力学譯叢

第三輯

上海市力学学会編譯委員会

上海市科学技术編譯館

目　录

一般力学

国际非綫性振动专题討論会(論文綜述)……B. M. Волосов (1)

固体力学

有关三层板壳計算的著作的評述……Л. М. Куршин (23)
光彈性測定法的新发展……P. Dantu, C. Santini (35)

流体力学

近三十年来附面层研究的某些发展……H. Schlichting (49)
等离子体的稳定性……А. А. Веденов, Е. П. Великов, Р. З. Сагдеев (69)

国际非綫性振动专題討論会

（論文綜述）

B. M. Волосов 著

朱照宣、李訓經、刘明杰、梁继光譯　郭乾荣校

国际理論和应用力学协会(International Union of Theoretical and Applied Mechanics) 从 1961 年 9 月 12 日到 18 日在苏联基輔(Киев)召开了国际非綫性振动专題討論会。会議的学术委員会由下列人員組成：博戈留玻夫(Н. Н. Боголюбов)(主席、苏联)，伏歇尔(T. Vogel)(法国)，卡特莱特(M. Cartwright)(英国)，克洛脱(K. Klotter)(西德)，里芙希兹(S. Lefschetz)(美国)，密特洛保尔斯基(Ю. А. Митропольский)(学术秘书、苏联)以及 T. Hayashi (日本)。以密特洛保尔斯基教授为首的专題討論会全国組織委員会进行了組織工作。討論会代表有外国和苏联的 104 位学者*。

除代表外，尚有很多来宾出席了討論会。討論会成員提出的論文都用俄文和英文发表(有些用俄文和法文)。討論会上听取了所提出論文的报告**。

会議分三組进行：(1)非綫性振动理論中的分析方法[主持者：密特洛保尔斯基]，(2)稳定性的定性方法[主持者：聶梅茨基 (В. В. Немыцкий)]，(3)非綫性振动理論的方法在物理和工程問題中的应用[主持者：魯尔叶(А. И. Лурье)]。里芙希兹的論文是在全体大会上宣讀，但放在第三組，这組中还有其它調整理論的报告。下面按这三組分别介紹各篇論文的內容提要。

上述論文在基輔出版，但数量很少(300～400 份)，在本文最后并提出了一些有关文献以資参考***。

第一組　非綫性振动理論中的分析方法

博戈留玻夫，密特洛保尔斯基(苏)　**非綫性力学中的积分流形法**　这是关于积分流形方法的綜述报告。积分流形法是由博戈留玻夫奠定基础的，并已有效地用来研究非綫性振动。博戈留玻夫曾对所謂标准型的系統探討过这一方法：

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,\ x,\ \varepsilon),\tag{1}$$

其中 ε 是小参数，而 x、$X\in E_n$。設 $S_f: x=f(t,\ c_1,\ \cdots,\ c_s)$ $(s\leqslant n)$ 是 E_n 中的一个流形。如果能从 $t=t_0$ 时 $x(t_0)\in S_f$ 的关系导出对所有 $t\geqslant t_0$ 时 $x(t)\in S_f$，則 S_f 是系統(1)的积分流形。因此，积分流形就是由积分曲綫組成的超曲面。

在許多力学問題中，需要研究右端有微小差别的振动方程。但大家知道，微分方程組的个别特解对右端的微小变化很敏感。通常，如果不滿足一些附加的稳定性条件，則对于同样的初始条件这些系統的解将随时間而显著发散。然而，积分流形却是較稳定的流形，即和单独的积分曲綫比起来，它們对扰动不甚敏感。在許多情况中証明，如果未受扰系統具有积分流形，那么受扰系統也具有积分流形，且位于未受扰系統流形的附近。于是就可以在比系統相空間維数較低的子空間中研究解，这往往方便得多。本报告闡述了博戈留玻夫[6]关于系統(1)的积分流形研究的基本結果，以及密特洛保尔斯基[41],[42]，雷柯娃(О. Б. Лыкова)[34]~[36]和其他作者关于更一般类型系統的研究結果，如接近自治的系統

* 有苏联、英、美、日本等 15 个国家的代表——譯者注

** 共有論文 94 篇——譯者注

*** 以上譯文略有删节。——校者注

$$\frac{dx}{dt}=X(x)+\varepsilon X^*(\nu t,\ x,\ \varepsilon),$$

和接近于給定的非自治系統的系統

$$\frac{dx}{dt}=X(t,\ x)+\varepsilon X^*(\nu t,\ x,\ \varepsilon),$$

以及在許多非綫性振动問題中遇到的系統

$$\frac{dx}{dt}=X(\tau,\ x)+\varepsilon X^*(\tau,\ \theta,\ x,\ \varepsilon)$$

和

$$\frac{dx}{dt}=X(\tau,\ \theta,\ x)+\varepsilon X^*(\tau,\ \theta,\ x,\ \varepsilon),$$

其中 $\tau=\varepsilon t$ 是"慢时間"，$\nu(\tau)$ 是慢变频率，而 $\theta(\tau)$ 是相位，且 $\frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau)$。

报告最后将所得結果用于某些具体振动方程，特别是方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \varepsilon\right).$$

报告还評述了其他作者的結果。

雷柯娃(苏)　利用积分流形的方法研究接近于精确可积的非綫性系統的解　本文詳述作者在[36]中的研究成果，考虑如下形式的系統的积分流形。

$$\frac{dx}{dt}=X(x)+\varepsilon X^*(t,\ x,\ \varepsilon),\tag{2}$$

其中 ε 是小参数，X 和 $\mathbf{X}^*$ 是 n 維矢量。假設未受扰方程

$$\frac{dx}{dt}=X(x)$$

具有平凡解 $x=0$，且其特征方程

$$\mathrm{Det}\|I_nz-X_n'(0)\|=0$$

(I_n 为 n 維单位矩陣)有一对純虛根 $z_{1,2}=\pm i\omega$，而其余根的实部均为負。还假設，函数 $X(x)+\varepsilon X^*(t,\ x,\ \varepsilon)$ 对 t 为周期性的，周期为 2π，并且足够平滑。作者証明，系統(2)有唯一的二維局部积分流形，位于 $x=0$ 附近。此外还証明在这流形上系統(2)等价于两个方程

$$\dot{\xi}=i\omega\xi+P(t,\ \xi,\ \xi^*,\ \varepsilon)$$
$$\dot{\xi}^*=-i\omega\xi^*+Q(t,\ \xi,\ \xi^*,\ \varepsilon),$$

其中 P, Q 是某些已知函数。作者还找出这一流形的参数表示式 $x=\Phi(t,\ \xi,\ \xi^*,\ \varepsilon)$，$\Phi$ 也是已知函数。所作积分流形在 $t\to\infty$ 时，系統(2)所有的解互相接近，設所取初始值足够地接近于流形。

报告中討論系統(2)解的定性动态問題；作为例子还考虑方程組

$$\frac{dx}{dt}=Px+\varepsilon X^*(t,\ x,\ \varepsilon),$$

其中 P 是 n 維常量矩陣。在某些条件下还对系統(2)的解离开退化解的偏差作出指数函数型的估值。

吉洪諾夫(А. Н. Тихонов)，华西里也娃(А. Б. Васильева)，伏洛索夫(В. М. Волосов)(苏)　含有小参数的微分方程　近几十年来，导数項含有小参数的微分方程理論有很大的发展，并在非綫性振动中有許多应用。这篇报告叙述各作者有关下列問題的研究。

1) 吉洪諾夫[53][54]的結果，論証系統

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,\ y,\ t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,\ y,\ t)\tag{3}$$ *

在 $\mu\to0$ 时的极限过渡，其中 $y=\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$，$z=\{z_1,\ \cdots z_m\}$，$\mu=\begin{Vmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \mu_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \mu_m\end{Vmatrix}$.

