

数学分析

(第一册)

周民强编著



A1024735

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本教材讲述的是高等数学的基础课程——数学分析,其核心内容为微积分学.这套教材共三册,本书是其中的第一册.

本书共有六章,分别为函数、极限论、连续函数、导数与微分、微分中值定理和 Taylor 公式、不定积分,主要讲述了一元极限论、微分学以及不定积分等内容.

本书是在作者在北京大学数学科学学院多年教学所使用的讲义的基础上修改而成,内容丰富,深入浅出,对较难理解的定理、定义以及可深入探讨的问题,本书以加注的形式予以解说,以利于读者更好地接受新知识.本书在每一章的末尾还附有注记,意在为读者更清楚地了解知识背景,更迅速地提高数学能力创造条件.本书选用了适量有代表性、启发性的例题,还选入了足够数量的习题和思考题.习题和思考题中,既有一般难度的题目,也有较难的题目,供读者酌情选做.

本教材可作为大学本科阶段的数学、概率统计、力学以及计算机等相关专业的教科书,也可作为广大数学工作及爱好者的参考图书.

责任编辑 刘 啸 苏德敏

数 学 分 析

(第一册)

周民强 编著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)

新华书店上海发行所经销 常熟市兴达印刷有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 154 000

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1—5 200

ISBN 7-5323-6493-3/O · 259

定价: 22.80 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向本社出版科联系调换

序

序

本教材的前身是北京大学数学系教学用的讲义,现在出版成书已进入 21 世纪了. 面向这一重大挑战,在撰稿的进程中,以下几个方面是作者着重思考并力图落实的.

1. 加强导引性论述,介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法. 这或许有益于树立正确的数学观,增加学习的活泼性.

2. 适当提高起点,扩大知识面. 书中在讲解各种理论的应用时,列举了丰富的典型例题,以利于在提高启发式教学水平的同时,让学生有一个扩展的自学园地.

3. 为了培养数学思维的习惯,以及养成“会学”数学的能力,本书在每章节后列有适当数量的思考问题. 此外,还以加注、用小字和附录的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项,这也对引发读者的创新思维有所助益.

4. 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一,本书一律用原文书写(在页末给出中文译名供参考),并尽力介绍他们的国籍和生卒年代. 尊重曾为人类的科学进步作出过贡献的学者,是我们后代人文明的表现之一.

5. 对于想用本书作为正式教材的学校和教师来说,在教学实践中必须依据培养目标和实际情况对其内容作适当取舍,不能照本宣科. 在这里,还希望广大读者和教师对本书提出批评和

建议.

最后,衷心感谢上海科学技术出版社对本书的出版所给予的关怀和支持.

作者

2002. 5

序

致 读 者

《数学分析》的核心内容是“微积分”——微分学与积分学的统称,它是数学发展史中最伟大的成果,始创于 17 世纪下半叶,其代表人物是两位著名的学者:英国的 I. Newton(1643~1727)和德国的 G. W. Leibniz(1646~1716).

Newton 和 Leibniz 对微积分的杰出贡献与这一领域有关的前期工作不同,他俩使微积分学成为一门独立的学科,而不再是古希腊几何的附庸和延续,且为许多课题提供了崭新的研究方法.自微积分始,数学发展成为变量数学时期.微积分从运动、变化的观点、方法来考察各种事物和现象,这正符合客观世界处于不断运动、变化中的实际.因此,微积分的建立给予科学、技术领域以巨大的影响,推动了生产力的发展.特别是在天文、力学方面的成就,在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条.另一方面,也由于当时的微积分学自身理论的不完善而受到责难.但这些都不能阻挡它的继续前进.

19 世纪初期,由于科学技术进步的推动,促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作,终于在 19 世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系,为微积分的普及创造了更加有利的条件,也使它成为今天众多院校的必修课程.

因此,在三百余年后的今天,学习微积分已不能算是件“时髦”的事情了.如果从培养 21 世纪的人才而言,或许只能说是一张“入门券”而已.

学习微积分课程的目的有三:一是可应用于实际课题的计算;二是通过它学习数学思维、逻辑判断的能力;最后一点是要

为学习其他课程奠定基础.

然而必须指出的是,微积分作为一门课程是百年数学硕果的浓缩,前后内容环环紧扣,并与后继课程接轨.企图在高考后入大学初期先松懈一段时间的任何做法,将在学习中造成十分被动的局面,切记!

