正整数, 而  $N^*$  等于  $N$  或  $N + 1$ , 那么就可以看到,  $N^2$  个模  $\sin \frac{r\pi x_p}{a} \sin \frac{s\pi y_q}{a}$  就被重复(不考虑符号的改变)。因而本征值  $\lambda'_{r's'}$  由与(5.2)相类似的式子所给出, 这式子包含有对  $m$  和  $n$  的求和, 它的表式和  $r', s'$  相似。因此  $\lambda'_{r's'} = \lambda_{rs}$ , 这和只有  $N^2$  个本征值的事实是相符合的。

上述二种特殊情况是仅有的反射层厚度, 对这些厚度可以有精确的解, 所以能够这样做, 是因为这象系统形成了一个规则的无限正方形的栅格。

忽略与角度有关的项, 从式(5.2)估计在半径为  $\rho$  的每一个面上的通量, 则可得到第  $rs$  个模的临界方程; 进一步假定

$$\Phi_\rho(x_k, y_l) = \sin \frac{r\pi x_k}{a} \sin \frac{s\pi y_l}{a},$$

而且使  $x = x_p + \xi_\rho, y = y_q + \eta_\rho$ , 则可得到下面的式子[忽略  $(\rho/a)$  的项]:

$$\frac{\pi^2 \Sigma'_m L_R}{\lambda'_{rs}} = N^{*2} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} G_{2pN^* + r, 2qN^* + s} \cos \frac{(2pN^* + r)\pi \xi_\rho}{a} \cos \frac{(2qN^* + s)\pi \eta_\rho}{a} \quad (5.4)$$

其中  $\xi_\rho = \rho \cos \theta, \eta_\rho = \rho \sin \theta$ 。

上式[忽略  $0(\rho/a)$  的项]可写成下面形式:

$$\frac{\mu e^{-B_{rs}^2 L_R} - 1}{1 + L_R^2 B_{rs}^2} = \frac{b^2 \Sigma'_m}{\lambda'_{rs}} + \sum_{p,q} \sum \frac{\cos 2p\pi r \xi_\rho / b \cos 2q\pi s \eta_\rho / b}{1 + \frac{4\pi^2 L^2}{b^2} [(p + r/2N^*)^2 + (q + s/2N^*)^2]}, \quad (5.5)$$

$\Sigma' \Sigma'$  不具有  $p = q = 0$  的项, 而  $B_{rs}^2 = (r^2 + s^2)\pi^2/a^2$ ; 对于基本的模, 可简化为一等效的齐次形式:

$$k e^{-B_{11}^2 L_R} = 1 + L_p^2 B_{11}^2$$

以及

$$k = \mu/(1 + q), \quad L_p^2 = L_R^2 q / (1 + q),$$

$$q = q_0(\lambda) + q_1,$$

$$q_0 = b^2 \Sigma'_m / \lambda',$$

$$q_1 = \sum_{p,q} \sum \frac{\cos 2p\pi \xi_\rho / b \cos 2q\pi \eta_\rho / b}{1 + \frac{4\pi^2 L^2}{b^2} [(p + r/2N^*)^2 + (q + s/2N^*)^2]}.$$

上面的结果实际上是和加拉宁<sup>[2]</sup>对特殊情况( $k_1 = k_2 = \pi/a$ )所得到的公式相同的。

加拉宁已估计了  $q_1$  中的项, 它们是由弱吸收减速剂得到的, 而且与弱吸收减速剂无关,

$$q_1 = \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2} \left[ \log \frac{b^2}{\pi \rho^2} + \frac{\pi \rho^2}{2b} - 1.48 - \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2 \epsilon^2} (1 + B_{11}^2 L_R^2) \right].$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 可以看到, 临界方程(5.5)可写成

$$\mu - 1 = q_0(\lambda) + q_1(\xi_\rho, \eta_\rho) = q_0(\lambda) \Phi_\rho / \Phi_s + q_1(\xi_\rho, \eta_\rho).$$

在文献[2]中,

$$\Phi / \Phi_\rho = 1 + \{q_1(\xi_\rho, \eta_\rho) - q_1(x, y)\} \Phi_s / \Phi_\rho q_0(\lambda), \quad (5.6)$$