---

* 原文 $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ t)$ 有誤——譯者注

2) 华西里也娃[10]研究对系統(3)的 Cauchy 問題及某些边値問題的解,作出按 μ 冪次一致漸近展开式。

3) 伏洛索夫考慮系統(3)有快振动解的情形[11]，还討論含有慢参数的振动方程[12]，以及将博戈留玻夫的平均法[7]推广到更普遍形式的系統

$$\dot{x}=\varepsilon X(x,\ y,\ t,\ \varepsilon),\quad \dot{y}=Y(x,\ y,\ t,\ \varepsilon),$$

其中 $x=\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}$, $y=\{y_1,\ \cdots,\ y_m\}$ (最后这个問題見伏洛索夫的工作[13][14])。

报告中列举許多物理和力学問題，在解这些問題时应用了上述結果。

* * * * *

下面两篇論文也討論导数項有小参数的方程。

华索夫(Wasow W.)(美) 常微分方程的奇异周期扰动 所謂奇异扰动*問題就是研究方程組

$$\Omega(\varepsilon)\dot{x}=F(x,\ t,\ \varepsilon),\tag{4}$$

式中 $F(x,\ t,\ \varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 时是連續函数，Ω 是对角矩陣 $\Omega(\varepsilon)=\mathrm{diag}(\varepsilon^{h_1},\ \cdots,\ \varepsilon^{h_n})$，其中某些、但不是全部的 $h_i=0$。显然，这就是前面所說导数項有小乘子的方程組。这篇論文綜述了方程(4)周期解研究的方向。作者声明，由于不諳俄語，舍弃了丰富的苏联文献，而主要引用美国学者的工作。文章詳述作者关于下面問題的結果：設函数 $F(x,\ t,\ \varepsilon)$ 关于所有变量为全純的，当 $|\varepsilon|\leqslant|\varepsilon_0|$ 且对所有 t 和 $x\in R$，R 为某一与 ε 和 t 无关的区域。再設 F 是 t 的周期函数，周期为 T。假定 $\varepsilon=0$ 时(4)变成的退化系統

$$\Omega(0)\dot{x}=F(x,\ t,\ 0)$$

具有周期 T 的周期解。作者討論了受扰系統(4)的周期解存在問題，并作出漸近級数，可用来計算周期解到任意給定精确度。在解这問題时部分引用了 E. P. Rang 的方法[82]。

札季拉卡(Задирака К. В.)(苏) 非綫性微分方程的奇异扰动 作者討論方程組

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x,\ z,\ t,\ \frac{t}{\mu}\right),\quad \mu\frac{dz}{dt}=F(x,\ z,\ t),\tag{5}$$

其中 x,f, 和 z,F 分别为 m 維和 n 維矢量，μ 是小参数。沒有自变量 $\frac{t}{\mu}$ 时系統(5)就具有(3)的形式，即化为吉洪諾夫所研究的情形[53][54]。若系統(5)不显含 t 和 $\frac{t}{\mu}$ 則得系統

$$\frac{dx}{dt}=f(z,\ x),\quad \mu\frac{dz}{dt}=F(z,\ x),$$

这也是許多作者研究过的[53][54][43][48]。沒有自变量 t 和 z 时，經自变量 $t=\mu\tau$ 的代换后，系統(5)化为(1)，即博戈留玻夫[8]所研究的标准形式的系統。

与系統(5)同时，作者探討退化的且平均的系統

$$\frac{dz}{dt}=f_0(z,\ x,\ t),\quad F(x,\ z,\ t)=0\tag{6}$$

其中
$$f_0(x,\ z,\ t)\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,\ z,\ t,\ v)\,dv.$$

文中指出，許多工程和物理問題的研究归結为討論系統(5)和系統(6)的解之間的关系。作者采用平均化方法和积分流形方法来进行这些研究。她研究了下列各問題：在怎样的条件下可以从退化平均系統(6)在一定初条件下解的存在性推导出非退化系統(5)解的存在性；探討了解的唯一性問題；闡明当 $\mu\to 0$ 时(5)的解会不会化成(6)的解；研究了从系統(5)的周期解或概周期解的存在可导出系統(5)也有同类型解的条件。因此这些研究推广了[53][54]和[6]的結果。

* * * * *

把微分方程理論用于振动理論的理論問題和应用問題时，周期解的存在性及其計算方法的問題居重要地位。下面几篇論文研究非綫性振动中所遇到的各种类型方程的周期解的存在及其計算方法。

克拉斯諾謝尔斯基(М. А. Красносельский)，别洛夫(А. И. Перов)(苏) 常微分方程組周期解存在性的一些标志 文章对証明下列系統周期解存在性的一些普遍方法进行了探討

* 亦譯为奇摄动——譯者注

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x) \tag{7}$$

及

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{8}$$

其中 x、f、φ 是矢量，函数 f、φ 对 t 为周期的，周期为常量 ω。設 $x(t)=p(t, x)$ 是从 $t=0$ 的 x 点出发的上述方程的积分曲綫，則周期解的存在問題归結为研究变换 $u(x)=p(\omega, x)$ 的不动点。解这問題时文中采用現代有效的拓朴方法。例如，利用对矢量場 $f(0, x)$ 旋轉的研究，得出这类定理之一如下：設 $\lambda(x)$ 和 $\mu(x)$ 为可导的偶函数，且在 $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\geqslant R>0$ 时滿足不等式

$$(f(t, x), \operatorname{grad}\lambda(x))\equiv\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}>\varepsilon\mu(x)$$

$$(f(t, x), \operatorname{grad}\mu(x))\equiv\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{\partial\mu}{\partial x_i}>-L\mu^2(x),$$

且 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\{|\lambda(x)|+|\mu(x)|\}=\infty$ 及 ε, $L>0$，而 $\mu(x)>0$，則系統(7)至少有一个周期解。

文中討論算子 $u(x)$ 有不变圓錐的一些情形。对于这种算子，已經知道許多新的各式的不动点定理。应用类似定理，作者得出周期解存在的新标志。他們在巴納赫空間討論了微分方程。对系統(8)探討了当滿足恒等式

$$\varphi(-t, -x, -y)\equiv-\varphi(t, x, y)$$

时奇函数周期解的問題。还研究方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

研究其周期解时困难在于預先不知道周期解的周期。設解的周期为 ω，作者在采用熟知的变换 $t=\omega\tau$ 后把問題化为含有参数 ω 的方程*

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=\omega^2\varphi\left(x, \frac{1}{\omega}\frac{dx}{d\tau}\right)\equiv\psi\left(x, \omega, \frac{dx}{d\tau}\right),$$

并采用以拓朴方法为根据的普遍方法研究了这个方程的周期为 1 的解。

普洛斯庫略柯夫（**А. П. Проскуряков**）（苏） **单自由度拟綫性自治系統的周期解按参数的整数和分数冪展开为級数形式** 作者研究拟綫性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\mu f(x, \dot{x}, \mu) \tag{9}$$

其中 μ 是小参数，f 是其自变量在某一区域內的解析函数。討論了将方程(9)的周期解按 μ 的冪次展开問題，这个周期解是由 $\mu=0$ 时(9)式所化成的方程 $\ddot{x}+k^2x=0$ 的解 $x(t)=A_0\cos kt$ 所生成的。利用熟知的方法[37],[49] 推导出决定生成解振幅 A_0 的基本振幅方程的有限形式。分别研究了 A_0 是这方程的单根、二重根和三重根的情况。作者指出，有重根的情形可以将周期解按参数的分数冪次展开。本文沒有討論重根次数大于 3 的情况，也沒有討論所得展开式的收斂半徑問題。

格拉捷諾克（**И. В. Глатенок**）（苏） **关于諧波平衡法的根据問題** 本文根据諧波平衡法討論方程 $\ddot{y}=f(y, \dot{y})$ 周期解的存在問題。根据这个方法，周期解的一次近似取为 $y=a\sin\omega t$ 的形式，其中振幅 a 和頻率 ω 由諧波平衡方程决定：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a\sin u, a\omega\cos u)\sin u\,du=-a\omega^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a\sin u, a\omega\cos u)\cos u\,du=0.$$

問題在于确定在什么条件下，在一次近似的邻近确实存在原来方程的周期解。这类問題在 $f=\omega^2y+\varepsilon\varphi(y, \dot{y})$（$\varepsilon$ 为小参数）的情形中曾經屡次被討論过，但是在一些应用性质的問題中导出的方程里，引入小参数并不是自然的。作者的基本結果是証明了一些定理，这些定理給出在軌綫 $y=a\sin\omega t$ 邻近存在周期解的容易檢驗

