高等学校试用教材

系统辨识

西安交通大学 史维祥 李天石 郑 滇 编

GAO DENG XUE XIAO JIAO CAI

机械工业出版社

高 等 学 校 试 用 教 材

系 统 辨 识

西安交通大学 史维祥 李天石 郑 滇 编

机 械 工 业 出 版 社

本书全面介绍了系统辨识的基本理论、试验设计及工程应用。主要内容有：系统建模与辨识的基本概念；最小二乘法的基本原理、算法及辨识精度的统计分析；最大似然估计的基本原理及递推算法；相关分析法的基本原理、试验设计及与最小二乘法的关系；古典谱分析法的基本原理、功率谱估计的FFT及估计精度的统计分析及谱分析法与相关分析法、最小二乘法的关系；时间序列分析的基本概念、方法及其应用；现代谱分析的概念及基本方法。

全书以最小二乘法为基础，注重阐明各种方法的基本概念与联系，并充分考虑工科类专业的特点，详尽讨论了系统辨识理论在实际应用中的有关问题，并附有较多的应用实例，便于教学与自学。

系　统　辨　识

西安交通大学　史维祥　李天石　郑　滇　编

*

责任编辑：孙祥根　版式设计：胡金瑛

责任印制：王国光　责任校对：熊天荣

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 13 3/4·字数 337 千字

1989年 6 月北京第一版·1989年 6 月北京第一次印刷

印数　0,001—1,600·定价：2.75元

*

ISBN 7-111-01454-5/TP·87(课)

前　　言

本书是根据高等学校1986～1990年工科类教材编审出版规划和1984及1986年召开的流体传动及控制专业教材编审小组会议，按高等工科院校流体传动及控制类专业本科选修课的要求和研究生学习的要求而组织编写的。本书亦可用作机械制造、化工、自动控制等专业的教学参考书及有关科技工作者的自学参考书。

系统辨识是现代控制理论的一个重要分支。近年来，它不仅在生产过程及工程实际中，而且在生物学、生态学、环境科学，乃至社会科学中的人口学、经济学等诸多领域里，都得到了广泛的应用。显然，把系统辨识方面比较成熟的理论及行之有效的方法写成可供学习的教材是很有必要的。

全书共分七章，第一章主要介绍了建模与系统辨识的基本概念与常用的数学模型，同时概述了以往所用的古典辨识方法。第二、三、四章介绍了目前最常用的几类辨识方法，诸如最小二乘法、最大似然法、相关分析法等。第五、六、七章分别介绍了古典谱分析法、时间序列分析及现代谱分析的基本理论与方法，该部分内容是系统辨识目前比较活跃的领域，并在实际中得到愈来愈广泛的应用。

阅读本书时，读者需掌握概率论等工程数学方面及自动控制理论方面的基本知识。凡注有*号的，本科生及初学者仅需了解有关概念及结论。

本书由华中理工大学钱祥生教授主审，并请华中理工大学杨叔子教授进行了审阅，他们提出了很多宝贵意见，编者谨在此表示深切的感谢。

系统辨识是一门新学科，把系统辨识的基本理论与方法写成一本适合教学的教材还是一种尝试，加上编者的学识与经验有限，因此在全书中一定存在不少缺点与错误，编者殷切希望得到专家与读者们的批评与指正。

目 录

第一章　建 模 与 辨 识

§1-1　模型、建模与辨识

一、模型

在客观世界中，为了对某一事物或过程（如某一工程系统、某一医疗过程等）进行定量研究，常常需要建立代表该事物或过程本质的模型。所谓一个过程的模型，就是对该过程本质方面的一种描述，它能以适用的形式提供该实际过程的有关信息。

因为建模的目的是：以所建的模型为基础，进一步作出各种研究与决策，所以，模型必须采取适合于应用目的的形式。一般来说，一个过程的模型总应比现实的过程来得简单，所以也可以说，模型是适当地降低了复杂程度的现实过程（或事物）主要方面的代表。

建立模型主要的目的有以下四个方面：

（1）研究　在科学研究中，为了掌握事物发展与变化规律，以便更全面地更深刻地了解它、研究它，需要把一些属于感性的、现象的认识与素材，抽象与提高成理性的东西。被抽象出来的代表事物本质的模型，就是体现该事物理性的一种形式，而且抽象、概括成模型过程这本身常常就是科学研究的一部分。在工程实际中，一旦建立了系统模型后，就可以对该系统的动、静态特性有更深入全面的了解，有助于理解过程中所获得的数据；提供探索和分析不同工作条件及各种参数对该对象工作的影响，以便进一步改进系统及创造新的系统。

