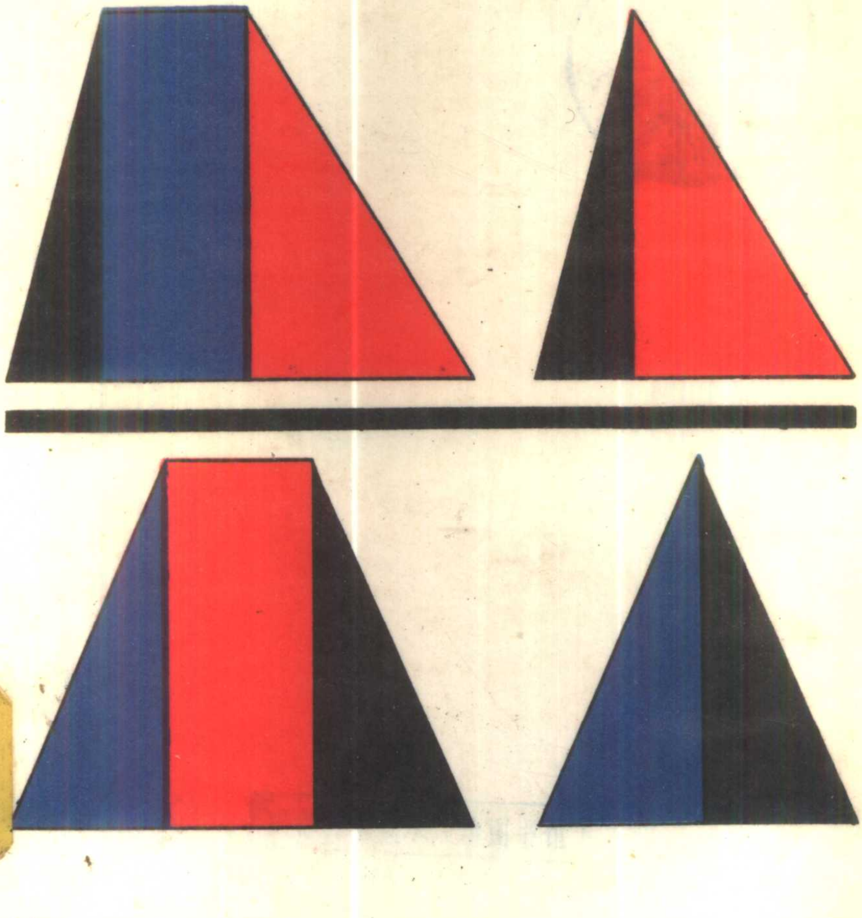
幾何不等式

譯者　王昌銳



徐氏基金會出版

幾何不等式

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第1347號

幾何不等式

中華民國五十九年三月十日初版

出版者　徐氏基金會出版部
台北郵政信箱3261號
香港郵政信箱1284號

發行人　林　碧　鏗
台北郵政信箱3261號

譯　者　王　昌　鋭
台灣省立高雄工業專科學校教授

印刷者　長 德 印 刷 有 限 公 司
台 北 市 迪 化 街 一 段 二 四 〇 號
電 話 五 一 三 四 二 八・五 五 六 三 六 一

定　價　新台幣　二十五元
港　幣　四　元

1.30

譯　序

幾何學，亦名形學；係就物之形狀、大小、位置，而研究其眞理之科學也．所以，幾何學的研究內容，包括直綫、曲綫、平面或立體圖象之長度、週邊、面積、體積，及其彼此間之關係與比較．所以不僅要研究個別幾何問題，且要研究許多圖形間之相似、相等、及不相等的問題，幾何不等式，乃應運而生，以研究有關極大與極小之長度及面積之幾何問題。於三角形中，內接一極小週邊三角形問題；與乎希臘人，早已關心之有限而已知之長繩，如何圍一極大可能面積的問題。今日科學昌明，幾何不等式之爲用益廣；舉凡機械設計、工具及成品之設計製造，均利賴之；以期用最少材料，造成最經濟適用之產品．