怎样才能学好数学?首先是要对它有兴趣,爱好数学.谈到学习方法,人们公认的是勤思考,多练习;善于总结,会提问题;以及有一种锲而不舍的精神.至于说捷径,正如著名的数学教育家 Polya(波利亚)所说的,我们不可能制定一种最有效的思维方法,思维能力的培养只有通过思维训练才能获得.说得绝对一些,如果有一种“万能”的手段可以解决一切问题,那么这门科学不也就没有生命力了吗?!

本书共分三册,第一、二册介绍一元函数微积分学,第三册介绍多元函数微积分学.本册的内容的重头戏虽是微分学,但第二章论述的极限论则是全书的理论基础.

学问者,学习,问难也.业精于勤,荒于嬉.

目 录

目

录

绪论	1
§ 1 微积分起源简介	1
§ 2 微积分在应用方面的成就举例(18 世纪)	2
§ 3 微积分的名称来源	3
第一章 函数	5
§ 1 变量	5
§ 2 函数概念	8
2.1 函数的定义	8
2.2 构成函数的各种途径	10
§ 3 函数图形的整体特征分类简介	19
§ 4 初等函数	27
注记	29
第二章 极限论	35
§ 1 实数连续性公理简介	35
§ 2 有界数集与确界	38
2.1 有界数集	38
2.2 有界数集的确界	40
§ 3 数列极限	43
3.1 数列及其极限命题的提出	43
3.2 数列的极限概念	45

3.3	收敛数列的性质	51
3.4	数列及其子列	59
3.5	单调有界数列的极限	61
§ 4	实数连续统的基本定理	68
4.1	闭区间套序列、有限子覆盖	68
4.2	聚点原理与 Cauchy 收敛准则	72
§ 5	数列的上极限、下极限	79
5.1	数列的上、下极限概念	79
5.2	数列上、下极限的运算公式	83
§ 6	函数极限	90
6.1	函数的有界性概念	90
6.2	函数的极限概念	93
6.3	函数极限的基本性质	98
6.4	两个典型极限	106
6.5	判别函数极限存在的 Cauchy 准则	108
§ 7	无穷大量、渐近线	112
7.1	无穷大连续变量	112
7.2	渐近线	114
7.3	无穷大整序变量	117
§ 8	无穷大(小)量的量阶表示	118
8.1	符号“ O ”与“ o ”的意义	119
8.2	渐近相等	121
	注记	128
第三章	连续函数	140
§ 1	函数的连续性	141
1.1	函数在一点连续的概念	141
1.2	函数在一点左、右连续的概念	144
1.3	函数在连续点处的局部性质	146
§ 2	多个函数连续性之间的运算关系,初等函数的	

连续性	147
§ 3 函数间断点的分类	153
§ 4 闭区间上连续函数的重要性质	155
4.1 有界性、最值性	155
4.2 介值(中值)性	159
4.3 一致连续性	162
注记	168
第四章 微分学(一):导数与微分	174
§ 1 函数的导数概念	174
1.1 即时速度与切线斜率	174
1.2 导数的定义及其记法	177
1.3 左、右导数的概念	181
1.4 函数的可导性与连续性	184
1.5 导数与变化率	188
§ 2 求导运算法则	190
2.1 四则运算	190
2.2 复合函数与反函数的求导公式	193
2.3 参数式函数与隐函数的导数	200
§ 3 微分	204
3.1 微分概念与微分公式	204
3.2 复合函数微分法与微分的形式不变性	208
§ 4 高阶导数与高阶微分	210
4.1 $y=f(x)$ 的高阶导数	210
4.2 其他定式函数的高阶导数	217
4.3 高阶微分	220
§ 5 描述光滑曲线的几何量	222
5.1 两曲线之间的交角	222
5.2 弧长的微分	224
5.3 曲线的曲率	225

注记	230
----	-----

第五章 微分学(二):微分中值定理与

Taylor 公式	237
-----------	-----

§ 1 微分中值定理	237
1.1 Rolle 定理	237
1.2 Lagrange 中值公式	240
1.3 Cauchy 中值公式	246
§ 2 L'Hôpital 法则——求“不定型”的极限	248
2.1 $\frac{0}{0}$ 不定型	248
2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型	251
2.3 其他不定型	253
§ 3 函数的极值,导函数的性质	256
3.1 函数的极值	256
3.2 导函数的性质	264
§ 4 判别函数的凹凸性,求曲线的拐点,曲线作图	268
4.1 判别函数的凹凸性	268
4.2 求曲线的拐点	273
4.3 曲线作图法	276
§ 5 Taylor 公式	280
5.1 Peano 余项的 Taylor 公式及其应用	280
5.2 Lagrange 余项的 Taylor 公式及其应用	294
注记	302