（2）设计与计算　在设计工作中，对被设计的系统，其中特别是比较复杂的系统，常常要进行模拟、仿真等研究，以便比较各种设计方案及选取合理的参数，使所设计的系统达到设计的要求（如稳定性、安定性、精度、产量等）。采用计算机设计的就称为计算机辅助设计。模型的建立就为以上工作提供了基础。通过模型化，使系统能进行数学处理。例如，只有确定了控制系统的模型的前提下，才有可能采用各种最优化的方法，对系统进行最优化分析和计算，才有可能综合最优控制的算法。

（3）调查与预测　在工程实际中，最常见的应用系统模型的场合之一是调查与预测工程实际系统工作的状况与性能。众所周知，一个工程系统的控制和运行水平，在很大程度上取决于人们事先对于该系统特性的掌握和认识程度。建立正确的系统模型，有助于显著地提高系统的控制和运行水平。在建立模型的基础上，对各种控制和运行方式进行系统的模拟研究，这是利用模型进行调查和预测的主要手段之一。

（4）对实际系统进行控制　在某些计算机（模拟机、电子计算机）控制系统中，需要将代表系统运动规律等的数学模型贮存在计算机中，对这些系统进行在线的最优控制等。这些系统如塑料加工的注射机、数控机床等自适应控制、导弹的轨迹控制等等。所以在这里必须用分析法或辨识法求出所要求的数学模型。

在实际工程系统中，模型可分为物理模型和数学模型两类。

物理模型　通俗地说，物理模型是原系统根据一些简化规则简化或缩小的复制品，亦可以是原系统的模拟。以区别于数学模型（如方程式等），物理模型是一个具体对象，也可以

说它是在主要性能上较精确地等同于原系统，或至少在本质上和原系统比较相近的某种事物。例如，一个由电阻、电容组成的电路，其输入与输出为电压，在适当选择参数后，在动态响应方面，可以与一个由节流器与流体容器组成的流体传动等同，因此前者就可以作为该流体系统的物理模型。又如一个大型电液伺服系统控制的振动台，可以按一定规则用一个大大缩小了的小型振动台去模拟它，这时后者亦是前者的物理模型。在工程上，物理模型通常可以用一些图形来表示。

数学模型 数学模型就是反映被建模型系统各物理量之间关系的一种数学结构式，如代数方程、微分方程、传递函数等等。所以在工程上，数学模型总是以数学式子来表示的。有些学者把如自动控制系统的动态响应曲线表示的模型亦称数学模型。

例如，在液压传动系统中，一个振动负载质量为m的液压缸（作动筒）活塞副，当将进回油路都封死时，可以一个弹簧质量系统来近似地模拟它。弹簧刚性系数K应相当于两封闭油腔油柱的弹性系数（刚性系数）。当两者的运动质量及只与运动速度成正比的粘性摩擦系数B亦相同时，则这个弹簧质量系统就可看成活塞油缸及其运动质量系统的物理模型，而它们的数学模型（描述动态特性）为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Ky=F$$

式中 y——质量m的运动坐标；

F——加在其上的力。

在系统辨识中，还会遇到所谓随机性模型与确定性模型（以后将说明）；参数模型与非参数模型等。用数学形式表达的模型是参数模型；对一个系统进行试验所得出的，如阶跃响应曲线、频率特性曲线等为非参数模型。

二、数学模型的建立

建立数学模型总的来说有两种途径，一种是分析法，即根据所研究系统的物理机理，利用有关定律（如牛顿定律、基尔霍夫定律、热力学定律等）及系统物理量之间的关系等，用数学方法推导出数学模型，这就是分析法建模。另一种是试验法，即对一个已经存在的系统，根据观察、测量并记录得到的输入、输出实验数据，经过一些加工处理，从而求得系统的非参数模型或参数模型。这种获得数学模型的方法就称为系统辨识，这正是本书要详加讨论的。在实践中，上述两种方法常常是结合进行的。

在采用分析法建立数学模型时，常常会遇到下面一些问题，需要我们正确处理。

1. 确定模型的结构

确定模型的结构就是确定模型属于哪一种类型，如分析的系统是动态的还是静态的；是线性的还是非线性的；是确定型的还是随机型的；是连续型的还是离散型的；系统的参数是定常的还是时变的；是集中参数的还是分布参数的；在时域中研究还是频域中研究等等。这些都是首先要确定的问题，模型结构若判断错了，则理论分析就会与实际差得很远。

