上海市中等师范学校教材

数学

算术理论部分

上海教育出版社

上海市中等师范学校教材
数　学
（算术理论部分）
上海市中等师范学校教材编写组编
上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　　河北新华印刷一厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 9.125　字数 204,000
1979 年 6 月第 1 版　1979 年 7 月河北第 1 次印刷
印数 1—257,500
统一书号：K7150·2118　定价：0.57 元

说　明

师范教材《数学》包括“算术理论”、“教材教法”和“初等数学”等三部分. 本书是“算术理论”部分，它是根据一九七八年发行的《师范数学》修订、改编而成的.

本书供中等师范学校学生试用，也可作在职小学数学教师的教学参考资料或培训使用.

由于我们水平不高，又缺乏经验，教材中一定会存在很多缺点和错误，恳切地希望同志们提出宝贵的意见和批评.

上海市中等师范学校教材编写组

一九七九年一月

[redacted]

师

目　录

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学. 现实世界的事物是多种多样、错综复杂的. 在生产实践中,经常需要测定现实世界中事物的“多少、长短、粗细、厚薄、大小、轻重、快慢”等,所有这些可以进行测定的对象都是量.

人们从“量”这一侧面来了解事物,为了对“量”作一般的研究,例如,为了表示“量”的多少、长短、粗细、厚薄、大小、轻重、快慢的程度,对“量”进行计算等等,就需要把各种“量”所具有的共同特征抽象出来,这样也就产生了“数”的概念.

算术是研究数、数的性质和关于数的运算的一门学科. 算术中的概念,有的是借助于其他已经知道的概念来说明的. 例如,数 a 与数 b 的差是这样的一个数,它与 b 的和等于 a. 在这里,新的概念“差”是用已经知道的概念“和”与“等于”来说明的.

用已经知道的概念对新概念的说明叫做新概念的定义. 但是,总有一些概念是不定义的,这样的概念叫做原始概念. 本书里“集合”就是原始概念之一.

第一章　整　　数

第一节　整数的意义和性质

一、自然数和自然数列

1. 自然数及其起源

(1) 集合

要说明自然数的概念，我们先说明集合的概念.

集合是具有某些特征*(条件)的事物组成的整体. 我们可以把一只手的手指作为一个集合，可以把一个学校的所有学生作为一个集合，也可以把一个人民公社的所有拖拉机作为一个集合.

组成集合的每个事物，叫做这个集合的**元素**. 例如，每个手指、每个学生、每台拖拉机，就分别是上面所举集合的元素.

一本书也可以作为一个集合，它的元素就是这本书；一个人也可以作为一个集合，它的元素就是这个人.

我们一般用大写字母 A、B、M、N 等来表示集合，读成集合 A 或集 A，集合 M 或集 M 等.

对于集合里的元素，我们一般用小写字母 a、b、c、d 等来表示. 如果 a 是集合 M 里的一个元素，我们就说元素 a 属于集合 M，用 $a\in M$ 表示，读作 a 属于集合 M. 如果 a 不是集合 M 里的元素，我们就说 a 不属于 M，用 $a\notin M$(或 $a\overline{\in}M$)表示，读作 a 不属于集合 M.

集合可以用指出它的所有元素的办法来给出. 例如，$A=\{a, b, c\}$，表示集合 A 含有三个元素 a, b, c; $M=\{a\}$，表示集合 M 只含有一个元素 a. 集合也可以用指出集合里元素特征(条件)的办法来给出. 例如，$B=\{$全体三角形$\}$.

集合的例子很多. 例如，地球上所有人的集合，这时，应该假定在所讨论的一瞬间既没有出生的人，也没有死去的人. 又如，全体英文字母的集合. 在这些集合里，元素的个数都是有限的，我们通常就叫做**有限集合**.

如果一个集合 A 里的每一个元素，都可以在另一个集合

---

* 这里所指的特征(条件)必须是确定的. 例如，"较大数的集合"，由于特征不确定，就认为不能构成一个集合.

B 里找到一个唯一的(即有一个也只有一个)元素和它相配；并且反过来，集合 B 里的每一个元素也可以在集合 A 里找到一个唯一的元素和它相配，我们就说这两个集合里的元素可以**一一对应**．这样的两个集合就叫做**等价集合**(或叫做**等势集合**)，记成

$$A\sim B,\quad \text{读作：集合 } A \text{ 和集合 } B \text{ 等价}.$$

例如，右手手指的集合和左手手指的集合就是等价集合；又如，教室里正好每个学生一张椅子，不多也不少，那末，这些学生的集合和这些椅子的集合也是等价集合．显然，彼此等价的有限集合里的元素的个数是相等的．但是，判定两个集合是不是等价集合，不一定要知道每一个集合里元素的个数，只要能确定这两个集合里的元素能够一一对应就可以了．

如果集合 A 和集合 B 是等价的(即 $A\sim B$)，集合 B 和集合 C 也是等价的(即 $B\sim C$)，那末，集合 A 和集合 C 也是等价的(即 $A\sim C$)．

根据集合的这一性质，我们可以把所考察的一切集合划分成类，把互相等价的集合放在一类里．例如，人体上眼睛的集合，耳朵的集合，足的集合，它们是等价的，可以放在一类；左手上或右手上手指的集合，左足上或右足上足指的集合也是等价的，可以放在另一类．

(2) 自然数

人类在生产实践中，要对某种物体的集合作量的估计，例如，在狩猎、捕鱼和采集果实的劳动中，有时有收获，有时无收获；在把劳动得来的果实分配时，有时分后有多，有时分后嫌少；这样，就逐渐形成“有、无、多、少”的概念．数的概念就是从对“有”的认识开始的．

随着生产的发展，人类在进行产品分配、物品交换和制定

历法等活动时，都要对不同的"有"进行比较，并且开始用彼此等价的集合中的一个集合作为这一类等价集合的代表，但没有把数当作抽象的数而与具体物体的集合分离开来。例如，在某些民族中，和"月亮"这个集合等价的这一类集合都用"月亮"集合作为代表；和"耳朵"这个集合等价的这一类集合都用"耳朵"集合作为代表.