本書亦爲美國新數學文庫之一，對歷來已決未決之許多幾何不等式問題，均作儘可能之介紹。有些問題，且引用世界數學名家理論及解答，每能發人深省．作者尼可拉司D．卡薩里洛夫，於1929年出生於美國，密歇根州，安亞玻地方，於其父敦拉特K．卡薩里洛夫執敎三十年之密歇根大學，獲得物理學碩士學位．1954年，於威司康辛大學，獲得數學博士學位，刻爲密歇根大學數學敎授．1959—1960年間，擔任威司康辛州麥迪遜地方，美國陸軍數學研究中心研究工作．而於1960—1961年間，擔任俄國莫斯科，科學院司狄克洛夫數學會，駐會研究員．其科學興趣，專注於微分方程式及幾何學方面．幾何不等式一書，係一種夜間部自我研究敎材，頗適我國中等以上學校學生，及社會人士自我進修需要，可爲幾何輔助敎材，亦可爲幾何自修讀本．

本書係響應徐氏基金會，廣譯新書造福學子之號召而譯者，書中譯名，力求通俗流行，譯語力求存眞，以便學子與原書對照閱讀，旣可學數學，又可學英文，一舉兩得，固譯者之所望也。譯稿多勞吾妻蔣君英女士，協助整理，致得早日脫稿，深致謝意．

中華民國五十八年九月三日

王昌銳序於高雄自強書屋

致 讀 者

本書爲數學專家所撰一系列書刊之一，其目的在確立中學學生及社會人士，某些有興趣而能瞭解之重要數學觀念。新數學文庫之大部內容，多含中學課程所未包括之課題；難易各別，而即使於一書內，有些部份即較其餘部份，需要較高程度之專注，由是，當讀者需少量技術知識，以瞭解多數此等書籍時，將須明智努力．

如讀者以往，僅於教室接觸數學，則應記住於心；數學書籍，不能快速閱讀，亦不應期望乍覽之餘，即可瞭解書之全體．而應覺越過繁難部份，稍後再回來研究，實屬自然之舉；由於後續之說明，常可澄清一種理論也．反之，包含完全熟悉之內容，則可快速讀去．

學數學之最佳途徑爲〝做〞數學，各書所含問題，有的需嚴密思索．讀者應該接受養成手持紙筆從事讀書習慣之勸告；於此方式，數學對之將變爲更富意義．

對著者與編者而言，此爲新的冒險．對許多中學師生，爲此等書刊之準備，所予眞誠協助，深表謝意．編者頗有興趣於讀者對本文庫各書之反映意見，望書面提供，寄紐約大學，新數學文庫編輯委員會．

編　　　者

前　言

當先父在世時，常聞其口頭禪曰：“ 尼克（ Niki ）我有問題 ”；而無非解釋於我家起居室黑板上所討論之一不等式。今日，我認爲部份係由於在學校中，從未遭遇過相類於家中所見之問題，而幾乎從未對我家黑板上之問題，求出任何解答．今日中學數學課程，仍繼續忽視不等式課題，而每一數學家却深知不等式，於所有數學門類中，十分重要，有時甚至於較等式爲尤重要．

1958年安亞玻（ Ann Arbor ）公立學校，給予我和一群熱心青年，經常討論數學之機會。此等學生，由於其熱情與興趣，鼓勵我寫作本書。彼等對不等式之領會與欣賞，使余相信，細心解釋吾人會討論之某些課題，將能爲廣大讀者群所欣然接受。

幾何不等式，以其說明，能易於把握，特別易於解決；同時，因而提供優異之導論，以開創數學思想及現代數學精神。構成本書主要內容之基本不等式，其獨特優點，爲僅需清新頭腦，及少量之正規數學訓練，即能瞭解．即學習一年之中學代數與平面幾何基礎，常即足用。偶或使用三角。由是，某些內容，最好由初高中二年級學生閱讀。