第六章 微分的逆运算——不定积分 315

§ 1 原函数与不定积分	316
1.1 原函数与不定积分的概念	316

1.2	部分初等函数的积分表	320
§ 2	积分法法则	323
2.1	不定积分运算的线性性质	323
2.2	换元积分法	326
2.3	分部积分法	333
2.4	递推公式	338
§ 3	原函数是初等函数的几类函数积分法	340
3.1	有理分式(部分分式法)	341
3.2	无理函数	346
3.3	三角(超越)函数	357
注记		360

目

录

绪 论

绪

论

§ 1 微积分起源简介

欧洲在进入文艺复兴时期(约公元 1200~1600 年)后,人们的思想开始从教会统治下得到解放. 古希腊经典著作的译出推动了众多学者对科学研究的兴趣,出现了前所未有的文化繁荣. 另一方面,生产技术的进步与新的生产关系的建立,促进了商品生产的发展. 市场的扩大,需求新的原料基地,且迫切要求通商. 因此,航运事业急速发展,伴随而来的是抢占殖民地的战争.

在看不见陆地的海洋中驶船,须有测定纬度和经度的精确方法. 纬度可以通过太阳或其他恒星来确定,但经度则要求测量月球关于某些恒星的相对方向以及计算时间差. 这不但要了解月球运行的轨道,而且还要求保证船只的稳定性而不使所测方位角发生偏差. 随之而来的是必须设计出准确的计时器,从而开始了对时钟运动的研究. 战争推动着武器的进步,火炮的射程与炮弹速度的关系,抛射体的路线与高度成为人们探讨的课题. 观测天体用的镜面光学性质的深入了解此时更有了新的用途.

综上所述,研究运动变化的规律成为那一时期最主要的课题,从而作为描述这一规律的数学方法——量与量之间的关系开始出现,它借助于不久前所创立的坐标几何法,形成了以解析式表达的完整曲线的函数观念.

在这种函数观念的基础上,上述科学实践中提出的各种课题,实际上可归纳为下述四类问题:

1. 已知物体移动的距离(是时间的)函数,求此物体在任意时刻的速度和加速度;反之,已知物体运动的加速度(时间的函数),求出速度和距离.

2. 求已知曲线的切线(或斜率),或已知一曲线上任一点的切线(或斜率),求该曲线的表达式.(这与透镜的设计有关)

3. 求已知函数的最大、最小值.(如求行星离太阳的最远和最近距离,求获得最大射程的发射角等)

4. 求曲线的长度(如行星在某时间间隔内移动的距离),曲线围成的面积.

上述四个问题虽分属两个不同的领域——力学和几何学,但进一步分析探讨说明,它们又可归纳为两类数学模型,粗略而形象地讲,就是求“无穷小量之比”,以及“求无穷多个无穷小量的和”.因此,在早期也称这门学问为“无穷小分析”.显见,为了解决这些课题,面临的矛盾是有限与无限的矛盾.这也是贯穿本课程始终的主要矛盾.而解决这一矛盾的主要思想就是在有限的运动、变化中去把握无限,也就是运用极限理论.虽然这一思想在 17、18 世纪并没有在逻辑上阐述清楚,但在 19 世纪几代数学家辛勤耕耘下,现代微积分学大厦终于建立.

§ 2 微积分在应用方面的成就 举例(18 世纪)

J. Bernoulli(伯努里,1667~1765,瑞士数学家):光的反射、折射,曲线族正交规线,最速下降线.

Clairaut(克莱罗,1713~1765,法国数学家):地球形状和月球的理论.

d'Alembert(达朗贝尔,1707~1783,法国数学家):弦振动,流体平衡与运动,风的成因.

Lambert(兰伯特,1728~1777,瑞士数学家):双曲函数,彗星轨道.

Lagrange(拉格朗日, 1736~1813, 法国数学家): 分析力学, 解析函数.

Laplace(拉普拉斯, 1749~1828, 法国数学天文学家): 天体力学.

.....

应当指出, 微积分理论在指导实践上取得巨大成功的还有:

Maxwell(麦克斯韦, 1831~1879, 英国数学物理学家): 用它阐述电磁学定律, 预示了为后人证实的电磁波的存在.

Riemann(黎曼, 1826~1866, 德国数学家): 用它研究几何, 为 Einstein(爱因斯坦)的研究工作做了准备, 使之很快从 Riemann 几何中发现了建立一般引力理论的钥匙.

又如海王星被确切地观测到, 也是由于在纠正天王星轨道的计算偏差时的预先设定.