众所周知，在时域中，线性系统的动态特性可以用线性微分方程来描述，非线性系统应由非线性方程来描述。在参数变化范围不大，而非线性又不严重（属连续曲线）时，非线性系统可进行线性化处理。

确定型过程变化规律是确定的，有明显规律的，事先可预测的，如电流流过电阻的压降，在已知所有作用力后某一特定质量的运动规律等等。确定型过程的特性可用一般的代数

方程或微分方程来描述。随机型过程是随机变化的，事先不能肯定的。如电子仪器中的某些噪声信号。随机过程的特性只能用概率论及数理统计理论来研究。

在工程实际中，常遇到集中参数型与分布参数型两类系统。集中参数型系统的动态特性可以用常微分方程来描述。典型的如一个集中质量m挂在一根质量可忽略的弹簧上的系统；在低频下工作由导线连成的电阻、电容、电感电路等等。分布参数系统则要用偏微分方程来描述。要作为分布参数系统来处理的如在流体力学中的不等熵流的管路。在一个管路中流动的流体，若在管路中流体的各点速度与加速度、密度、温度及压力均是相同的、一致的，或近于一致的，则这时流体的运动规律可作为或近似地作为集中参数来考虑，若不相同、不一致，则就应作为分布参数来研究。如果为了某些理由，要将分布参数系统作为集中参数型来处理时，则只能将系统分割成很多小块，即所谓离散化，每一块可作为集中参数系统来处理。当然，在某些条件下，整个分布参数系统可近似地看作是集中型的，这时要慎重判断，以免产生不能允许的错误。在推导偏微分方程时，要仔细分析边界条件，边界条件确定得不正确，计算结果就会发生错误。在处理集中参数模型时，也可以在时域中离散化，对离散时间模型就要用差分方程来描述。

所谓单输入单输出系统，就是系统只有一个输入及输出变量，因此又称单变量系统。多输入多输出系统则有多个输入及输出变量，又称多变量系统。单变量系统可用微分方程及传递函数来描述，而多变量系统则必需用状态方程、状态转移矩阵等来描述。

模型结构的确定，除须确定上述数学模型类型外，还要确定其阶数。数学模型的其它结构形式就不在这里一一叙述了。

2. 详尽分析及了解被识系统的物理本质

详细分析及了解被识系统的物理本质和各物理量之间的关系是建立数学模型的基础，在这基础上作必要的假设，就可根据本学科范围内的各种定理、公式建立数学方程式。建立数学模型必需熟悉专业知识，对所作的各项假设必需有足够的根据，应作定性定量分析，否则往往就成为产生错误或误差的根源。方程式中某些系数在可能时，最好直接从实验中求出来。

3. 简化方程式

用上面的方法建立的方程式（数学模型）有时会显得很复杂，不实用，因此需要作必要的简化，如线性化，略去次要项等，使得最后得到的数学模型既可靠，又实用。所以在作前面的假设或在这里进行简化时，实际上是在精度与模型的复杂性之间搞折衷。

4. 对模型作检验

用实验或生产实践结果对所得数学模型作检验，看是否有足够的精度与准确度，必要时要修改模型。在检验模型时必需在不同条件下，在所需要的各种参数范围内进行全面的检验，防止得出片面的结论。

在工程上，分析或设计一个系统（如控制系统）时，我们需要有一个对各种系统性能进行比较的基础，这种基础可以通过下述方法来实现，就是预先规定一些特殊的输入信号，然后比较各种系统对这些输入信号的响应。这些特殊的、专门的输入信号要求简单方便，便于理论分析，同时又与系统在实际工作中碰到的工作信号相类似，或存在着一定的关系。通常使用的输入信号有周期的与非周期的两种。周期信号最常用的是正弦信号，系统在不同的频率（相同的幅值）的正弦信号输入下，研究在稳态时其输出特性，这种方法称频域法。非周期信号通常使用的有脉冲、方波、阶跃、斜坡等。在这些非周期信号输入下研究系统的瞬态

响应特性的方法称时域法。由于采用了统一的标准输入信号，我们就有可能确定系统在这些标准信号输入下，衡量系统性能的指标。事实上，这些标准信号通常亦是辨识系统的输入信号。下面两节将简要说明上述的频域法及时域法的基本理论以及对系统进行辨识的方法。