本文庫之另一本書，如貝肯拜克（ Edwin Beckenbach ）及貝爾曼（ Richard Bellman ）合著之“ 不等式論 ”，提供我所提出內容之額外背景。進而言之，二氏之書，對本書所發展之許多課題，包含某些類似及備用討論之靈活而從容的研究．

從來，幾何問題之包含極大與極小者，於微積分發明以前，即已研究。微積分爲一有力機械，可用以毫無困難的解決某些此類問題。然而，它並非萬應金丹，任何欲研究或正研究微積分者，將得知第二，及三章內容，可決定微積分能作與不能作者爲何．

忠言雖常逆耳；仍願貢獻有助之芻言。世無具有足夠解釋與公式之數學書籍存在。所有讀者，應常持紙筆，從事作業，以備繪製書中所無之圖，以補充說明或公式間遺漏之步驟。通常，錄繪書中部份圖形或重書一條公式，

將澄淸困惑之處，本書所含練習與問題，亦屬重要部份。讀者於其出現時，予以作業，將可對其所讀內容，從事測驗，促進瞭解，而應充份準備，進行作業。問題之提出，係由易而難。甚至於提出某些未解決之問題。於第四章曾提供某些問題解答選輯，希望讀者作完一題之後，可資對證解答。

原稿經流士夫人（ Mrs.Jacqueline Lewis ），勒克司博士（ Dr. Anneli Lax）及任平教授（ Leo Zippin ）等之校閱，得彼等之評述，建議及增補，使本書增益甚多。特別感謝流士及勒克司對問題之解答與證明，所予之細心校正。

對於安亞玻教育局所予發展本書內容之機會，深爲感荷。吾安亞玻中學之學生太狄夫（ Robert Titiev ），所貢獻於本書者，勝過所受吾之敎益，値得衷心感謝。總之，承受先父卡薩里洛夫（Donat K.Kazarinoff）所予之靈感與培育；及受其學問與偉大精神之感召，方使吾走進數學世界，更値永銘心版。

尼可拉斯D.卡薩里洛夫

1961年1月於俄國莫斯科

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，爲多做習題。各書所附習題，有些頗爲艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十册陸續出版，以供讀者研習。除第十七册係由葉哲志先生承譯外，其餘各册均由王昌銳教授承譯。（定價每册港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers:Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論(An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式(Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗（第一册） (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解（第一册） (Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解（第二册）(Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話(Episodes,from the early history of mathematics)
14. 群與圖(Groups and their Graphs)
15. 特別數學(Mathematics of Choice,or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦(From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗（第二册）(The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究(Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

目　　録

第一章　算術及幾何平均

1·1　基本常識

茲考慮一直線，並於其上選一點O，因憑吾人使用尺，碼桿及皮尺之經驗，能於心靈之眼，知一數配合線上一點—如點在O之右方，爲一正數，如點在O之左方，爲一負數，如點在O，則爲零．此等數目，均稱實數，而可書爲小數．配合此等數目之直線，稱爲實線（real line），於圖中常將實線畫成水平，並置正數於零之右方；某些熟知之實數爲$1, -3/2, -4+\sqrt{5/3}$，及π．所有將予研究之數目，均爲實數．此處，有各種權利反駁，且謂尚未爲實數定義．不錯，亦可曰實數之仔細定義與討論，在數學分析之基礎上．如斯之討論，提示如此，乃過於詭辨，但可於哈定（G.H.Hardy）所著“純粹數學方向”（1938年劍橋大學出版）一書中之例題得之．相反的，實數之某些重要性質，完全而基本的討論，可於本文庫之另書“有理數及無理數”（尼文著）中見之．

圖　1.1

當配合實數與直線上諸點時（如圖1.1所爲）已隱約決定實數系具有一定性質．因此等性質，如此基本而重要，且注意之．首先，承認於所有實數集合中，有一次集，稱爲正實數集合，而此集合（稱作P），又具以下兩種性質：

