数学物理丛书

# 一般相对性量子场论

（一）

李国平　郭友中　著

湖北人民出版社

数学物理丛书

# 一般相对性量子场论

(一)

[illegible]人民出版社

数学物理丛书

一般相对性量子场论

（一）

李国平 郭友中著

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 2.375印张 49,000字

1980年3月第1版 1980年3月第1次印刷

印数：1—3,200

统一书号：13106·41 定价：0.39元

# 序

本书初稿完成于1960年前后，现又重新进行了整理和删节，分成三个分册.

第一分册本来是一篇长文，1963年曾在中国科学院数学计算技术研究所的一次成果展览会上展出. 文中提出了纤维丛积分的概念，证明了纤维丛积分的存在性，建立了特殊(相对性)向一般(相对性)的转化原则，指出了它在微分方程理论中的应用，和第二分册一样，目的是为第三分册作工具准备，除写入Lichnerowicz的结果外，现在，基本上以当时的原稿发表，自成一个分册.

第二分册是第一分册的不同观点的补充和继续. 为了保持各分册的相对独立性，某些章节在内容上略有交叉.

第三分册介绍根据内外运动的矛盾提出的新的基本粒子模型及对粒子的产生、消失和相互作用的研究.

基本粒子理论正在不断发展，这一领域的研究工作一直非常活跃，已经积累了大量的试验成果和理论文献，涉及的范围很广，本书介绍的，只是某些数学物理方法中著者工作过的部分. 限于思想和业务水平，谬误不当之处，敬希读者指正.

著者

1978年元月

# 目　录

# §1 前　言

书中提出纤维丛积分的主要目的是提供特殊相对论性结果向一般相对论性结果的转化原则，免除逐一推广时繁琐的重复论证；后来成为我们在1963年提出的，外运动用一般相对性量子场论描述，内运动用特殊相对性量子场论描述的微粒子理论[4]的重要数学工具.

为了便于比照文献中有关特殊相对论性的工作，空间位标取为三个有序实数，时间位标取为一个纯虚数，合成四个有序数的一般相对性时空($\mathfrak{T}$).

# §2 流 形 $V(4)$

这里$V(4)$表示4维$C^\infty$级定向流形，符号$E(4)$为4维Euclid空间，即给定次序排列的实数列$z\equiv(z^0, z^1, z^2, z^3)$所表示的点集和以平常方法赋予的距离$\rho$. $E_\rho$表示$E(4)$中以原点$0\equiv(0, 0, 0, 0)$为中心的正方形

$$E_\rho: |z^i|<\rho \quad (i=0, 1, 2, 3).$$

根据流形的定义，$V(4)$有开复盖$\{V_j\}$, $j\in J$, $J$是指标集. 设存在拓扑变换

$$\Psi_j: E_{\rho_j}\to V_j \quad (j\in J),$$

使$x(j)\in V_j$致

$$\overset{-1}{\Psi}_j(x(j))=0.$$

对于任一点$x\in V_j$,

$$\overset{-1}{\Psi}_j(x)=(z_x^\alpha(x(j)\,|\,V_j))$$
$$\equiv z_x(x(j)\,|\,V_j)\quad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

称为由 $(V_j,\ \Psi_j)$ 决定的点 $x$ 的**局部位标**. 位标 $(z_x^\alpha)$ 写成 $(z_x^\alpha(x(j)\,|\,V_j))$ 的形式是为了强调这一局部数值位标架 $E_{\rho_j}$ 可以看作以 $x(j)$ 为原点，以 $V_j$ 为位标邻域的数值位标架的特点. 依此位标架, $x\in V_j$ 以

$$z_x^\alpha\equiv z_x^\alpha(x(j)\,|\,V_j)\quad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

为位标.