三、系统辨识与参数估计

1. 定义

关于“系统辨识”早在1962年扎德（Zadeh）就提出了如下的定义：

“根据对已知输入量的输出响应的观测，在指定一类系统的范围内，确定一个与被辨识系统等价的系统”。根据这个定义，在系统辨识过程中，我们必须确定三方面的问题：第一必须指定一类系统，这就是说，根据我们事先掌握的关于被识系统的知识，必须先确定被识系统属于哪一类系统，即什么样的结构，如是静态的还是动态的；线性的还是非线性的；参数是定常的还是时变的；是确定的还是随机的；采用时域表示还是频域表示等等。显然这是系统辨识关键性的问题，若确定错了，往往使系统辨识不可能成功。第二必须规定一类输入信号。辨识是在某一特定输入信号下进行的。通常的输入信号有正弦、阶跃、脉冲、白色噪声、伪随机信号等。第三必须规定等价的含义。对于两个系统，仅仅当对于所有可能的输入值，它们的输入—输出信号特性完全相同时，这两个系统才是等价的。

2. 建模步骤

用系统辨识的方法进行建模的步骤可由图1-1说明。

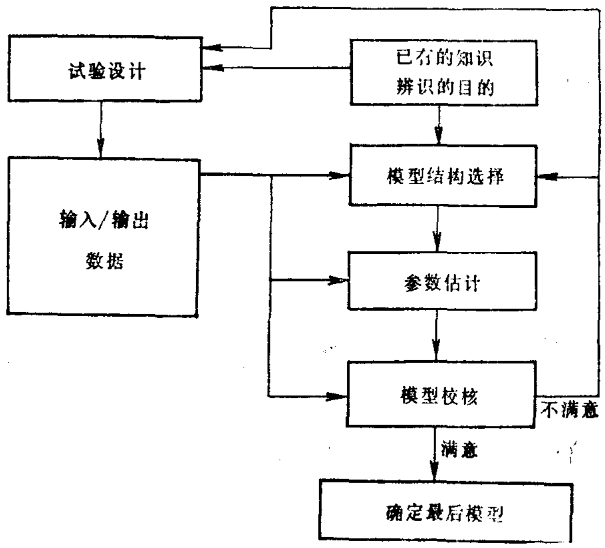

图1-1 建模步骤框图

（1）明确辨识的目的和验前知识　在不同的场合下，系统辨识的目的是不同的。例如辨识所得到的模型可以应用于研究、分析系统的性质，也可以应用于系统的状态预测及设计最佳的控制策略等。由于辨识目的不同，辨识所采用的模型形式及辨识精度要求等亦就不同。

事先对被识系统的了解程度，对该系统的辨识有很大影响。当对被识对象一无所知时，则此对象称为“黑箱”。在有些场合为了获得足够的验前“先验”知识，要进行一些预备性试验，通过这些试验能够提供如：系统中主要的时间常数；允许输入幅度；是否存在非线性；参数是否随时间变化；系统中的噪声水平；时延现象等。

（2）实验的设计　在这里上述第一点对辨识实验设计起着重大作用。设计包括：变量的选择；采用何种输入信号，包括信号大小等；采用正常运行信号还是附加试验信号；采样速率（时间间隔大小）；辨识允许时间及确定测量仪器装置等。

（3）模型结构的确定（前已说明）

（4）参数估计　参数估计或参数辨识乃是在被识对象的模型结构已知情况下，用实验方法来确定对动态特性有影响的各个参数数值。参数估计常是系统辨识中最主要的部分。

"参数"与"信号"不同，参数是与自变量（如输入信号）无依赖关系的，它是用以表达信号之间关系的物理量。在机械系统中常须估计的参数如微分方程的系数；系统的自然频率ω_n；相对阻尼系数ξ；频带宽度等等。除了参数估计外，有时还须进行状态估计。

（5）模型的校核　模型求出后要进行校验。任何数学模型的有效性，正确性只能通过实验来回答。应该将求得的模型所代表的系统性能与真实系统实验结果进行比较，如果相差过大必须修正模型。

3. 分类

系统辨识方法可按下列不同原则进行分类：

1）被识对象的数学模型采用怎样的类型：如有集中参数及分布参数；连续时间与离散时间；确定性与随机性；线性与非线性；参数与非参数模型。

2）采用什么类别和型式的输入信号：如正弦、阶跃、脉冲、白噪声、伪随机等信号。

3）采用什么样的辨识方法：如相关法、最大似然法、广义最小二乘法、Levy法等。

在本章中将介绍在时域及频域中对系统辨识的一般方法，这些方法都是以古典控制理论作为理论基础的。以最小二乘法、统计数学、时间序列、谱分析等作为理论基础而发展起来的系统辨识方法，将在后面有关章节中介绍。