表 1

$a$ (厘米) \ $c$ (厘米)	$c = a$	1.905	2.540	3.495	4.761
1.143	1.16	1.31	1.37	1.42	1.45
	1.12	1.28	—	—	—
	1.13	1.29	—	—	—
	—	—	—	—	—
1.270	1.19	1.33	1.40	1.45	1.49
	1.15	1.31	1.32	1.37	1.47
	1.15	1.30	1.25	1.33	1.42
	1.16	1.29	1.32	1.41	1.44
1.523	1.24	1.34	1.44	1.52	1.58
	1.19	1.31	—	—	1.50
	1.16	—	—	—	1.37
	1.22	—	—	—	1.48
2.08/1.65 管	1.09	—	1.14	1.19	1.23
	1.04	—	1.12	—	1.19
	1.06	—	1.18	—	—
	1.08	—	—	—	—

因此

$$(1/f)_{\text{het}} - 1 = \mu - 1 = q_0(\lambda) + q_1(\xi, \eta). \quad (5.7)$$

热系数必须是这样的, 使得在孔道边界,  $i = \lambda \Phi_s$ , 而

$$\xi = c \cos \theta,$$

$$\eta = c \sin \theta \text{ (其中 } c \text{ 为孔道半径)}.$$

从热利用因子  $f$  的定义, 可看出, 方程

$$(1/f) - 1 = \frac{\sum_m A_m}{\sum' A} + \frac{\sum_m A_m}{\sum' A} \left[ \frac{\Phi_m}{\Phi_s} - 1 \right] \quad (5.8)$$

是和(5.6)相等的, 因而给出

$$(1/f) - 1 = q_0(\lambda) + \overline{q_1(\xi, \eta) - q_1(x, y)}, \quad (5.9)$$

其中只对减速剂取平均。由于  $q_1(x, y)$  在整个单元上的平均值为零, 可以看到, 只有在半径  $c$  趋于零的极限情况下, 式(5.7)才和式(5.9)的定义相一致。

当孔道半径很小时, 包含的误差也是很小的。对于大燃料孔道的实际情况, 式(5.7)中  $q_1(\xi, \eta)$  贡献项因而要被  $\overline{q_1(\xi, \eta) - q_1(x, y)}$  所代替, 其中只对减速剂取平均值。对  $q_1(\xi, \eta)$  的这一改正, 在以下的分析中要用到; 在今后将以孔道半径来表示这一

改正, (5.7) 变成

$$\eta - 1 = q_0(\lambda) + q_1'(\xi, \eta). \quad (5.10)$$

应该注意到, 式(5.10)中的  $q_1(\xi, \eta)$  以解析形式精确地对应于威格纳-赛兹方法中的  $\langle g \rangle_{av}$  项。

有趣的是, 在计算精确结构时, 这种方法和第3节中的威格纳-赛兹方法都需要应用改正的  $L_R^2$  以代替固体减速剂值。

对应于基本模  $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$  的减速剂中任意一点的通量, 可由下式表示:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2p\pi x/b \cos 2q\pi y/b}{(p+1/2N^*)^2 + (q+1/2N^*)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2}} - \\ & - q_0(\lambda) - q_1'(\xi, \eta) + \\ & + \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2p\pi x/b \sin 2q\pi y/b}{(p+1/2N^*)^2 + (q+1/2N^*)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2}} + \\ & + \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2p\pi x/b \cos 2q\pi y/b}{(p+1/2N^*)^2 + (q+1/2N^*)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2}} + \\ & + \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2p\pi x/b \sin 2q\pi y/b}{(p+1/2N^*)^2 + (q+1/2N^*)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2}}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

当  $N^* \rightarrow \infty$  时, 双重级数中的第一项超过在无限栅格单元中的宏观通量, 其余的项在  $N^* \rightarrow \infty$  时分别为  $\frac{1}{N^*}$ ,  $\frac{1}{N^*}$  和  $\frac{1}{N^{*2}}$  的数量级, 而当  $x, y$  代表单元的角中的一点时, 对所有  $N^*$  的值, 它们将等于零。可以看到, 在单元的各个角的实际的通量确实正比于  $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$ , 到达每一孔道中的半径  $\rho$  的解析连续的  $\Phi$  当  $\rho \rightarrow 0$  时也趋于零。对含有大量数目孔道的大反应堆, 进一步可看到, 在离开反应堆边界的地方,  $\Phi$  可认为是宏观通量  $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$  和在每一单元中的周期微观通量的乘积, 后者和在无限栅格中相应的微观通量很相近。

为了说明在一个无反射层的有限临界反应堆中的微观通量的行为, 在  $N = 3$  的情况下, 我们计算了通量的分布, 所应用的  $\lambda$  和  $\mu$  的假设的数值, 是为了强调指出在每一单元中和在沿着平行于反应堆的一个边的棒的联线上通量的改变。通量的表式是近似的:

$$\Phi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} G_1(\xi) + \cos \frac{\pi x}{a} G_2(\xi), \quad (5.12)$$