为了定向，当 $x\in V_i\cap V_j$ 时，我们认为位标变换

$$(z_x^\alpha(x(j)\,|\,V_j))=\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i(z_x(x(i)\,|\,V_i))\tag{2.1}$$

为 $C^\infty$ 级变换，它的函数行列式

$$D_{ji}(x)\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^0} & \cdots & \dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^3}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^0} & \cdots & \dfrac{\partial(\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i)}{\partial z^3}\end{vmatrix}>0.$$

此时，位标架 $E_{\rho_j}$ 与 $E_{\rho_i}$ 称为**同向的**. 于是 $\{E_{\rho_j}\}(j\in J)$ 构成同向的 $C^\infty$ 级位标系 $S$. 对于这样的位标系给予一个定向标量 $\rho(S)=+1$ 表示 $S$ 是取正向的，记作

$$S\equiv S(V(4)=\bigcup_{j\in J}V_j\,|\,\Psi_j(E_{\rho_j})=V_j\,|\,D_{ji}(x)>0,\ x\in V_i\cap V_j),$$
$$\rho(S)=+1.\tag{2.2}$$

对于另一位标系

$$S'\equiv S'(V(4)=\bigcup_{j\in J'}V'_j\,|\,\Psi'_j(E'_{\rho_j})$$
$$=V'_j\,|\,D'_{ji}(x)>0,\ x\in V'_i\cap V'_j),$$
$$\rho(S')=+1,$$

如果 $x\in V'_j\cap V_i$,

$$z'^{\alpha}_{x}(x'(j)\,|\,V'_j)=\overset{-1}{\Psi'_j}\Psi_i(z_x(x(i)\,|\,V_i))$$

的函数行列式

$$D^*_{ji}>0,$$

则称 $S'$ 与 $S$ 同向; 如果.

$$D^*_{ji}<0,$$

则称 $S'$ 与 $S$ 异向.

同向位标系可以合成新的同向位标系，异向位标系不能合成一个定向位标系.

## §3 V(4)位标变换

对于任一 $x\in V(4)$，必只少有一 $V_j$，使 $x\in V_j$ 以 $(z^{\alpha}_x(x(j)\,|V_j))$ 为对 $E_{\rho_j}$ 的位标. 在 $E_{\rho_j}$ 内取以 $(z^{\alpha}_x(x(j)\,|V_j))$ 为中心的正方形 $E_{\rho_x}$，则 $\Psi_j(E_{\rho_x})\equiv V_x(j)$ 亦为 $x$ 的邻域. 取 $x'\in V_x(j)$，直迁 $E_{\rho_x}$ 的中心至 $E_{\rho_j}$ 的中心，得 $E_x(j)$，则可以 $E_x(j)$ 为相应于 $E_x(j)$ 的局部位标架. 即以

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(j))\equiv z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j)-z^{\alpha}_{x}(x(j)\,|V_j)$$

为 $x'$ 对位标架 $E_x(j)$ 的局部位标. $z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(j))$ 对 $z^{\alpha}_{x'}(x(j)\,|V_j)$ 的变换的函数行列式为 $+1$.

如果 $x\in V_i\cap V_j$，则可取 $E_x(k)$ 为局部位标架，$k=i$ 或 $j$; 取 $V_x(k)$ 为相应的位标邻域; 取

$$z^{\alpha}_{x'}(x|V_x(k))\equiv z^{\alpha}_{x'}(x(k)\,|V_k)-z^{\alpha}_{x}(x(k)\,|V_k)$$

为 $x'$ 对局部位标架 $E_x(k)$ 的位标. 这一变换的行列式仍为 $+1$.