* 原文誤为"含有参数 μ 的方程"——校者注

的充分标志，而在方程里并没有引入小参数。定理的証明是利用一些特殊形式的里雅普諾夫函数的构成来进行的。作为例子，研究方程 $T\ddot{y}+\dot{y}=-KG$，其中函数 G 是自动調整系統中一个非綫性元件的特性函数。

利雅包夫 (Ю. А. Рябов) (苏)　非綫性振动理論問題中小参数方法的适用范圍的估价　作者研究对应用龐卡萊-里雅普諾夫小参数方法以及克雷洛夫-博戈留玻夫平均方法*[28] 时所引起誤差进行估价的方法[52]。文中还指出使估值更精确的可能性。取方程

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon F(z, \dot{z}, t)+\varphi(t)$$

作为基本系統，其中 ε 是小参数，函数 F 和 φ 是 t 的周期为 2π 的周期函数，且 F 是形式为

$$F(z, \dot{z}, t)=\sum_{j+\sigma=1}^{m} P_{j\sigma}(t) z^j \dot{z}^\sigma$$

的多項式，式中連續系数 $P_{j\sigma}(t)$ 是 t 的三角多項式。作者将所发展的方法应用于一些具体問題，特别研究了杜芬方程

$$\ddot{z}+2z=-\varepsilon z^3+\cos t,$$

范德坡方程

$$\ddot{z}+z=\varepsilon(1-z^2)\dot{z},$$

和阴极振蕩器方程

$$\ddot{x}+x=-R(ax+bx^3)-\left[a\sqrt{\frac{L}{c}}+R\sqrt{\frac{c}{L}}+3\sqrt{\frac{L}{c}}bx^2\right]\dot{x}$$

以及其他方程，計算精确度甚高。最后文章作出在研究方程 $\ddot{x}+x=\varepsilon f(x, \dot{x})$ 的解时 К.-Б. 方法 * 的誤差的估值。

博戈留玻夫 (Н. Н. Боголюбов) (晚輩)，薩多甫尼柯夫 (Б. И. Садовников) (苏)　带有小参数的 n 阶微分方程的周期解　作者研究方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\mu f\left(t, x, \dot{x}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \mu\right) \tag{10}$$

的周期解，这里 f 是周期 2π 的 t 的周期函数，μ 是小参数。經过变量代換后，方程(10)化为系統

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon x_1, \quad \frac{dx_1}{dt}=\varepsilon x_2, \cdots, \quad \frac{dx_{n-2}}{dt}=\varepsilon x_{n-1}, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt}=\varepsilon f(t, x, \varepsilon x_1, \cdots, \varepsilon x_{n-1}), \tag{11}$$

其中 $\varepsilon=\mu^{1/n}$。系統(11)的周期解可以用博戈留玻夫[6] 的方法作出，因为(11)已是类型(1)的标准形式系統。然而，这就导致按参数 $\varepsilon=\mu^{1/n}$ 的冪次展开，且在 n 值較大时通常所采用的低次近似精确度就显不足。因此，作者提出把方程(10)的周期解按参数 μ 的整数冪次展开的漸近法。証明了所得展开式的收斂性，还研究了周期解的稳定性。

科洛夫斯基 (М. З. Коловский) (苏)　用小参数法确定間断的周期解　討論方程

$$\frac{dx}{dt}=X(x, t, \mu) \tag{12}$$

其中 x、X 是矢量，μ 是小参数。龐卡萊研究过方程右端为解析时的周期解。作者在[22] 中曾把龐卡萊方法推广到右端分段連續的情况。本报告則論証把小参数法用来作出系統(12)的周期解，这周期解接近于生成系統

$$\frac{dx}{dt}=X(x, t, 0) \tag{13}$$

的間断周期解。設函数 X 在 $t\in(-\infty, +\infty)$，$0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$，$x\in G$ (某一 n 維区域)时为单值的，且对 x 和 μ 的一切值，X 对 t 有周期 T。区域 G 被光滑曲面 $\varphi_k(x)=0$ 分割为若干部分，在每一部分中 X 和它对 x 及 μ 的到二阶为止的偏导数为連續的。假設退化系統(13)有間断周期解

$$x=x(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_l) \quad (l\leqslant n), \tag{14}$$

(α_s 是解族参数)，它在曲面 $\varphi_k=0$ 上滿足間断条件 $x_k^-=\Phi_k(x_k^+, 0)$ (x^- 和 x^+ 是間断面两对面的 x 值，$\Phi_k(x, \mu)$ 是給定的函数)，而且所有曲綫(14)以非零角穿过同一曲面族 $\varphi_k=0$。現在要寻求系統(13)的周期解，周期为 T，且滿足間断条件 $x_k^-=\Phi_k(x_k^+, \mu)$。

---

* 下簡称 К.-Б. 方法。

作者采用小参数法解决了上列問題，对所求周期解导出存在的、利用一些特征来檢驗的充分条件。对自治系統 $\frac{dx}{dt}=X(x, \mu)$ 他还把这些結果作了推广；此外还討論生成系統为正則的特殊情況。正則生成系統的間斷解被解釋为由冲击引起的运动，冲击的結果使正則系統（保守的情形）在經过曲面 $\varphi_k=0$ 时系統的总能量发生跳跃式的变化。还导出用小参数法所得近似解的若干估值。

考貝尔(W. A. Coppel)(英)　周期解的扰动：退化情形　作者討論方程組

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)+\mu h(t, x, \mu), \tag{15}$$

x, b, h 是 n 維矢量，A 为方陣，其秩 $r\leqslant n$，所有函数对 t 有周期 T，μ 是小参数。假設綫性方程

$$\dot{x}=A(t)x+b(t) \tag{16}$$

有周期解 $x=p(t)$，周期为 T。作者研究系統(15)的周期解(周期为 T)的存在問題，这一周期解在 $\mu\to 0$ 时收斂为系統(16)的解。找到这些解存在的充分条件。这类問題曾为許多作者研究过并得到类似的結果，特別是馬尔金 (И. Г. Малкин)[37] 研究过更普遍的系統。本报告依据隐函数的一些定理用独特形式的方法进行研究。据說这一方法还可以推广到某些非綫性系統。

罗森瓦謝尔(E. H. Розенвассер)(苏)　应用积分方程来建立和論証确定非綫性系統周期运动的近似方法　本文研究一些特殊类型的非綫性系統，其中含有分段綫性特性的非綫性环节。所得結果根据作者[51]的工作；研究时采用积分方程。导出三个定理，根据这三个定理可以来估价和判断研究分段綫性系統近似方法(特别是諧波平衡法)的适用性。

Seiichiro Maezawa(日)　分段綫性系統定常受迫振动的福里哀級数改进解　文章也討論了具有分段綫性特征的系統。文中考虑方程 $\ddot{x}+f(x, \dot{x})=q\cos\omega t$，并假設 $(x, \dot{x})$ 平面分为两部分，在一部分里 $f(x, \dot{x})=c\dot{x}+kx$，而在另一部分 $f(x, \dot{x})=(c+C)\dot{x}+(k+K)x+D$。从一部分轉到另一部分时可能有跳跃和滞后。作者研究定常周期解，把它写成为福里哀級数形式。这种类型的方程曾被多次研究过，特别是推广了适合于綫性积分的联接解方法，以及福里哀級数的方法；艾节尔曼 (M. A. Айзерман) 在[1]中还改善了福里哀級数法。本文作者的方法[77]和艾节尔曼方法不同，它导致求解一組无穷多綫性代数方程来决定福里哀系数，但在許多重要情况中完全可以抛弃高阶的方程和未知量。此外还提出方法来改善所得近似解的收斂性。作者的方法是把恢复力的非綫性部分当作扰动力，并对綫性化后的方程作出福里哀展开。