Ⅰ．如a爲一實數，則以下說明，恰只有一爲眞：a在P中，$-a$在P中，a爲零．

Ⅱ．如a及b均在P中，則$a+b$及$a\cdot b$，均在P中．

因實數系，有此次集，乃謂其有順序（ordered）．當結合實數與實線時，

乃使用此順序之性質；如 a 不在 P 中，且 a 非零，則曰“a 爲負”．能證明實數系爲有順序．益言之，能用實數乘法之定義，以顯示如 a 及 b 均負，則 ab 爲正，及如 a 正 b 負，則 ab 爲負．當然，如而僅如，最少有一數爲零，二個或二個以上實數之乘積，始能爲零．如 a 爲正，書 $a>0$ ．

加法及乘法之代數作業，有其幾何解釋於實線之上．加法常認爲對應之實線移轉．茲假定實線於吾人心目中，看來水平．則爲了實施以 4 相加之作業，滑動實線，向右四單位，欲實施數 b 之相加作業，如 b 爲正，移轉實線至右方 b 單位，如 b 爲負，至左方 $-b$ 單位．當然，如 b 爲零，則無移轉可行．用一正數相乘，常認爲一種伸張或收縮作業．例如，求以 4 乘，乃令原

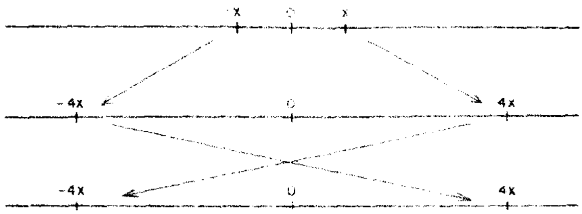


圖 1.2

點固定，伸張實線，如是各點恰爲其原來與原點距離之四倍．以 -4 相乘，首先伸張 4 之因數，而後於伸張線上，就 O 反射各點．伸張及反射作業之實施順序，並無差異．以 1 相乘，令諸點固定，以零相乘，乃逼使諸點擠於一處，原點．

定義 1． $a>b$（或同義之 $b<a$），如而僅如 $a-b>0$，即如而僅如，有一正數 h，以致 $a=b+h$，始能成立．

“$a>b$”讀爲“a 大於 b”；

“$a<b$”讀爲“a 小於 b”．符號式說明“$a<b$”，稱爲不等式．以幾何言之，乃知 $a>b$ 之意義，爲 a 於實線上，在 b 之右方．由以上說明之性質(1)，隨而對任何已知之一對實數 a 及 b，恰只有說明 $a>b$，$a=b$ 及 $a<b$ 之一，爲眞．

定理 1． 不等式關係爲可移轉；即如 $a>b$，及 $b>c$，則 $a>c$ ．

【證】 依定理之假設，存在正數 h 及 k，以致

$$a=b+h \qquad 及 \qquad b=c+k$$

故，

$$a=(c+k)+h \quad 及 \quad a=c+(k+h)$$

但 $k+h$，因 h 及 k 爲正，而爲正數．依定義，乃謂 $a>c$．∎（∎，爲證明完成之意）．

如說明 $a<b$ 或 $a=b$ 之一成立．乃書 $a\leq b$，而讀爲"a 小於或等於 b"，例如

$$1\leq 1 \quad 及 \quad 2\leq 3$$

因於各情況中，兩可能交錯之"$<$"或"$=$"中，有一成立．

次一定理告知，不等式如何可以相加．

定理2. 如 $a>b$ 及 $c\geq d$，則 $a+c>b+d$．

其證明恰與定理1者，同樣容易．讀者應自證之．

注意，如 $a>b$ 及 $c>d$，ac 不一定能大於 bd．例如 $1>-2$ 及 $2>-3$，但 $2<6$ 也．以下定理．提供含正數不等式之乘法規則．

定理3. 如 $a>b>0$ 及 $c\geq d>0$，則

(1) $ac>bd$　　(2) $ac>bc$　及　(3) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