设 $x'\in V_x(i)\cap V_x(j)$，以

$$z_{x'}^{\alpha}(x(i)|V_i)=z_{x'}^{\alpha}(x|V_x(i))+z_x^{\alpha}(x(i)|V_i),$$
$$z_{x'}^{\alpha}(x(j)|V_j)=z_{x'}^{\alpha}(x|V_x(j))+z_x^{\alpha}(x(j)|V_j)$$

代入式(2.1)(其中 $x$ 以 $x'$ 代替),得 $C^{\infty}$ 级位标变换:

$$\begin{aligned} z_{x'}^{\alpha}(x|V_x(j)) = f_{ji}[&(z_{x'}^{\alpha}(x|V_x(i))) \\ &+(z_x^{\alpha}(x(i)|V_i))]-z_x^{\alpha}(x(j)|V_j), \end{aligned}$$

式中 $f_{ji}\equiv\overset{-1}{\Psi}_j\Psi_i$. 这一变换的函数行列式等于在 $D_{ji}(x')$ 中以

$$z_{x'}^{\alpha}(x|V_i(i))+z_x^{\alpha}(x(i)|V_i)$$

代替 $z_{x'}^{\alpha}(x(i)|V_i)$的结果,其值当亦为正.

因此, $V(4)$ 的每一点 $x$ 可以有若干个位标邻域 $V_x(i)$, $V_x(j)$, …等; 相应的以 $x$ 为原点的位标架为 $E_x(i)$, $E_x(j)$, …等. 这些局部位标架的全体合成一个**位标系** $\check{S}$. 注意, 当 $x''\in V_x(j)\cap V_{x'}(i)$时, $x''$ 对 $E_x(j)$及对 $E_{x'}(i)$的位标间的变换仍然是 $C^{\infty}$ 级的,其函数行列式亦仍为正.

位标系 $\check{S}$ 与 $S$ 同向, 即 $\rho(\check{S})=\rho(S)=+1$. 有时, 为了简便起见, $\check{S}$ 中同以 $x$ 为原点的位标邻域 $V_x(i)$, $V_x(j)$, …, 以及相位的位标架 $E_i(x)$, $E_x(j)$, …, 不再标注指标, 而取其代表 $V_x$ 及 $E_x$.

将位标系 $\check{S}$ 表写为

$$\begin{aligned} \check{S}\equiv\check{S}(V(4)=\bigcup_{x\in V(4)}V_x|\phi_x(E_x) \\ =V_x|D_{xx'}(x'')>0,\ x''\in V_x\cap V_{x'}), \\ \rho(\check{S})=+1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

式中 $D_{xx'}(x'')$为 $x''$ 对 $E_x$, $E_{x'}$ 的 $C^{\infty}$ 级位标变换.

$$z_{x''}^{\alpha}(x|V_x)=\overset{-1}{\phi}_x\phi_{x'}(z_{x''}(x'|V_{x'}))$$

的函数行列式.

位标系 $\check{S}$ 称为由位标系 $S$ 引出的同向位标系,上标“$\vee$”

就是为了说明这种关系的.

必须注意:上述位标系仍然是数值位标系,没有添加其它几何意义.

## §4 Minkowski 空间 $\mathscr{M}(4)$

$z^\alpha$ 为实数, $i\equiv\sqrt{-1}$, 考虑 $4\times1$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} z^0 i \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

组成的线性空间 $\Sigma$. 空间 $\Sigma$ 的 0 元为

$$\mathbf{0}\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

以下列四个线性无关元(点或向量)

$$\boldsymbol{e}_0\equiv\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_1\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3\equiv\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

为基,黑体字按向量运算(下同),得

$$\boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{e}_\beta=\eta_{\alpha\beta}, \tag{4.3}$$

这里

$$\eta_{\alpha\beta}\equiv\begin{cases} 0, & \alpha\neq\beta; \\ +1, & \alpha=\beta\neq0; \\ -1, & \alpha=\beta=0. \end{cases} \tag{4.4}$$