賽薩里(L. Cesari)(美)　偏微分方程的周期解　这里研究方程

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0, \tag{17}$$

假設它在 x 軸上退化为常微分方程

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right)=0, \tag{18}$$

且 f 和 F 对 x 是周期的，周期为 T。設方程(18)有周期解 $u=u_0(x)$，周期为 T。提出的問題是：能不能把 $u_0(x)$ 延拓到 (x, y) 平面上包括 x 軸在內的一条狭带中，使得 $u(x, y)$ 的延拓是方程(17)对于 x 的周期解，周期为 T。文章的第一部分对正則系統

$$u_{ixy}=f_i(x, y, u_{jx}, u_{jy}) \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

解决了这个問題。第二部分(利用第一部分的結果)研究常系数方程

$$u_{xx}+k^2u+g(x, y, \varepsilon)u_{xy}=\varepsilon f(x, y, u, u_x, u_y),$$

其中 $g>0$，ε 是参数。研究的方法类似于作者对常微分方程所采用过的方法[66]。

*　*　*　*　*

周知的同步現象是和周期解的存在問題有关。当一个具有一定固有频率的綫性系統受到另一频率的周期扰动作用时，可能产生稳定的周期解，即所謂扰动的频率“吸住”系統的频率，或者系統和扰动“同步化”。下面两篇論文討論这类問題。

米諾尔斯基(N. Minorsky)(法)　論同步　作者闡述了著名的、研究接近于綫性的微分方程解的頻閃观測方法[78]，并用来研究同步現象。举出范德坡方程的两个例子。第一个例子是方程

$$\ddot{x}+(cx^2-a)\dot{x}+(1+\gamma)x=e\sin t.$$

对此作出稳定周期解，在一定条件下非定常状态接近此解。作为第二个例子，取系統

$$\ddot{x}_1+(1+k)x_1=(a-bx_1^2)\dot{x}_1+\varepsilon Q_1\ddot{x}_2,$$
$$\ddot{x}_2+(1-k)x_2=(a-bx_2^2)\dot{x}_2+\varepsilon Q_2\ddot{x}_1,$$

其中 ε 是小参数，表征两个振蕩器微弱的相互作用。这里同步現象是指在某些条件下 x_1 和 x_2 的振动相"吸引"，即接近稳定态，其頻率 $\omega=1$，而不等于两个固有頻率。

报告中討論了許多与同步有关的物理現象，例如同步的消失，同步状态的稳定性等等。报告里沒有引入严格的証明或者精确的数学論証，不过現象的物理方面以及这个方法所根据的直观想象則說明得十分透彻淸楚。

劳烏特(W. S. Loud)(美)　受扰自治系統中的同步　作者根据他在[76]中的結果，研究了系統

$$x'=g(x)+\varepsilon f\left(\frac{t}{T},\ x,\ \varepsilon\right)\tag{19}$$

的某些周期解，这里 x、g、f 是 n 維矢量，函数 f 对自变量 $\frac{t}{T}$ 具有周期 1，ε 是小参数，$T=T(\varepsilon)=\frac{qL_0}{p}+\eta\varepsilon$，$q$ 与 p 为互质的整数，$\eta=$ 常量，L_0 是未受扰系統

$$x'=g(x)\tag{20}$$

的解的最小周期。假設系統(20)具有孤立的强軌道稳定的周期解 $x_0(t)$。基本結果用定理表达为：在一定条件下，对充分小的 ε，系統(19)具有周期解，其形式为

$$x=x_0\left(\frac{qL_0t}{pT(\varepsilon)}+\tau\right)+\varepsilon x_1\left(\frac{qL_0t}{pT(\varepsilon)}\right)+0(\varepsilon),$$

其中 τ 是一特殊方程 $F_1(\tau)=0$ 的单根，F_1 是一由平方公式給定的已知函数。文中討論方程(19)的解在积分流形上的定性动态的某些問題。例子是范德坡方程

$$x''+\mu(x^2-1)x'+x=E\cos\frac{2\pi t}{T},$$

其中 E 是小量。

*　*　*　*　*

下面三篇文章討論应用中常見的特殊类型方程(杜芬方程和范德坡方程)的周期解。

夏列阿(R. Chaleat)(法)　非等时摆的同步　作者研究由杜芬方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+a\frac{d\theta}{dt}+\omega_1^2\theta+c\omega_1^2\theta^3=F\cos\omega t$$

所描述的系統中的共振現象和暫态过程。这由不同作者不止一次地探討过。作者利用哈克(Haag)[71]根据平均化的已知方法，导出了一次諧波近似。值得注意的是詳細完成的图解，說明共振現象和暫态过程，以及与所謂跳跃現象(当从共振曲綫的一个分支迅速轉到另一分支时)有关的許多数值資料。

C. Hayashi, Y. Nishikawa(日)　导致杜芬方程不同类型周期解的初始条件　文章研究杜芬方程

$$\frac{d^2v}{d\tau^2}+k\frac{dv}{d\tau}+f(v)=g(\tau)$$

得到周期解的初始值之間的关系，其中 k 为常数，$f(v)$ 是多項式，$g(\tau)$ 是 τ 的周期函数；利用作者在[74]中所用的方法。有兴趣的是用很高精确度完成的数值計算和图示，所解方程是

$$\frac{d^2v}{d\tau^2}+0.1\frac{dv}{d\tau}+v^3=0.15\cos\tau$$

和

$$\frac{d^2v}{d\tau^2}+0.05\frac{dv}{d\tau}+v^3=0.14\cos\tau+0.005;$$

算得数据与理論数据的比較也值得注意。

M. Urabe(日)　范德坡方程周期解的数値研究　文章对范德坡方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\lambda(1-x^2)\frac{dx}{dt}+x=0\quad(\lambda>0)\tag{21}$$

的周期解得出数值計算的結果。对大的或小的参数值 λ，方程(21)的周期解是研究得很好的，但对 λ 的中間值，則理論上所知道的东西甚少。作者的研究[86]在某种程度上塡补了这个空白。利用一套特殊发展的方法

作者对一系列数量級为1的不大值 λ，以及較大的值 $\lambda=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20$，計算了(21)的周期解，精确到第三位小数。文章討論了作者所用計算方法比其他一些方法有那些优点，还作出了一些定性結論。

* * * * *

下面两篇論文与常微分方程概周期解理論有关。

哈尔(J. K. Hale)，賽費尔特(G. Seifert)(美)　奇异扰动方程的有界解和概周期解　討論方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=f(t, x, y, \varepsilon),\\ \varepsilon\dot{y}&=g(t, x, y, \varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

其中 $\varepsilon>0$，$t\in R$，x、$f\in R^{n_1}$，y、$g\in R^{n_2}$ (R^{n_j} 为 n_j 維实欧氏空間，其范数为 $\|x\|=\sum_{i=1}^{n_j}|x_i|$，$R$ 是实数集合)。当 $\varepsilon=0$ 时，方程組(22)退化为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=f(t, x, y, 0),\\ 0&=g(t, x, y, 0).\end{aligned}$$

文中所証定理給出当 ε 充分小且退化系統有概周期解时系統(22)概周期解存在的充分条件。文章推广了[70]中結果，方法則很相近。

卡特萊特(英)　两个方程的系統的概周期解　本文討論系統 $\dot{\xi}=f(\xi, \eta, t)$，$\dot{\eta}=g(\varepsilon, \eta, t)$ 在平面上的概周期解的存在問題，f、g 在平面上連續，对 t 有周期 2π，且假設所有存在、唯一以及解連續依賴于 $t=0$ 时的初值等条件成立。作者采用拓朴的方法，以及在維数較高系統中沒有、而只在二維系統中才有的一些特殊性质。討論了变换 $T: x_1=x(2\pi, x_0)$，其中 $x(t, x_0)=\{\xi(t, x_0), \eta(t, x_0)\}$ 为 $t=0$ 时从点 $x_0=\{\xi_0, \eta_0\}$ 出发的軌綫。象通常那样，T 的最小集合定义为一个对 T 同胚不变的、不可約的閉集合。根据对最小集合的拓朴性质和稳定性的了解研究了周期解和概周期解。对于周期解和概周期解研究中許多有意义但尚未解决的問題有所指示。基本結果发表于[64][65]。