§1-2　动态系统的数学表达式

要对动态系统进行辨识，选择合适的数学模型是很重要的。用作系统辨识的数学模型，应该使被辨识的参数尽量少，计算工作量尽可能小，同时数学模型本身简单、使用方便。用作系统辨识的数学模型有连续型，如通常的微分方程；离散型，如差分方程；时域型，如微分方程；频域型，如通常的传递函数。作为系统辨识最常用的数学模型，在时域型中，有脉冲响应函数、线性差分方程、状态变量方程等。这些方程各有特点，但它们都是可以相互转换的。因为通常系统辨识都在数字计算机上进行运算，因此离散型数学模型用得最为广泛。下面将对几种常用的数学模型作一些介绍。

一、微分方程与传递函数

在古典控制理论中，微分方程式是用来描述系统动态过程的一种重要数学表达式。设输入量为$u(t)$，输出量为$y(t)$，一个线性连续系统微分方程的一般形式可写成

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y$$
$$=b_0\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+b_1\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\cdots+b_{n-1}u \qquad (1\text{-}1)$$

若令$p=\dfrac{d}{dt}$称为微分算子，则上式可改写成

$$a_0p^ny+a_1p^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}py+a_ny$$
$$=b_0p^{n-1}u+b_1p^{n-2}u+\cdots+b_{n-1}u$$
$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)y$$
$$=(b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots+b_{n-1})u$$

上式可写成

$$\frac{y(t)}{u(t)}=\frac{b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots+b_{n-1}}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n} \tag{1-2}$$

当系数a_0，a_1，$\cdots a_n$，b_0，b_1，$\cdots b_{n-1}$均为常数，则称为线性定常（时不变）系统，若他们是时间t的函数，则为线性时变系统。

设初始值为零，将式（1-2）中p用s代替，则得传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^{n-1}+b_1s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}=G(s) \tag{1-3}$$

所以传递函数是输出量与输入量的拉氏变换之比。

式（1-3）可分解为如下形式

$$G(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\cdots(s-z_{n-1})}{(s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)\cdots(s-r_n)} \tag{1-4}$$

令上式分母部分等于零，就是系统的特征方程式，其根r_1，r_2，r_3，$\cdots$，r_n为$G(s)$的极点。$G(s)$的分子部分的根z_1，z_2，$\cdots$，z_{n-1}称为零点。这些极点与零点的形式（是复数还是实数）及数值就决定了系统的动态特性。

二、脉冲响应函数

单位脉冲响应函数也称权函数，简称脉冲响应函数。

为了说明脉冲响应函数，首先扼要说明一下关于“δ函数”及“卷积”的概念。

所谓δ函数就是单位脉冲函数，它是这样一个函数，当$t=0$时，$\delta(t)$为无穷大，当$t\neq0$时，$\delta(t)$的值全为零，而且$\delta(t)$的面积等于1，即$\delta(t)$的定义为：