【證】 依假設，存在正數 h 及 k，以致 $a=b+h$ 及 $c=d+k$ 除非 $c=d$，於斯情況，$c=d+k$，對 $k=0$，仍然成立．故

$$ac=(b+h)(d+k) \quad 或 \quad ac=bd+bk+h(d+k).$$

數目 $bk+h(d+k)$ 爲正，因此，依定義 $ac>bd$．讀者應自行完成第二結語之證明．第三者之證明，係隨第二者而來，因選 $c=1/a$，乃得

$$a\cdot\frac{1}{a}>b\cdot\frac{1}{a} \quad 或 \quad 1>\frac{b}{a}.$$

最後，應用第二結語於不等式 $1>b/a$，此次選 $c=1/b$，求得

$$1\cdot\frac{1}{b}>\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b} \quad 或 \quad \frac{1}{b}>\frac{1}{a}.∎$$

於說明次一定理之前，且複習由分數乘羃昇高之正數定義．令 P 爲一正有理數，且令 a 爲一正實數，（一數如能書爲 m/n 形式，其中 m 及 n 爲整數，$n\neq 0$，乃爲有理．）而 P 爲有理而正，P 可書爲 m/n，其中 m 及 n

爲整數，$n \neq 0$，乃爲有理．）

因P爲有理而正，P可書爲m/n，其中m及n爲正整數．符號a^m，定義爲

$$\underbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}_{m\text{因子}} .$$

符號$a^{1/n}$，表示正實數x，以致$x^n = a$．進而言之，

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} .$$

如q爲一負有理數，如$q=-p$，其中p爲正，則

$$a^q = \frac{1}{a^p} .$$

當然，$a^0 = 1$．

本書將不考慮昇至無理冪之任何數目，然爲通化，說明並不限制p爲有理之次一定理．決定如斯數目：

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} , \quad \pi^{\pi}$$

是否有理或無理之問題，極爲困難．

定理4．如$a > b > 0$，而如$p > 0$，則$a^p > b^p$；如$p < 0$，則$a^p < b^p$．

【證】 僅將證明p爲正整數情況之定理，而將任何有理數p之證明，留待讀者爲之〔完整之證明，見貝肯拜克（ E.Bechenbach ）及貝爾曼（ R.Bellman ）合著之“不等式論”〕，令p爲已予．由假設$a > b > 0$，及定理3，隨而

$$a^2 > b^2 .$$

如p爲2，即再無物可證．否則，復應用定理3於此次之不等式

$$a > b > 0 \text{ 及 } a^2 > b^2 ,$$

遂達成結論

$$a^3 > b^3 .$$

如 p 爲3，已經作到．繼續如此作爲，直到 $p-1$ 步驟以後，乃得所望之不等式

$$a^p > b^p. \blacksquare$$

以上定理提供有關即將需要之不等式作業基本定則．以後，不須特別指明，提醒注意，常將使用．於此等定理使用於研究以前，將應用於某些簡單情況，以觀察需使用之經常程度及其如何重要．以下算術問題之解，即可完全解釋．

問題：$\sqrt{7}+\sqrt{10}$ 或 $\sqrt{3}+\sqrt{17}$ 孰大？

一種決定方式，爲由稱作平方根表之中，查出此類數目，或簡單的計算平方根，達幾位小數即是．兹將證明 $\sqrt{3}+\sqrt{17}>\sqrt{7}+\sqrt{10}$．係由平凡觀察，與藉助於定理，進行示範，以達所望之結論．欲知如何發現其解，可反其理由順序行之．於演算本例以後習題時，將發現最自然方法，爲假定所望之答數爲眞，並由之導致幾種其他之不等式，直達得一認爲眞確者爲止．其次，應驗證各步驟可反轉實施．如獲成功，將建立一由已知不等式，引出所欲求者之證明．以上例題，係經審愼選擇，而有長解，以求表示定理1－4，如何使用．進而言之，因 $\sqrt{3}+\sqrt{17}$ 及 $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ 間之差很小（約.05），如不能預選二數中之較大者，亦無可驚詫．