* * * * *

在第一組中也听取了关于应用振动理論的报告，特别是周期解理論在某些具体技术問題中的应用。下面三篇論文討論了这类問題。

勃拉季斯契洛夫(G. Bradistilov)(保)　位于同一鉛垂平面內依次連結的复合物理摆的周期运动和漸近运动　本文研究可在鉛垂平面內振动的几个物理摆，彼此間可作相对角位移。导出运动微分方程并研究其解。作者在[63]中研究过这个系統的各种运动状态，并导出存在周期状态的某些判据。还討論了摆在上面平衡位置附近逗留的状态和存在一族与几个参数有关的漸近运动的状态，以及当 $t\to\infty$ 时趋近不稳定平衡位置的运动等等。

坦特尔(A. Tondl)(捷)　拟綫性系統某些問題的解　文章闡述了将建立周期解的某些方法用于研究机器轉子运动的結果[86]。所討論的方程組为

$$\ddot{y}+\sum_{k=1}^{n}a_{sk}y_k=\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(q_{sk}\dot{y}_k+p_{sk}y_k)\quad (s=1, 2, \cdots, n),$$

其中 a_{sk} 为常数，q_{sk} 和 p_{sk} 为 t 的周期連續函数，周期为 $2\pi/\omega$，ε 是小参数。簡短地报导了所用方法可用来求得頻率 ω 变化时的稳定和不稳定区間；并且对于高自由度数的常系数綫性系統(这时寻求通解实际上是困难的)，这方法也是有用的。

巴烏金(Н. Н. Баутин)(苏)　点变换理論及钟表的动力理論　本文討論机械式钟表、Gipp 調节器及机电式钟表的近似理論。这些机构的理想化模型由具有分段綫性及冲击(間断)特性的微分方程組所描述。根据这些系統相空間变换的分析，得出一些确定稳定周期工作状态的关系式。文中討論了与这些系統中的物理过程有关的許多定性問題。文章提供了詳細图表，結果都已发表(如参看[4])。

T. Yoshizawa (日)　常微分方程解在集合的邻域內的漸近动态　本文研究某些集合的漸近稳定性，以及受扰和未受扰系統的解之間的关系。研究的基础是建立一些里雅普諾夫函数。作为未受扰系統取自治系統 $x'=F(x)$，x 是 n 維矢量，而受扰系統为

$$x'=F(x)+G_1(x, t)+G_2(x, t),$$

其中 G_1 和 G_2 滿足条件

$$G_1(t, x(t)) \to 0 \quad \text{当} \quad t \to \infty \text{ 时},$$

及

$$\int_0^\infty \|G_2(t, x(t))\| dt < \infty$$

($x(t)$ 是任意連續函数)与一些其他的限制。

集合稳定性定义的給出类似于微分方程解稳定性的通常定义。例如，集合被认为关于方程組是一致稳定的，如果当初条件取得与所說集合足够邻近时而系統相应的积分曲綫当 t 增长时一致地任意接近于这一集合。同样給出了一致殆漸近稳定性及許多其他类型稳定性的定义。集合稳定性的研究继續了作者在这方面的工作(例如[88])。所得結果包括了两种特殊情形——里雅普諾夫漸近稳定性和軌道稳定性。

*　　*　　*　　*　　*

下面四篇报告討論振动研究中所遇到的微分方程和方程組理論的一些特殊問題。

安托西維茨(H. A. Antosiewicz)(美)　对参数的連續依賴性及平均法　討論微分方程

$$x' = f(t, x, \lambda), \tag{23}$$

其中函数 f 在实巴拿赫空間 X 取值，且在 $I \times H \times \Lambda$ 上定义，这儿，I 为实直綫 R 的半区間 $[0, T]$，H 是 X 中开集，Λ 是任意度量空間。季赫曼(И. И. Гихман)[16] 由于推广博戈留玻夫平均法[6] 的定理，曾討論过这一方程。在[16]中証明，博戈留玻夫的定理是根据系統(23)的解連續依賴于参数 λ 这一事实而得出的。克拉斯諾謝尔斯基和克恩萊(С. Г. Крейн)[24] 和其他作者对此結果作了推广。本文在証明对参数 λ 的連續依賴性时所用假設和以上各工作中的假設不同。作者采用的条件是：1) 对任意 $\lambda \in \Lambda$，映象 $(t, x) \to f(t, x, \lambda)$ 在 $I \times H$ 中連續；2) 对某一个 $\lambda = \lambda_0$ 存在方程(23)的解 $u_0(t)$，它在 I 內定义且自 H 中取值；3) 在 Λ 中 λ_0 具有这样的邻域 Γ_0，对每一个 $\lambda \in \Gamma_0$，系統(23)容有存在于某一区間 $[0, T(\lambda)) \subset I$ 內的解 $u(t)$，且 $u(0) = u_0(0)$；4) 对任意 $t \in I$，$x \in H$，

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t f(s, x, \lambda) ds = \int_0^t f(s, x, \lambda_0) ds.$$

文中証明，連續依賴性的經典定理可以从作者的定理推出。

罗森堡(R. M. Rosenberg)(美)　C. C. Hsu 多自由度非綫性系統簡正振动的几何化　文中討論一种特殊类型的非綫性动力系統，它容有所謂簡正振动，其一系列性质接近于綫性系統簡正振动的性质(例如迭加原则)。作为基本的力学模型，作者研究作共綫运动的质量系統，质量彼此由非綫性彈簧連結着。彈簧的彈性由奇次多項式描述，因而相应的运动方程为

$$m_i \ddot{u}_i = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1,3,\cdots}^{r_{ij}} a_{ij}^{(m)} (u_i - u_j)^m \quad (i = 1, 2 \cdots, n).$$

文中还研究一些特殊情形，例如二維系統，还討論簡正振动的稳定性問題。所有叙述是用几何語言作出的，軌綫就被解釋为相应黎曼空間中的测地綫；空間的度規为

$$d\sigma = [U(x_1, \cdots, x_n) + u_0] \sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

而 U 为势。有很多說明的图表。本文是作者[84] 研究的继續。

貝尔曼(Bellman R.)，里查德逊(Richardson M.)(美)　决定性和随机性非綫性微分方程的相容解　本文叙述解某些微分方程的近似方法，这是作者在[62]中方法的改变形式。方法的实质在于，用綫性近似来逼近非綫性項，使得均方誤差为最小。这方法用于方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) + r(t), \tag{24}$$

其中 x 是 n 維矢量，t 为时間，A 是 $n \times n$ 常量矩陣，$f(x)$ 是非綫性矢量函数，$r(t)$ 为高斯平稳随机过程。

当 $r \equiv 0$ 时，方程成为 $\frac{dx}{dt} = A(x) + f(x)$，这时的方法为将 $f(x)$ 用 $Bx + b$ 来代替，而 B 是 $n \times n$ 常量矩陣，b 是某一常矢量。这些量由均方誤差应为极小的条件所确定，即由条件

$$\sigma^2 \equiv \langle (f(x) - Bx - b, f(x) - Bx - b) \rangle \equiv \min,$$

这里 $(\cdots)$ 代表标量积，$\langle \cdots \rangle$ 为平均符号。作者提出的平均法 $\langle \cdots \rangle$ 依賴于所述方程解的个别性质，在一定条件下，它就相应于按解的总体求平均。对于普遍方程(24)的解也可用类似的近似，只是較复杂些。例子

有非綫性振蕩器方程

$$u'=v,\quad v'=-u+\varepsilon u^3,$$

范德坡方程

$$u'=v,\quad v'=-u-\lambda(u^2-1)v,$$

以及有强迫力的范德坡方程

$$u'=v,\quad v'=-u-\lambda(u^2-1)v+r(t).$$

对前两个系統这一方法导得的結果就是用其他方法所得出的熟知結果；而对最后一方程作者得到新的重要結果。

斯达尔任斯基(**Старжинский В. М.**)(苏) **振动鏈** 討論特殊类型的振动系統，所謂振动鏈。其定义如下：設振动由拉格朗日第二类方程所描述

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\ddot{q}_i+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_i q_j=Q_\nu-R_\nu,$$