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1-5}$$

通常脉冲函数的大小以其面积来衡量。$\delta(t-\tau)$表示将$\delta(t)$函数平移一个τ的时间（见图1-2a）。

下面进行脉冲响应函数的讨论：

根据控制理论，输入与输出的拉氏变换$U(s)$与$Y(s)$之比，定义为系统的传递函数，即

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

或
$$Y(s)=G(s)U(s)$$

由积分变换原理可知，两个函数卷积的拉氏变换为

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=F_1(s)F_2(s) \tag{1-6}$$

根据式（1-6），系统输入与输出的时域关系为

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-7}$$

式中
$$g(t)=u(t)=0 \qquad (t<0)$$

现在输入$u(t)$若为单位脉冲，系统的输出$y(t)$称为系统的单位脉冲响应，根据δ函数

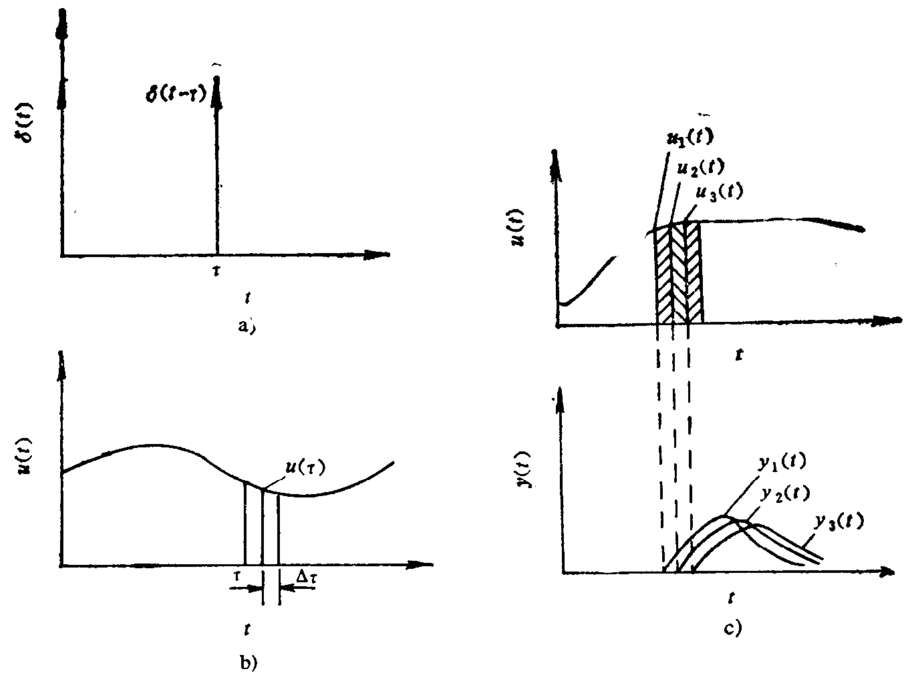

图1-2　δ-函数与脉冲响应曲线

a）δ函数　b）脉冲响应曲线　c）任意输入的响应曲线

的性质，可知有$y(t)=g(t)$，$g(t)$就称为系统的脉冲响应函数。若以$h(t)$表示单位脉冲响应函数，则有

$$y(t)=g(t)=h(t)$$
$$Y(s)=G(s)=H(s) \tag{1-8}$$

当输入$u(t)$实际上为一任意连续函数形式的时间函数（图1-2 b）时，可将它分解成许多个脉冲之和。对于线性对象来讲，输出量$y(t)$应当是全部$\tau<t$的反应函数之和，即积分（图1-2 c），则

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-9}$$

考虑到$h(t-\tau)=0$　（$\tau>t$时），上式可改写成

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-10}$$

这个公式称为$u(t)$与$h(t)$的卷积。由此可见，若知道单位脉冲响应函数$h(t)$，就可以对任何的输入量$u(t)$求得输出量$y(t)$。可见$h(t)$可以用来完全描述线性系统的动态特性。

式（1-10）的离散型为

$$y(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} h(k-i)u(i)T \tag{1-11}$$

式中k为整时间变数，$(k-i)$实际上是$(kT-iT)$，其中T为时间间隔。$y(k)$及$h(k-i)$则分别表示在kT及$(kT-iT)$时刻y及h的值。关于离散系统的概念，在本节三

中将有说明。设当 $t > pT$后，脉冲响应函数已小到可略去不计，因此上式可简化为

$$y(k)=\sum_{i=k-p}^{k} h(k-i)u(i) \tag{1-12}$$

脉冲响应函数可表示为

$$\{h(i)\},\quad i=0,1,2,3,\cdots$$

在多输入输出的多变量系统中(见图1-3)，脉冲响应函数 $h(k)$ 应是脉冲响应函数矩阵 $\boldsymbol{H}(k)$，即

$$\boldsymbol{H}(k)=\begin{bmatrix} h_{11}(k)\cdots h_{1m}(k) \\ \vdots \\ h_{r1}(k)\cdots h_{rm}(k) \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

上式表示有 m 个输入和 r 个输出的脉冲响应函数矩阵。

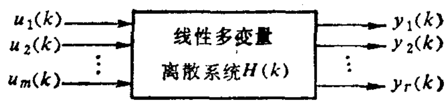

图1-3　多变量系统框图

每一元素 $h_{ij}(k)$ 表示第 j 个输入与第 i 个输出间的脉冲响应函数。多变量系统中，输入与输出之间的关系可表示为与式 (1-11) 类似的形式，即

$$\boldsymbol{Y}(k)=\sum_{i=-\infty}^{k} \boldsymbol{H}(k-i)\boldsymbol{U}(i) \tag{1-14}$$