除非另有说明，我们约定：同一上下标在一项中重复出现时，对该项须按重复出现的指标求和，希腊指标取值 0, 1, 2, 3，拉丁指标取值 1, 2, 3, 4. 这样一来，空间 $\Sigma$ 的任一点 $z$ 可以写成

$$z=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},$$

$(z^{\alpha})$ 称为 $z$ 对位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha})$ 的位标. 上标 $\alpha=0$ 的位标称为**时间位标**，上标 $\alpha=1, 2, 3$ 的位标称为**空间位标**. $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 表示以空间 $\Sigma$ 的 0 元(原点)为始点，以 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 的代表矩阵为终点的向量. 我们知道，所谓向量的分量是指终点与始点的代表矩阵的差矩阵的元. 因此，以 $h\equiv h^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 为始点，以 $(1+h^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 为终点的向量记作 $\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)$，则 $\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)$ 与 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 具有相同的分量，所以

$$\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)\boldsymbol{e}_{\beta}(h)=\eta_{\alpha\beta}.$$

$\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)$ 称为向量 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 自原点至 $h$ 的**直迁**(**平移**). 因此，$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$ 是位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha})$ 的直迁，前者以 $h$ 为原点，后者以 0 点为原点. 空间 $\Sigma$ 的点对位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$ 的位标为 $z$，则同一点对位标架 $(\boldsymbol{e}_{\alpha})$ 的位标为 $(h^{\alpha}+z^{\alpha})$. 由

$$z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)=(h^{\alpha}+z^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha}=h+z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},$$

及

$$z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)-h^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)-h$$

可见，空间 $\Sigma$ 的点 $z$ 可表为

$$z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},\ z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h)-h$$

两种基本形式.

存在非异实数元 $4\times4$ 矩阵群 $L(4)$，使当

$$A\equiv[A_{\alpha}^{\beta}]\in L(4)$$

时，

$$(A_{\alpha}^{\gamma}\boldsymbol{e}_{\gamma})(A_{\beta}^{\delta}\boldsymbol{e}_{\delta})\equiv\eta_{\alpha\beta}, \tag{4.5}$$

或

$$(A_{\alpha}^{\gamma}\boldsymbol{e}_{\gamma}(h))(A_{\beta}^{\delta}\boldsymbol{e}_{\delta}(h))=\eta_{\alpha\beta}, \tag{4.5}^*$$

的充要条件是:

$$A_{\alpha}^{\gamma}A_{\beta}^{\delta}\eta_{\gamma\delta}=\eta_{\alpha\beta}. \tag{4.6}$$

这里 $A_{\alpha}^{\beta}$ 表示矩阵 $A$ 的第 $\alpha$ 行 $\beta$ 列的元. 由此可见, $L(4)$是含 6 个独立参数的一个旋转群.

直迁 $\{h\}$ 成一平移群,记作 $H(4)$.

$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$经 $A\in L(4)$变为 $(\boldsymbol{e}'_{\alpha'})\equiv(A_{\alpha'}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha})$ 时, $(z^{\alpha})$ 经 $\overset{-1}{A}$ 变为 $(z'^{\alpha'})\equiv(\overset{-1}{A}{}_{\alpha}^{\alpha'}z^{\alpha})$, 所以

$$z'^{\alpha'}\boldsymbol{e}'_{\alpha'}=z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha};$$

与此同时,$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$经 $A$ 变为$(\boldsymbol{e}'_{\alpha'}(h))\equiv(A_{\alpha'}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$, 这是平移$(\boldsymbol{e}_{\alpha})$至$(\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))$后再经 $A$ 变换的结果,亦即将$(\boldsymbol{e}'_{\alpha'})$平移 $h$ 的结果. 所以

$$(A_{\alpha'}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}(h))=(A_{\alpha'}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha})(h).$$

$L(4)$与 $H(4)$的直积记作 $\mathscr{L}(4)$:

$$\mathscr{L}(4)\equiv L(4)*H(4).$$

空间 $\Sigma$ 中任意两点

$$z\equiv z^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha},\ z'\equiv z'^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$$

的 **Minkowski** 形式:

$$\begin{aligned}&((z^{\alpha}-z'^{\alpha})\boldsymbol{e}_{\alpha})((z^{\beta}-z'^{\beta})\boldsymbol{e}_{\beta})\\&=\eta_{\alpha\beta}(z^{\alpha}-z'^{\alpha})(z^{\beta}-z'^{\beta}),\end{aligned} \tag{4.7}$$

在 $\mathscr{L}(4)$ 的群元作用下是不变的. 所以 $\Sigma$ 是 Minkowski 空间,光速 $c$ 作为 $+1$.