【解】 依定理1，因 $51=49+2$，從而 $51>49$ 爲眞．應用定理4，以 $p=1/2$ 於此不等式，遂求得 $\sqrt{51}>7$．由定理3，以 $a=\sqrt{51}$，$b=7$，及 $c=12$，隨而

$$12\sqrt{51}>12\cdot 7=84.$$

兩端各加以213，並使用定理2於此不等式，乃求得

$$213+12\sqrt{51}>297.$$

但 $297>280=4\cdot 70$．因此，依定理1，

$$213+12\sqrt{51}>4\cdot 70.$$

其次，觀察

$$213=9+204=9+4\cdot 51=9+(2\sqrt{51})^2$$

及

$$213+12\sqrt{51}=9+2\cdot 3\cdot 2\sqrt{51}+(2\sqrt{51})^2$$
$$=(3+2\sqrt{51})^2.$$

由是，依定理4，以 $p=1/2$，得結論

$$3+2\sqrt{51}>2\sqrt{70}.$$

此不等式能重書爲

$$3+17+2\sqrt{51}>17+2\sqrt{70} \qquad (\text{定理}2)$$

或，因 $51=3\cdot 17$ 及 $70=7\cdot 10$，而可重書爲

$$(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}+(\sqrt{17})^2>(\sqrt{17})^2+2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}+(\sqrt{10})^2.$$

此係同於

$$(\sqrt{3}+\sqrt{17})^2>(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2.$$

復應用定理4，以 $p=1/2$，遂得必然之

$$\sqrt{3}+\sqrt{17}>\sqrt{7}+\sqrt{10}.\blacksquare$$

如前所述，如有人願用更進步之基本代數定理，乃有更簡短之方法，以得相同結論，以下習題，提供基本定理之類似說明．

練習題

1. 證明 $2+\sqrt{7}<5$．
2. 證明 $2+\sqrt[3]{7}<4$．
3. 證明：如 $a<1$，則 $2-2a>0$．
4. $\sqrt{5/12}+\sqrt{1/5}$ 或 $\sqrt{1/3}+\sqrt{2/7}$ 孰大？證明所得推測（猜測）．
5. $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ 或 $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$，孰爲較大之數？試證明之．

使用基本定理之略較詭辯的範例，提供如下，考慮數目

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}}+\frac{1}{100}.$$

此數多大？此頗難於作一正確猜測．如有計算機及充份時間，乃能對此數目

，作兩位小數或更多位之計算．然而，不等式將有助於以更短時間，作良好估計．著者目的，在使學者熟練基本定理之應用，如覺保持於教本傳統，而以“帽中跑出來的兔子”（A rabbit out of a hat）開始，則請寬恕．如

定理5．對各正整數 n，

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

證此說明，並不如何困難，艱難部份，在於思考．除非已有某些實驗於不等式作爲，應勿思慮及此．實驗爲數學家之典型權力．吾人作過許許多多實驗，而所作實驗，僅用數目，幾何圖形，及其他幾種抽象標的爲之．吾人之實驗，如自然科學家者然，大多失敗．偶而成功，發現一則定理．而後常遭遇需有更多作業，予此推測而得之定理，以有力證明，使之成爲經過實驗，可信爲眞之定理．或有人用明顯如 $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ 之說明，作定理5發明之實驗．以下證明，恰爲成功之實驗．

【證】　因 $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}>\frac{2\sqrt{n}}{2}\qquad\text{（何故？）}$$

因此，依定理3

(1)
$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

現 $1/\sqrt{n}$ 出現於右端，因此係吾人試圖估計之量，自然，次爲消除左端分母之平方根．回想恒等式

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2,$$

遂知藉以組成

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2.$$

此恒等式之右端元，顯爲數1．故將前面不等式左端分母、分子，乘以 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，求得