其中

$$\begin{aligned} G_1(\xi) &= \frac{4\pi^2 L_R^2 \Sigma_m}{\lambda} + 2 \log \frac{\xi}{a} + \pi(a^2 - \xi^2), \\ G_2(\xi) &= \frac{\pi^2}{N^*} \left[ 0.55\xi^2 \left( 1 + \frac{\xi^2}{5} \right) - \xi(\log \xi + 0.8374) \right], \end{aligned}$$



$$a = b/\rho,$$

而  $\xi, b$  表示从棒中心算起的距离, 而且是这样的, 即  $0 < \xi < \frac{1}{2}$ .

图 3—4 给出通量的分布.

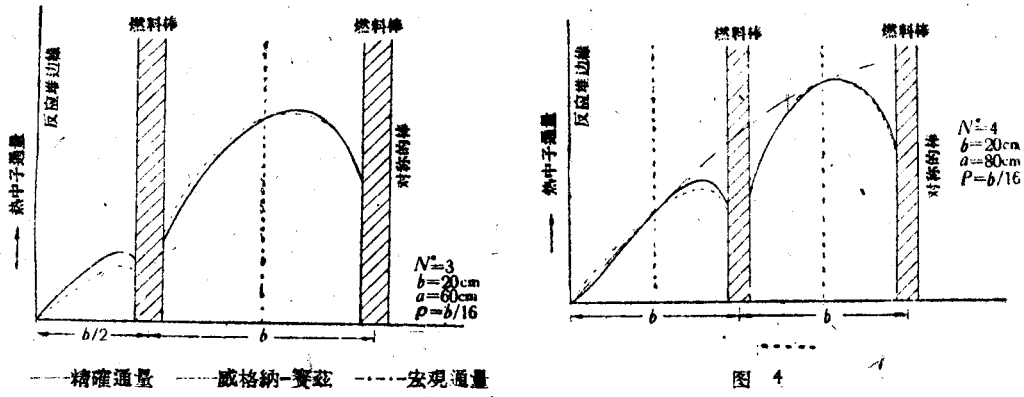


图 3

图 4

(ii) 上面的方法可用来研究正方形和矩形的指数堆或亚临界堆。为简单起见, 栅格仍和以前一样的考虑:  $N^*b = a$ , 这里的  $N^*$  等于  $N$  或  $N + 1$ 。如果在减速剂中的热中子通量  $\Phi$  离开源有几个扩散长度之远处, 假定可用分离变数法, 则  $\Phi$  可写成

$$\Phi(x, y) = \sum_{m, n} \varphi_{mn}(x, y) \sinh \gamma_{mn}(c - z),$$

其中  $\varphi_{mn}$  为和(5.1)相似的方程的解, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial y^2} - \left( \frac{1}{L_R^2} - \gamma_{mn}^2 \right) \varphi_{mn} = \\ = - \frac{1}{L_R^2 \sum_{m, n} Q_{mn}} \{ Q_{mn} - i_{k, l}^{mn} \delta(x - x_k) \delta(y - y_l) \}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

其中  $Q_{mn}(x, y, x_k, y_l, \tau_k)$  为每单位时间的中子数/强度为  $\lambda \mu \Phi_{mn}$ 。年龄为零的中子的单位体积(其中  $\Phi_{mn}$  = 在  $mn$  模的孔道面上的通量)。

在上面的特殊情况中, 可以看到, 在栅的比值为常值的区域内,  $\varphi_{mn}(x_k, y_l)$  具有下面形式:

$$\varphi_{mn}(x_k, y_l) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x_k}{a} \sin \frac{n\pi y_l}{a}. \quad (5.14)$$

因此,  $\gamma_{mn}$  必须满足和(5.5)类似的方程:

$$\frac{\mu c^{-B_{mn}^2 \tau_R} - 1}{1 + B_{mn}^2 L_R^2} = \frac{b^2 \sum_m}{\lambda'} + \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2} \sum \sum' \frac{\cos \frac{2p\pi m \xi}{b} \cos \frac{2q\pi n \eta}{b}}{(p + m/2N^*)^2 + (q + n/2N^*)^2 + \frac{b^2}{4\pi^2 L_R^2}}, \quad (5.15)$$

其中

$$B_{mn}^2 = B_{mn}^2 - \gamma_{mn}^2, B_{mn}^2 = (m^2 + n^2)\pi^2/a^2, \quad (5.16)$$

而

$$1/L_R^2 = 1/L_k^2 - \gamma_{mn}^2.$$