其中 a_{ij} 是动能二次型

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(q_1,\cdots,q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

的系数，而 $Q_\nu(q_1,\cdots,q_n)-R_\nu(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)$ 为阻力，且 $\sum_{\nu=1}^{n}R_\nu\dot{q}_\nu<0$. 設 $q_\nu=q_{\nu 0}(t)$, $\dot{q}_\nu=\dot{q}_{\nu 0}(t)$ 是系統的解(以后指标"0"就代表以这組解代入相应的函数)。相对于这組解的受扰运动的变分方程为

$$A(t)\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}+B(t)\frac{d\overline{x}}{dt}+C(t)\overline{x}=0,\quad \overline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

而 A, B, C 是矩陣，通过 $q_{\nu 0}(t)$, $\dot{q}_{\nu 0}(t)$ 而依賴于 t。选擇合适的拉格朗日广义坐标后，矩陣 A, B, C 可表示为

$$A(t)=\begin{pmatrix}\|(a_{\nu i})_0\|_1^m & 0\\ 0 & \|(a_{\nu i})_0\|_{m+1}^n\end{pmatrix}^*,$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}\left\|\left(\dfrac{\partial R_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right)_0\right\|_1^m & 0\\ 0 & \left\|\left(\dfrac{\partial R_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right)\right\|_{m+1}^n\end{pmatrix},$$

$$C(t)=\begin{pmatrix}\|C_{\nu i}(t)\|_1^m & 0\\ 0 & \|C_{\nu i}(t)\|_{m+1}^n\end{pmatrix},$$

其中 $m<n$。这样类型的振动系統叫做振动鏈。一个例子是所謂自由的完全彈性振动鏈——用彈簧相連結的一串质量，最上面的彈簧一端固定。作者研究了振动鏈未受扰运动对变量 $q_1,\cdots,q_r\ (r\leqslant n)$ 的里雅普諾夫稳定性，特别是最低平衡位置的稳定性。

*　　*　　*　　*　　*

最后三篇論文只是各作者基本結果的簡短报道。

菲拉托夫(**Филатов А. Н.**)(苏) **論李級数在非綫性力学中的应用** 本文討論在应用 К.-Б. 的方法[40]来研究方程

$$\frac{d}{dt}\left[\alpha(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+\beta(\tau)x=\varepsilon f\left(\tau,x,\frac{dx}{dt}\right),\quad \tau=\varepsilon t$$

时所得到的一次近似方程

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon F(\tau,a),\quad \frac{d\varphi}{dt}=\Phi(\tau,a),\quad \frac{d\tau}{dt}=\varepsilon,$$

其中 F, Φ 为已知函数，a 与 φ 是振动过程的振幅与相位。文章报导了得到这組一次近似方程解的某些方法，把解写成級数的形式，級数含有 t 的冪次和对初值作用的一些特殊算子的冪次。指出，可以証明这級

* 原文为 $m-1$，系印刷錯誤——譯者注

数的收斂性。

M. Hykyhara（日）**論常微分方程組的解在平衡点邻域內的展开式** 介紹作者的工作[75]，其中考虑了系統

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1, x_2),$$

f_1 和 f_2 为实函数，对充分小的 x_1, x_2 值有定义，且 $f_i(0, 0)=0$，在 $(0, 0)$ 邻域 f_1 和 f_2 为全純而矩陣

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{matrix} \right\|_{(0,0)}$$

的本征值为 $\pm i$。作出这种系統解在奇点邻近的三种特征型的展开式。作者指出这种方法和結果可以推广到有 n 个变量的系統。

孟杰龙（**D. Mangeron**）（罗） **非綫性系統力学中方程的研究方法** 簡单报导了作者和克利沃森（Л. Е. Кривошеин）（苏）一起研究的积分-微分方程方法。他們将所研究的非綫性振动微分方程用等价的积分-微分方程来代替，然后再用現代的計算数学方法。举出电子管振蕩器作为例子，其方程为

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=\left[(M-LD)\frac{d}{dt}-DR\right]f(E_p+u),$$

初条件为 $u|_{t=0}=u_0$；$\left[\dfrac{du}{dt}\right]_{t=0}=u_0'$。沒有参考文献。

第二組 稳定性的定性方法

三篇报告是許多作者集体工作的綜述，这些工作是关于微分方程理論应用在非綫性振动中的几个基本方向。

安德洛諾娃-列昂托維契（**Е. А. Андронова-Леонтович**），**別留斯季娜**（**Л. Н. Белюстина**）（苏） **二阶动力系統的分支理論及其在研究振动理論的非綫性問題中的应用** 报告闡叙了二阶自治动力系統的定性研究方法，这些方法是以分支理論为基础的（例如参看[2]，[3]）。运用这些方法研究了許多具体問題。

报告的第一部分叙述了分支理論的基本原理。討論含有参数 λ_1、…、λ_n 的系統

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y, \lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y, \lambda_1, \cdots\lambda_n). \tag{25}$$

如果对参数 λ_1、…、λ_n 的某些值，系統(25)的定性結构在其右部所有足够小变动下不变，就称系統(25)对这些参数值是粗的。如果对于某些值 λ_1^0、λ_2^0、…、λ_n^0 系統(25)是非粗的，那末称参数值 λ_1^0、…、λ_n^0 是分支值，而系統的定性結构在参数值变动时的变化現象称为分支。参数分支值的集合把参数空間分为不同的粗結构区域。因此，确定了参数的所有分支值就得到了系統的完全的定性研究。

报告的第二部分討論了不同作者运用分支理論所研究的具体問題，例如系統

$$\frac{dx}{dt}=ax+by-x(x^2+y^2),$$
$$\frac{dy}{dt}=cx+dy-y(x^2+y^2),$$

或者下列系統

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1+\beta}{1+\beta x}+y,$$
$$\frac{dy}{dt}=-\varepsilon(x^2+y^2).$$

在考虑牽引力和正面阻力时飞机运动的儒柯夫斯基問題及許多另外的問題归結为上述系統。原文提供了大量的图表。它包括有 30 篇文献。

澤姆巴(S. Ziemba)(波)　波兰科学院"非綫性振动理論"华沙小組近五年来的一些問題　这里綜述了华沙小組的波兰学者在非綫性振动領域中近五年来的工作。探討了下面三个基本方面的研究：1) 結构的研究，即与寻找适合描述实际系統的模型有关的研究；2) 所选模型的运动的研究，相应的相軌綫和积分曲綫的研究；3) 系統各个参数变化影响的研究，例如最优化等。提出了丰富的波兰学者著作的目录(56 篇)。

康梯(R. Conti)，格拉飞(D. Graffi)，薩桑(G. Sansone)(意)　1951～1961 年期間，意大利数学家在非綫性常微分方程理論和非綫性力学方面的貢献　文章詳細綜述了最近十年意大利数学家在非綫性微分方程和非綫性振动方程方面的工作。它涉及下列基本課題，自治系統：二維系統、具有非綫性阻尼和綫性恢复力的自由振动、列那(Liénard)方程和它的推广、研究自治系統的近似方法；非自治系統：解的有界性、周期解和概周期解的存在性、狄尼(Dini)方程、同步加速器的軌道問題、很多自由度的力学和电学系統、漸近等价性。有大量的文献(作者列举了在 1951～1961 年內 51 位作者的工作)。

聶梅茨基(苏)　"多維动力体系的振动状态"　作者提出了非綫性常微分方程組的振动状态的一般观点[45]。振动状态一般定义的引入如下。設 $q=f(p, t)$ 是相軌道。假定存在与下面結构有关的軸——直綫 L。以 C 表示中心在軸 L 上而位在垂直于直綫 L 的平面上的单位圓。設 q^* 是点 $q=f(p, t)$ 在单位圓平面上的投影。以徑矢联結 q^* 和圓 C 的中心，就得到徑矢与圓周 C 的交点 r。然后討論映象 $T(f(p, t))=r(t)$。如果当 $t\to\infty$ 时这个映象 T 的幂趋于无穷，即点 r 繞着圓 C 无限次，那末称 $f(p, t)$ 为振动状态。在这样的定义下，状态的振动特性与軸 L 的选擇有关，并且当維数大于三时，还与垂直直綫 L 的平面选取有关。报告中还导出用上述方法定义的振动状态存在性的几个解析判据，討論了一些例子。还定义了衰减振动、共振状态、不衰减自振的概念，引进了振动的振幅和频率的概念。提出了这样的意見：这个理論进一步的发展是用来发展寻找非綫性系統振动解的一般方法。引进了振动解各种研究方法的簡单綜述。