称 $\mathscr{L}(4)$ 为广意 **Lorentz** 群, $L(4)$ 为齐次 **Lorentz** 群以及 $H(4)$为平移 **Lorentz** 群.

设 $A\in L(4)$，由式(4.5)，有

$$(\det A)^2=1;\tag{4.8}$$

对 $\alpha=\beta=0$，有

$$(A_0^\gamma e_\gamma)(A_0^\delta e_\delta)=\sum_{i=1}^{3}(A_0^i)^2-(A_0^0)^2=\eta_{00}=-1,$$

即

$$(A_0^0)^2\geqslant 1.\tag{4.9}$$

由式(4.8)，两个矩阵行列式异号的 $L(4)$ 的元不可能任意接近，它们属于不同的类型；由式(4.9)，两个 $A_0^0$ 异号的 $L(4)$ 的元亦属于不同的类型．因此，$L(4)$ 由四个不相关的部分组成，用上标表示矩阵行列式的符号，下标表示 $A_0^0$ 的符号，则可列表如下：

$$L(4)\begin{cases}L^+(4)\begin{cases}L_+^+(4);\\ L_-^+(4);\end{cases}\\ L^-(4)\begin{cases}L_+^-(4);\\ L_-^-(4).\end{cases}\end{cases}$$

与恒等变换连续相关的部分，称为**连续 Lorentz 群**，即

$$L_+^+(4)\equiv\{A\,|\det A=+1,\ A_0^0>+1,\ A\in L(4)\};$$

空间的对称变换 $S_s$ 与 $L_+^+(4)$ 的积所产生的部分，称为**正时 Lorentz 群**，即

$$L_+^-(4)\equiv\{A\,|\det A=-1,\ A_0^0>+1,\ A\in L(4)\};$$

时间的对称 $S_t$ 变换与 $L_+^+(4)$ 的积所产生的部分，称为**正空 Lorentz 群**，即

$$L_-^-(4)\equiv\{A\,|\det A=-1,\ A_0^0<-1,\ A\in L(4)\};$$

时空的对称变换 $S_{st}$ 与 $L_+^+(4)$ 的积所产生的部分，称为**幺模 Lorentz 群**，即

$$L_-^+(4)\equiv\{A\,|\det A=+1,\ A_0^0<-1,\ A\in L(4)\}.$$

位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 称为以 0 为原点的 **Lorentz 位标架或正规正交位标架**,空间 $\Sigma$ 称为 **Minkowski** 空间, 简记作 $\mathscr{M}(4)$.

注意,当 $z=z^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$ 经平移 $h$ 变为 $z+h$ 时,

$$z+h=(z^\alpha+h^\alpha)\boldsymbol{e}_\alpha=z^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha(h),$$

对于位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$, 位标 $(z^\alpha)$ 不变, 位标架平移了 $h$. 当 $(z^\alpha)$经 $A\in L(4)$变为$(A_\alpha^{\alpha'}z^\alpha)$时,得另一点

$$A_\alpha^{\alpha'}z^\alpha\boldsymbol{e}_{\alpha'}=z^\alpha(A_\alpha^{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha'}),$$

这一点对位标架$(A_\alpha^{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha'})$的位标仍为$(z^\alpha)$. 由此可见, 固定位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha)$,将一点

$$z\equiv z^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$$

的位标$(z^\alpha)$依 $l\in\mathscr{L}(4)$变为另一点的位标$(z'^{\alpha'})\equiv l(z^\alpha)$,

$$z'\equiv z'^{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha'},$$

对变换后的位标架$l(\boldsymbol{e}_\alpha)$的位标则仍为$(z^\alpha)$,即同一点.