图 1-4 表示多变量系统中，系统脉冲响应函数及系统输入、输出之间的关系。图中输入、输出变量数均为 3 个。

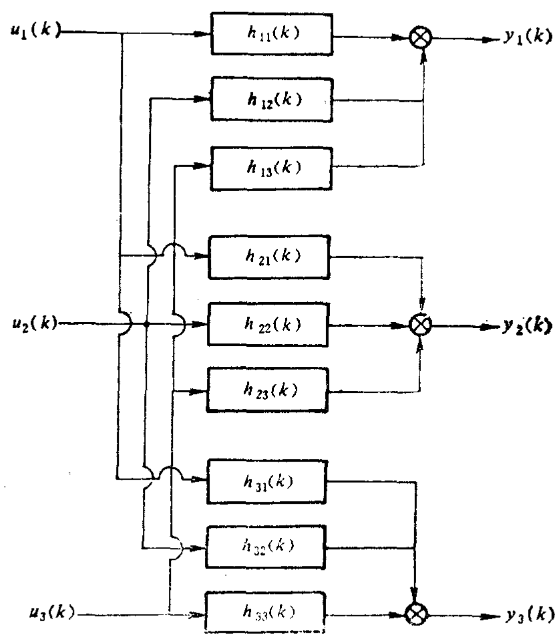

图1-4　多变量系统输入、输出关系框图

三、线性差分方程

在连续系统中，系统的动态特性可用微分方程描述。而在离散系统中，系统的动态特性则可用差分方程描述。

离散系统又称采样数据系统，在这种系统中，输入、输出变量仅在离散的瞬时上变化。该瞬时通常用kT 或 t_k ($k=0,1,2,\cdots$) 表示。离散系统与连续系统的区别就在于离散系统中的信号是采样数据形式。

在实际中，当对系统中输入、输出变量的测量是以间断方式进行时，连续系统也可看作为离散系统，并用差分方程来描述系统的动态特性。我们后面讨论的辨识方法，大多数是属于这种情况的。因此离散系统或采样数据系统是在辨识中碰到最多的，差分方程也是我们用来辨识系统的最常用的数学模型。

首先说明确定性单变量定常线性离散系统的差分方程表示法。我们知道，差分方程 n 阶形式可以写成

$$y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)$$
$$=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)$$

或

$$y(k)+\sum_{j=1}^{n} a_j y(k-j)=\sum_{j=0}^{n} b_j u(k-j) \tag{1-15}$$

式中k，$k-1$，…，$k-n$代表时间序列，他们实际上是kT，$kT-T$，…，$kT-nT$的简写，而这里T代表时间间隔。a_j和b_j为常系数，通常是辨识中待定的未知数。差分方程的写法较多，例如它也可写成如下形式

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\cdots+a_n y(k)$$
$$=b_0 u(k+n)+b_1 u(k+n-1)+\cdots+b_n u(k)$$

如果我们引入移位算子q，即

$$q^{-1} y(k)=y(k-1)$$
$$q^{-2} y(k)=y(k-2)$$
$$\vdots$$

并引入多项式
$$A(q^{-1})=1+a_1 q^{-1}+a_2 q^{-2}+\cdots+a_n q^{-n}$$
$$B(q^{-1})=b_0+b_1 q^{-1}+b_2 q^{-2}+\cdots+b_n q^{-n}$$

方程式（1-15）可写成如下形式

$$A(q^{-1}) y(k)=B(q^{-1}) u(k) \tag{1-16}$$

对式（1-15）取Z变换，可求得离散系统的传递函数为

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_n z^{-n}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_n z^{-n}}=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=H(z) \tag{1-17}$$

当输入、输出之初始值为零时，z^{-1}与q^{-1}是等价的。

由于在对实际系统进行辨识测量时，常有随机性噪声干扰，因而产生测量噪声误差。此外，模型本身也有误差，所以辨识带有随机误差。因此，式（1-16）应改写成如下形式

$$A(q^{-1}) y(k)=B(q^{-1}) u(k)+\epsilon(k) \tag{1-18}$$

对多输入输出系统，要用矢量（向量）差分方程，这时$u(k)$、$y(k)$应以矢量$\boldsymbol{U}(k)$及$\boldsymbol{Y}(k)$来表示，系数a_j、b_j应换成$\boldsymbol{A}_j$及$\boldsymbol{B}_j$矩阵。若考虑m个输入和r个输出的系统，则

$$\boldsymbol{U}(k)=\begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Y}(k)=\begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix}$$

矢量差分方程为

$$\boldsymbol{Y}(k)+\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Y}(k-j)=\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{U}(k-j) \tag{1-19}$$

式中$\boldsymbol{A}_j$和$\boldsymbol{B}_j$分别是$r\times r$维，$r\times m$维常系数矩阵。方程（1-19）也可写成如下形式

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{Y}(k)=\boldsymbol{B}(q^{-1})\boldsymbol{U}(k) \tag{1-20}$$

式中

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_1 q^{-1}+\cdots+\boldsymbol{A}_n q^{-n}$$
$$\boldsymbol{B}(q^{-1})=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1 q^{-1}+\cdots+\boldsymbol{B}_n q^{-n}$$