克萊恩(М. Г. Крейн)，雅庫包維契(В. А. Якубович)(苏)　周期性系数的哈密頓綫性微分方程組　在微分方程理論对于振动問題的应用中，周期性系数方程組具有重要的意义。本文与这一問題有关。文章討論了哈密頓綫性系統

$$J\frac{dx}{dt}=H(t)x,$$

其中 $x=\{p_1, \cdots, p_k, q_1, \cdots, q_k\}$，

$$H(t)=\begin{pmatrix} \|\alpha_{jh}\| & \|\beta_{hj}\| \\ \|\beta_{jh}\| & \|\gamma_{jh}\| \end{pmatrix}_{(j, h=1,\cdots,k)}, \quad J=\begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix},$$

而 I_k 是 $k\times k$ 单位矩陣，同时假設几乎处处有 $H(t+T)\equiv H(t)$，且矩陣 $H(t)$ 的元素在 $(0, T)$ 上是勒貝格可积的。用 $X(t)$ 表示基本解組的矩陣，且 $X(0)=I_{2k}$。矩陣 $X(T)$ 是单值矩陣(Матрица Монодромии)，而它的固有值称为乘数(Мультипликатор)。在文章中确定了一类具有稳定型有界解的方程，即它所有的解当 $t\to\infty$ 时是有界的，并且这种性质对于具有哈密頓量 $H_1(t)$ 的系統也成立，$H_1(t)$ 在測度

$$r(H_1, H_2)=\int_0^T |H_1(t)-H_2(t)|\,dt$$

的意义下充分接近于 $H(t)$。

如果当 $t\to\infty$ 时具有无界的解，那末系統称为具有无界解的系統。叙述了作者[26]~[27]得到的、方程是有界型的必要且充分条件。

将上述結果用来研究具有小参数的系統的参数共振，計算了一級、二級和进一步近似的动力不稳定性区域的边界，研究了具有参数的哈密頓系統的乘数的解析性质，研究了在哈密頓量的泛函空間中的稳定性区域，导出稳定性的充分条件并研究了此泛函空間的結构。

*　*　*　*　*

下面的四篇报告与具有偏差变元的微分方程有关，这种微分方程最近几年来在振动理論中得到了很多应用。

梅施基斯(А. Д. Мышкис)，希馬諾夫(С. Н. Шиманов)，艾里斯哥尔茨(Л. Э. Эльсгольц)(苏)　时滞系統的稳定性和振动　这篇內容丰富的报告綜述了具有偏差变元微分方程理論的最重要的和最广泛的問題。报告一开始描述了該理論的基本概念、列举了这种方程的最重要类型和进行了問題的某种分类。其次

討論了解的稳定性問題和关于周期解的問題。除了作者的已知結果外，报告中也提到了其它学者关于具有偏差变元微分方程理論的大量研究。巨大的文献目录包含 208 个篇。

諾尔金(С. Б. Норкин)(苏) 一类时滞振动系統的周期运动 文章叙述了作者研究时滞方程周期解的結果[46][47]。討論以方程

$$x''(t)+2\mu x'(t)+\nu^2 x(t)+T(t)x(t-\Delta(t, x))=0 \quad (-\infty<t<\infty),$$

描写的系統，其中 μ 和 ν 是系統的参数，$T(t)\geqslant 0$ 是連續的周期函数。时滞 $\Delta(t, x)\geqslant 0$ 关于 t 是連續的且以某种方式依賴于未知函数的零点的分布。研究了自治和非自治情况。

哈拉納依(A. Halanay)(罗) 时滞系統定性理論的某些問題 文章討論了时滞系統的周期和概周期解的存在性和稳定性問題。叙述了作者在許多工作中的結果(例如[55][56])。討論了下面类型的方程：

$$\dot{x}(t)=X_0[t, x(t), x(t-\tau)]+\varepsilon X_1[t, x(t), x(t-\tau), \varepsilon],$$

其中 X_0 和 X_1 关于 t 具有周期 $\omega>\tau$，同时假設生成系統

$$\dot{x}(t)=X_0[t, x(t), x(t-\tau)]$$

具有周期为 ω 的周期解；还有方程

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau)+f(t),$$

其中 A、B、f 在 $t>0$ 时是有界的；与方程

$$\dot{x}(t)=\int_{-\infty}^{0} x(t+s)\,d_s\eta(t, s)+f(t)+\varepsilon F(t, x(t+s), \varepsilon),$$

以及其它类型的方程。

瓦列也夫(К. Г. Валеев)(苏) 具有按正弦变化的系数和定常时滞变元的綫性微分方程 这个报告沒有列入第二組的議程，然而按題目它接近于上述諸报告。在这篇报告中叙述了作者有关研究具有周期性正弦系数的綫性系統的結果。对这种系統作者[9]推广了早巳知道的某些研究方法。对解的拉普拉斯象建立了二重矩陣級数、指出了从某些象到原象的轉換方法、确定了解的特征指数、所发展的方法应用到某些具有正弦系数和定常时滞的綫性系統。作为例子介紹了一系列具体問題的計算。

庫克列斯(Куклес И. С.)(苏) 非綫性振动理論的两个問題 文章討論了单自由度系統振动的存在性問題和振动的等时性問題。叙述了作者及其学生們关于这些問題的研究[29]~[31]。

第一个問題是确定函数 $f(x)$，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x, y)$，使得由方程

$$y\frac{dy}{dx}=f(x)+y\varphi(x)+y^2\psi(x, y)$$

描写的运动对任何充分接近平衡位置的初始值是振动的。得到了在某些情况下給出該問題解答的許多判据。

第二个問題是研究在怎样的条件下，系統

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=F(x, y) \tag{26}$$

振动解的周期与振幅无关。假設系統(26)在坐标原点的邻域內确定振动运动。得到对于保守情形 $(F(x, y)\equiv f(x))$ 和非保守情形这个問題的解。

希罗夫(Широв И. И.)(苏) 非綫性振动理論中的中心和焦点問題 文章闡述了作者对方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+P(x, y)}{y+Q(x, y)}. \tag{27}$$

的中心和焦点的区别問題所进行的研究，这里 P 和 Q 在 $(0, 0)$ 的邻域中解析且 $P(0, 0)=Q(0, 0)=0$。該問題曾为許多作者研究过，可是得到的区别的判据是很复杂的。对于特殊类型的方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+P(x, y)}{y}$$

庫克列斯[31]深入研究了广义对称方法，用它写出了中心条件的明显形式。本文作者把广义对称方法拓广到一般形式的方程(27)。

* * * * *

下面四篇报告是关于周期解的里雅普諾夫稳定性問題的。

賽貝尔特(P. Seibert)(美) **延拓与广义里雅普諾夫函数** 文章包含作者和奥斯兰德(G. Auslander)关于用广义里雅普諾夫函数研究自治系統的各种类型的稳定性的結果。这些拓广导致許多位于里雅普諾夫意义的稳定性和漸近稳定性之間的新型稳定性。討論系統 $\dot{x}=f(x)$，其中 x 和 f 是 n 維矢量，假設通过每一点 x_0 只有一个解对 $t\geqslant 0$ 所有值有定义，且連續依賴于 x_0。

崔普金(Я. З. Цыпкин)(苏) **非綫性有限差分方程的周期解及其稳定性** 論述了作者[57]关于以下形式的有限差分方程的結果

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{l}\alpha_\nu x[n+\nu]&=\sum_{\nu=0}^{l_1}\beta_\nu y[n+\nu],\\ y[n]&=\Phi[x(n)],\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

这里 Φ 是非綫性的对称函数，而 $l>l_1$. 系統(28)频率为 $\frac{\pi}{N}$ 的对称周期解 $\tilde{x}[n]$ 写成富里埃多項式的形式