任给空间 $\mathscr{M}(4)$ 的一点 $h$, 将位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha)$ 的原点平移 $h\equiv h^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$ 成位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$的原点, 它对位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$的位标为 0. 于是, 全体位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$, $h\in H(4)$ 可以表现空间 $\mathscr{M}(4)$, 而有表现式:

$$\mathscr{M}(4)\equiv\bigcup_{h\in H(4)}h(\boldsymbol{e}_\alpha)=\bigcup_{h\in H(4)}\boldsymbol{e}_\alpha(h). \qquad (4.10)$$

其次, 给出空间 $\mathscr{M}(4)$ 的任一非 0 元 $z_0\neq 0$, 即它对位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha)$的位标 $(z_0^\alpha)$ 不全为 0, 则任何其它非 0 元 $z\in\mathscr{M}(4)$ 对位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha)$的位标 $(z^\alpha)$ 必可由位标 $(z_0^\alpha)$ 经 $A\in L_+^\dagger(4)$ 变换得出,即

$$z^\alpha=A_{\alpha'}^\alpha z_0^{\alpha'},$$

此时 $z$ 对位标架 $A(\boldsymbol{e}_\alpha)\equiv(A_\alpha^{\alpha'}\boldsymbol{e}_{\alpha'})$的位标仍为$(z_0^\alpha)$. 由此可见, 空间 $\mathscr{M}(4)$的非 0 部分可以表示为

$$\bigcup_{A\in L_+^\uparrow(4)} z_0^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha),\ z_0\neq 0.$$

如果将$(\boldsymbol{e}_\alpha)$的原点，即 0 元，认为由$(\boldsymbol{e}_\alpha)$表现，则可将 0 元隐含于表示式之中，而将空间 $\mathscr{M}(4)$的表现式写成：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L_+^\uparrow(4)} z_0^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha),\ z_0\neq 0. \tag{4.11}$$

如果更将重点合一，则可将表现式写成：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L(4)} z_0^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha),\ z_0\neq 0. \tag{4.11}^*$$

同理，对固定的位标架 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$，于原点 $h$ 外固定一点 $z_0'\neq h$，原点 $h$ 隐现于 $(\boldsymbol{e}_\alpha(h))$ 之中，则有空间 $\mathscr{M}(4)$的表现式：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L_+^\uparrow(4)} z_0'^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha(h))=\bigcup_{A\in L(4)} z_0'^\alpha A(\boldsymbol{e}_\alpha(h)),$$

$$z_0'^\alpha\neq 0. \tag{4.12}$$

如果选定一个群元 $A_0\in L_+^\uparrow(4)$ 或 $L(4)$，则还可有表现式：

$$\mathscr{M}(4)=\bigcup_{A\in L_+^\uparrow(4)} z_0'^\alpha A(A_0(\boldsymbol{e}_\alpha(h)))=\bigcup_{A\in L(4)} z_0'^\alpha A(A_0(\boldsymbol{e}_\alpha(h))),$$

$$z_0'^\alpha\neq 0. \tag{4.12}^*$$

## §5 $V(4)$ Riemann 几何学

设$m$为$V(4)$与$\mathscr{M}(4)$间的一个拓扑变换，

$$m: V(4)\to\mathscr{M}(4). \tag{5.1}$$

以 $x$ 表示$V(4)$的点，$z$ 表示$\mathscr{M}(4)$的点，则

$$z=m(x),\ x=\overset{-1}{m}(z).$$

必须注意，这个对应关系 $m$ 没有规定$V(4)$的度量性质，也没有规定$V(4)$的弯曲性质，因此不能以为$V(4)$就已经是

Minkowsiki 空间了. 其实, $m$规定的只是$V(4)$的拓扑性质, 使得$V(4)$与$\mathscr{M}(4)$是同胚的.