四、状态变量方程

上述微分方程、传递函数等只能描述系统输入和输出的关系，称为外部模型；要描述系

统内部的联系，可用状态方程。状态方程有很多优点，它也是系统辨识中常用的重要数学模型。连续型单输入输出的状态方程，可由一般微分方程转换而得。设微分方程为

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y=b_{n-1}u(t) \tag{1-21}$$

引入 n 个内部状态变量 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots x_n(t)$

令

$$x_1(t)=y(t)$$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\frac{dy}{dt}$$

$$x_3(t)=\dot{x}_2(t)=\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\vdots$$

$$x_n(t)=\dot{x}_{n-1}(t)=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$

则式（1-21）可写成

$$\dot{x}_n=-a_n x_1-\cdots-a_1 x_n+b_{n-1}u$$

写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}u \tag{1-22}$$

式中

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\cdots&0\\0&0&1&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}\cdots&-a_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

输出方程变为

$$\boldsymbol{Y}=[1\quad 0\cdots0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX} \tag{1-23}$$

式中

$$\boldsymbol{C}=[1\quad 0\cdots0]$$

离散系统也可用下面一组状态方程来描述

$$\begin{aligned}x(k+1)&=\boldsymbol{\Phi X}(k)+\boldsymbol{\Gamma}u(k)\\y(k)&=\boldsymbol{GX}(k)+\boldsymbol{D}u(k)\end{aligned} \tag{1-24}$$

式中$\boldsymbol{X}(k)$为$n\times1$状态变量，$\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{\Gamma}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{D}$分别是$m\times n$、$n\times1$、$1\times n$、1×1维参数矩阵。式（1-24）可用图1-5来表示。

在这里我们假定状态变量系统是能控的和能观测的，即$\boldsymbol{\Phi}$、$\boldsymbol{G}$是能观的，$\boldsymbol{\Gamma}$、$\boldsymbol{D}$是能控的。上式与差分方程及脉冲响应函数是可以互相转换的。下面给出式（1-24）与差分方程式（1-15）的关系。

这时

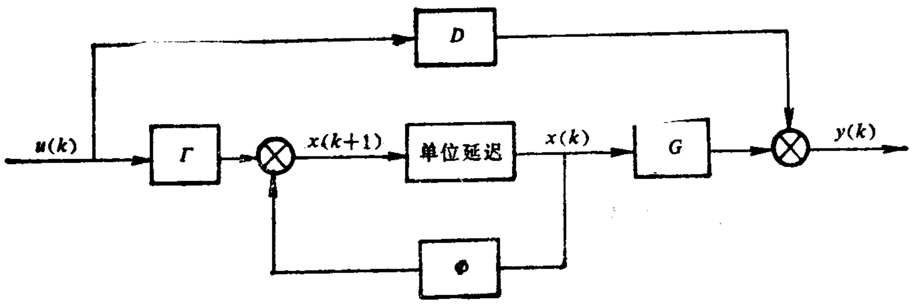

图1-5 离散系统状态传递框图

$$X(k)=\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix},\quad \Phi=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

$$G=[1\quad 0\cdots 0\quad 0]$$

因此，式（1-24）中各矩阵式均可由差分方程系数来表达。

而且

$$\gamma_0=b_0$$
$$\gamma_1=b_1-a_1\gamma_0$$
$$\gamma_2=b_2-a_1\gamma_1-a_2\gamma_0$$
$$\vdots$$
$$\gamma_n=b_n-a_1\gamma_{n-1}-\cdots-a_{n-1}\gamma_1-a_n\gamma_0$$
$$D=\gamma_0=b_0$$

式（1-24）是状态方程通式。这种一般通式在辨识时要确定 n^2+2n+1 个参数，而差分方程〔见式（1-15）〕只要确定 $2n+1$ 个系数，所以状态方程不很实用。下面我们来介绍一种用线性变换将式（1-24）转换成所谓标准型（规范型）的方法，后面我们将看到这种标准型就具有最小待定参数的优点。

把式（1-24）中 $X(k)$ 变换成下面一个新的状态矢量，即

$$X^*(k)=TX(k) \tag{1-25}$$

式中 T 是一个变换矩阵，它的组成为

$$T=[G\quad G\Phi\cdots G\Phi^{n-1}]^T \tag{1-26}$$

于是式（1-24）就转换成一个新的状态方程，即

$$x^*(k+1)=\Phi^*(k)X^*(k)+\Gamma^*u(k)$$
$$x(k)=G^*X^*(k)+Du(k) \tag{1-27}$$

式中

$$\Phi^*=\left[\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \vdots & & I \\ 0 & & \\ \hline -\Phi_n^* & -\Phi_{n-1}^*\cdots & -\Phi_1^* \end{array}\right]$$