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{2}\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{i\frac{k\pi}{N}n},$$

其中 a_k 是未知的复振幅。这些系数的确定归結为有限的非綫性代数方程組。准确地計算大周期解是十分复杂的。对于这种情形建議限于一次近似，它类似于諧波平衡法，写成如下形式

$$\tilde{x}(n)=a_1\cos\left(\frac{\pi}{N}n+\varphi_1\right)$$

也討論了系統(28)周期解的稳定性問題。

勃列赫曼(И. И. Блехман)(苏)，**某些非綫性系統周期运动稳定性的积分判据及其应用** 文章研究了微分方程組

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t, x_1, \cdots, x_n)+\mu f_s(t, x_1, \cdots, x_n, \mu)\ (s=1, \cdots, n)\tag{29}$$

的周期解，其中 X_s 和 f_s 关于 t 具有周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，μ 是参数。設生成系統 $\frac{dx_s}{dt}=X_s(t, x_1, \cdots, x_n)$ 有依賴于参数 α_j 的一族周期解

$$x_1^0=x_1(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_k),\quad k\leqslant n,\tag{30}$$

研究当 $\mu\neq 0$ 时系統(29)在(30)的附近存在周期解的問題。該問題曾为馬尔金(И. Г. Малкин)[37]詳細研究过。在作者工作[5]中証明了和馬尔金定理类似的定理，但除去了一些多余的限制。导出系統(29)周期解的存在性和稳定性的一个积分判据，它类似于[37]的判据，然后应用它在振蕩器旋轉的同步問題中[5]。

迪利貝多(Diliberto S. P.)(美) **綫性力学系統的稳定性** 文章包括作者及其他学者关于研究周期系数的綫性哈密頓系統解的稳定性問題的一些結果，它們是工作[79]、[15]、[25]的拓广和继續。莫瑟(J. Moser)的工作[79]拓广了[15]、[25]的結果，即取消了关于扰动系統矩陣的某些限制。从这些文章的結果得出結論是：当表征扰动事实的参数值充分小时，存在綫性周期变換，把所研究的系統变为这样的形式，它的系数矩陣是对角型的且其元素是純虚的。本文作者的結果是这个变換可以做得解析地依賴于小参数。

* * * * *

下面六篇第二組的报告討論与研究特殊类型的振动系統有关的各种理論問題。

阿尔札內赫(И. С. Аржаных)(苏) **非綫性振动理論的鏈式系統** 文章討論了特殊类型的力学系統——鏈式系統。这种系統具有形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^{(s)}}{\partial\dot{q}_{sj}}-\frac{\partial L^{(s)}}{\partial q_{sj}}=0\quad(s=1, 2, \cdots, k;\ j=1, \cdots, n_s),$$

其中 $L^{(s)}$ 依賴于全部坐标和速度 q_{sj}，$\dot{q}_{sj}$。$L^{(s)}$ 称为环节动势，它們的数目称为鏈式系統的节数；如果不經变数变換可以减少节数，那末称为条件节数。討論了鏈式系統的許多特征性质，特别是关于 $L^{(s)}$ 对某些特殊类型算子的李群的不变性。举了一些具体鏈式系統的例子，諸如：具有三个质量的三段数学摆，挂在沿斜面滑动的底面上的摆等等。

舍維洛(В. Е. Шевело)，施捷里克(В. Г. Штелик)(苏) **一維非自治系統非綫性振动理論的几个問題**

文章研究了方程

$$(k(t)x')'+f(x,\ x',\ t)=0$$

的解，假定 $t\geqslant t_0>0$ 时 $k(t)\geqslant k_0=$常量，且 $k(t)$、$k'(t)$ 和 $f(x,\ x',\ t)$ 均連續。建立了可以按初始条件对解的振蕩性质有无影响的观点来将系統分类的判据，討論了与振蕩和不振蕩区域的确定及振动解振幅的动态有关的問題。探討某些例子，其中有非自治摆的运动問題，来說明所得到的結果。在所引的（15篇）文献中我們只提到作者的一篇工作[58]。

吉立斯(A. Gillis)（英）　与非綫性振动有关的二阶微分方程自治系統的奇点和极限环　这里討論方程組

$$\left.\begin{aligned}\dot{b}&=b(1-b^2)-F\cos\varphi,\\ b\dot{\varphi}&=-b(x+\nu b^2)+F\sin\varphi,\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

其中 b 和 φ 作为平面上的极坐标。例如对許多系統的非綫性振动的振幅和位相的近似中得到类似的方程組。当 $\nu=0$ 时它相应于范德坡方程。量 F 表征强迫力的振幅，x 是外力的频率，ν 是系統的对称特征。

系統(31)的奇点决定了系統的同步近似諧振动，当值 b 等于奇点的坐标时，曲綫 $y=b^2$ 是当 $x=$常数时在 F、ν 坐标平面上的共振曲綫，系統(31)的稳定极限环对应于原来非綫性系統的复杂的稳定周期解，而另外的积分曲綫表征非定常的过渡过程。

当 F 和 x 数值大时，已不可以把系統(31)看成是一次近似系統，可是在文章中沒有討論这一問題。文章研究了奇点、共振曲綫、在焦点邻域中积分曲綫的形式、在焦点邻域产生极限环的現象，計算了极限环周期的极限值，研究了系統在参数 x、F^2、ν 空間中的表示，証明了关于极限环的某些一般定理，也討論了关于解的定性动态的許多其它問題和滞后現象。并用十四張图表来闡明叙述。

斯考夫龙斯基(I. M. Skowronski) 澤姆巴（波）　具有部分負阻尼的强非綫性非自治力学系統运动的有界性区域　討論以离散质量鏈型的力学模型所描述的一类系統，这些质量以强非綫性彈簧和負阻尼器相联系。这种模型有矢量方程

$$\ddot{q}+F(q,\ \dot{q},\ t)=0,$$

其中

$$F=\widetilde{F}(q,\ \dot{q})-G(q,\ \dot{q},\ t),$$

$$\widetilde{F}=\Phi^p(|q|,\ \dot{q})+\Phi^n(|q|,\ q)+\Psi(q),$$

同时 G 表征强迫力，Φ^p 决定正的能量散逸，而 Φ^n 表征部分負阻尼，函数 $\Psi(q)$ 是系統的彈性。研究了所討論的系統在时間的无限区間上的有界解問題。

艾捷洛(J. O. C. Ezeilo)（尼日利亚）　三阶微分方程的有界性定理　文中証明了判定微分方程

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+\varphi_2(\dot{x})+\varphi_3(x)=p(t)$$

的解当 $t\to\infty$ 时的有界性的定理，这里 $a=$常数，$\varphi_2(0)=\varphi_3(0)=0$，$\varphi_3'$ 存在且 φ_2，φ_3' 是連續的，且 $p\not\equiv0$。在証明时利用了作者在以前工作[69]中所采用的方法。

加法里(A. Ghaffari)（美）　瑞利(Rayleigh)非綫性振动方程　綜述了关于瑞利方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\left[-\frac{dx}{dt}+\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right]+x=0\quad(\varepsilon>0)$$

的解的已知結果，特别研究了軌綫在无穷远的动态。

*　*　*　*　*

第二組有三个报告是討論振动理論在具体技术問題中的应用。

薩亚索夫(Ю. С. Саясов) 梅里尼柯夫(В. К. Мельников)（苏）　考虑到运动方程非保守性的同步加速状态的粒子俘获理論　研究方程

$$\frac{d}{dt}[m(\varepsilon t)\dot{\psi}]+f(\varepsilon t)u'_{\psi}(\psi)=0\tag{32}$$

的俘获区域，就是使得系統(32)发生振动状态的初始值区域，其中 ε 是小参数。在描述共振加速器中粒子的相振动时发生这类問題。研究是基于梅里尼柯夫的結果[89]，他为(32)类型的方程和一些其它类似的方程建立了分隔綫(сепаратрис)。

西台里亚德(L. Sideriades)（法）　定性拓扑方法在調整箱研究中的应用　用拓扑方法研究了描写調