在$\mathscr{M}(4)$内, 选一以$z=m(x)$为原点, 由$(\boldsymbol{e}_\alpha)$平移而得的位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(z))$, 再以$\mathscr{A}\in L_+^\dagger(4)$作用于其上, 得位标架:

$$(\boldsymbol{e}_\alpha\{m(x)\})\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha\{z\})\equiv\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_\alpha(z))\equiv(\boldsymbol{e}_\alpha(x)).$$

以$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$作为$V(4)$以$x$为原点的局部位标架. 对于$x$的位标邻域$V_x$中的点$x'$, 以原点在$x$的位标架$E_x$的局部数值位标$(z_{x'}^\alpha(x))$为对位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标:

$$x'=z_{x'}^\alpha(x)\boldsymbol{e}_\alpha(x).$$

这样, 我们就得到了$V_x$与$z=m(x)$在$\mathscr{M}(4)$内的邻域$W_{m(x)}$的一个新的拓扑对应关系, 一般说来不能与$m$等同起来.

其次, 同以$x$为原点的不同的$E_x$必须相应于不同的位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$. 例如, $E_x(i)$相应于位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$; $E_x(j)$相应于位标架$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$. 当$i\neq j$时, $(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$与$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$不同; 相应的位标邻域$V_x(i)$与$V_x(j)$以及相应的$\mathscr{M}(4)$的邻域$W_{m(x)}(i)$与$W_{m(x)}(j)$均不相同. 这说明了$V(4)$对$\mathscr{M}(4)$的弯曲性: 不同位标架中同一点的位标之间的变换关系表达了$V(4)$对$\mathscr{M}(4)$的弯曲性.

由$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$经$A\in L(4)$变换而得的一切位标架

$$A(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$$

的位标邻域同为$V_x$, 并相应于同一$W_{m(x)}$. 于是, $x'\in V_x$对$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标为$z_{x'}^\alpha(x)$, 对$A(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$的位标为$\overset{-1}{A}{}_{\alpha'}^{\alpha}z_{x'}^{\alpha'}(x)$, 两者都是$W_{m(x)}$内同一点$z'=\overset{-1}{\phi}_x(x')$的位标. 这是选定了某个$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|i))$作为$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$而抛弃其它的$(\boldsymbol{e}_\alpha(x|j))$, $i\neq j$, 的结

果．因此，我们选定$(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$作为基本位标架，以免引起不必要的混淆．这样一来，我们就可以用$W_{m(x)}$的点来描述$V_x$的点，使之成为局部的拓扑对应．再提醒一下，这一对应关系与$m$不同．

既然如此，我们就可以设想将$V(4)$及$\mathscr{M}(4)$浸入高维Euclid空间$E(n)$$(n>4)$中，然后将$\mathscr{M}(4)$平移，使与$V(4)$相切于$x\in V(4)$，$z=m(x)$重合于切点$x$．这样，$\mathscr{M}(4)$就成为$V(4)$在$x$的**切空间**，记作$\mathscr{M}_x(4)$．于是，一切位标架$A(\boldsymbol{e}_\alpha(x))$，$A\in L(4)$，就可作为$\mathscr{M}_x(4)$内，以公切点$x$为原点的Lorentz位标架．这些Lorentz位标架我们称为$V(4)$在$x$点处的，以$V_x$为位标邻域，$x$为原点的局部**Lorentz位标架**．有些作者因为关系式(4.5)和(4.5)*而称之为以$x$为原点的**正规正交位标架**．其实，$\mathscr{M}_x(4)$只是将整个$\mathscr{M}(4)$添加隐参数$x$，它们具有相同的拓扑性和度量性，记作

$$\mathscr{M}_x(4)\simeq\mathscr{M}(4).$$

也就是将$\mathscr{M}(4)$的矩阵元附以下标$x$的表现式．例如将

$$\begin{bmatrix} z^0 i \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}$$

写成

$$\begin{bmatrix} z^0 i \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}_x$$

作为$\mathscr{M}_x(4)$中的相应元．

$V(4)$浸入$E(n)$中，在点$x$与$\mathscr{M}_x(4)$相切于点$m(x)$，则