.....

§ 3 微积分的名称来源

Newton 称微积分为 fluxions(流数术), 而 Leibniz 把它叫做 Calculus differentialis(差的计算)以及 Calculus summatorius(求和运算). Calculus 是拉丁文, 原意为“石子”, 这是因为古代欧洲人用石子来作为计算工具的. 因此, 后人也就把计算或演算都叫做 Calculus. 随着这一学问的深入发展以及人们对它认识的提高, 把差的计算改称为 differential calculus(微分学), 求和运算改称为求整运算, 即现在的 integral calculus(积分学), 而微积分也就统称为 Calculus.

微积分学传入我国在 19 世纪, 1859 年上海墨海书馆首次发行中文译本《代微积拾级》一书, 原书是 Loomis(鲁米斯, 1811~1889, 英籍)所著的《Analytical Geometry and calculus》, 是由李善兰和 Wylie. A. (伟烈亚力, 1815~1887, 英籍)合译的. 译名中的“代”是指解析几何(当时称代数几何), “微”是指微分, “积”

是指积分,而 Calculus 被译成微积.该书在序中写道:“我国康熙时,两国本来之(即莱布尼兹)、奈端(即牛顿)二家又创微分、积分二术,……其理大要:凡线面体皆设为由小渐大,一刹那中所增之积即微分也,其全积即积分也”.这是我国微积分这一名称的由来.

绪

论

第一章 函 数

研究事物的变化、运动,要求在数学中引入变量的概念,事物之间的相互制约与联系,使得变量与变量之间呈现出某种依赖关系——函数关系.

数学分析就是以研究(实)函数为己任.为此,本章把函数的概念以及有关事项先作一介绍,也可以说是预备知识.

§ 1 变 量

变量,顾名思义,就是变化着的量,即允许或可以取不同数值的量.这是中学时代就已经有过的观念.

变量数学属于高等数学范畴,其创始期应追溯到 1637 年 Descartes^① 所奠定的解析几何.自 16 世纪以来,物理学(包括天文学)的中心问题是研究位移运动,运动着的物体随时间而改变其位置.因此,用数量关系来描述这一现象时,必须采用允许其取不同值的量——符号 x 及其各种组合来表示.人们为了适应这一思想上的飞跃,就必须摆脱常量数学的束缚.

常量数学的两个特征是:(1) 研究对象是常量,如代数方程 $x^2 - 4 = 0$ 的未知常量 x ; (2) 运算次数是有限的.

当然,变量是常量的发展,两者有着不可分割的联系.所谓常量,是在某一个特定的研究过程或数学问题中保持其数值不变的量.因此,如果将常量视为此一过程中总取同一值的量,那

① 笛卡儿(1596~1650),法国数学家.

么常量与变量只是一种相对的说法.

例如,在考察方程

$$y = ax^2 + bx + c$$

作为二次曲线的性态时,其中 a, b, c 是作为常数看待的,但在其作为一般二次曲线的表达式,而研究其性质与 a, b, c 之关系时,人们又可视 a, b, c 为变量而取不同的值加以考察.

不仅如此,变量还是通过它所取的一系列特定的量(常值)而被认识的.因此,常量又可看成是变量在变动过程中所取到的一个确定的量,运动状态中的一种暂住状态.这一观点是变量数学研究数学问题的核心思想,解决了许多常量数学所无法解决的课题.这一思想正是从运动中认识事物这一哲学原理的反映.例如,曲线在一点的切线可视为割线转动的极限位置;圆面积可用边数逐次增多的圆内正多边形面积来逼近.下面,我们还是要给出变量概念的一般说法:

“如果符号 x 能表示对象集合 E 中的任意元素,那么就称 x 为**变量**,称 E 为 x 的变化范围——**变域**”.

在本书中,变域中的元素均为实数.实数是大家在中学时期就已经比较熟悉的,其中有:

(1) 正整数.正整数全体记为 $\mathbf{N}^*$,它们是可以从小到大排列起来的.由一部分正整数组成的集合必有最小数.

(2) 有理数.全体整数记为 $\mathbf{Z}$,有理数是指分数

$$\frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0).$$

(并经常以既约分式出现,即 p 与 q 互素),其全体记为 $\mathbf{Q}$.显然, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$,而且有理数的和、差、积与商(分母不为零)仍为有理数(关于四则运算是封闭的).

(3) 无理数.

实数的全体称为**实数系**,记为 $\mathbf{R}^{\text{①}}$ 或 $(-\infty, \infty)$.