人类在世世代代里进行这样的比较，才渐渐地把数与具体物体的集合分离开来，采用了数字符号. 例如，用"一"作为和"月亮"这个集合等价的这一类集合的标记；用"二"作为和"耳朵"这个集合等价的这一类集合的标记.

由此我们可以知道，每一个**自然数**实际上是一类等价的有限集合的标记，它表示了一类等价集合中任一集合里的元素的个数.

"一"是自然数中最小的一个，而且任何自然数都是由若干个"一"组成的，所以，"一"叫做**自然数的单位**. 而"二"是二个单位合并而成，"三"是三个单位合并而成，……，我们说，五比三大二，就是由它们与"一"的关系决定的，"一"是比较它们的共同单位.

2. 自然数列及其性质

从"一"起，在一个单位上添上一个单位就得二个单位，再添上一个单位就得三个单位，……，这样顺次做下去，就得到依次排列着的一列数：一，二，三，…….

这列由依次排列着的全体自然数组成的集合就叫做**自然数列**. 如果用 A 表示自然数列这个集合，则有

$$A=\{一,二,三,四,\cdots\cdots\}$$

自然数是自然数列中的一个个单个的数，即每一个自然数都是自然数列这个集合的一个元素.

自然数列有以下性质：

(1) **自然数列是有始的．** 自然数列最前面的一个自然数是“一”；

(2) **自然数列是有序的．** 自然数列里的自然数都是按一定顺序排列着的，在“一”后面的一个自然数是“二”，在“二”后面的一个自然数是“三”，……，这就是说，每个自然数后面都有一个而且只有一个后继数，自然数列是一个**有序集合**；

(3) **自然数列是无限的．** 自然数列里不存在“最后的数，即自然数列里的元素个数是无限的，自然数列是一个**无限集合**．

无限集合的例子很多．例如，全体三角形所组成的集合 $A=\{$全体三角形$\}$就是一个无限集合．

3．计数

有了自然数列，我们可以非常方便地计数．例如，要知道教室里的学生数，我们可以一个一个地指着学生，同时依次念出(或口唱或默念)自然数列里的自然数一、二、三、四等，和所指的学生一一对应，这种过程就是**计数**(或称数数)．如果数到“四十二”，那末教室里的学生和从“一”到“四十二”这些自然数就一一对应了，这时，教室里的学生的集合与自然数列里的部分自然数(从一到四十二)所组成的集合就是等价集合，这些自然数所组成的集合就起着一类等价集合的代表的作用．因为集合 $A=\{1、2、3、\cdots、42\}$中共有四十二个元素，所以，我们这就知道教室里共有学生“四十二”人．

计数有以下原则：

(1) 数事物时，只要每个事物都数到，并且只数一次，那末，数的结果是唯一的一个数，它与数的次序无关． 例如，数

教室里的学生,不论是按行数还是按排数,只要每个学生都数到,并且只数一次,数的结果是唯一的一个数;

(2) 数事物时,可以用其他事物代替要数的事物,然后再数,数的结果是不变的;

(3) 数事物时,说出的最后一个数,就是数的结果. 但是数的过程是无限的,如果再有要数的事物,还能继续数下去,这就是说,自然数可以无限止地数下去.

4. 基数和序数

自然数作为一类等价的有限集合的标记,它可以表示集合中元素的多少,同时,由于自然数在自然数列中是有序的,所以,它还可以给集合中的元素编号.

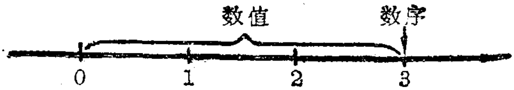
例如,一列横队自右向左报数,排尾报"二十五",这时,这列队伍中的人就和自然数列里的自然数从"一"开始到"二十五"为止建立起一一对应关系. 自然数"一"对应自右起的第一个人,自然数"二"对应自右起的第二个人,……,自然数"二十五"对应自右起的第二十五个人(即排尾).这里的"二十五"既可以表示这列队伍有"二十五个人"(即集合里有二十五个元素),也可以表示排尾是第二十五个.

用来表示集合中元素多少的数叫做**基数**;

用来表示集合中元素次序(即第几号)的数叫做**序数**.

例如,自然数"五"可以表示某一集合中有五个元素,也可以表示第五号,后者并不表示五个元素,而只表示一个元素,即第五个元素.

自然数的这两种意义,也反映在数轴上. 例如数轴上的3,"3"既反映了表示"3"的点到原点的距离是3(即自然数的基数意义);又反映了这一点是从原点向右的第三个自然数点(即自然数的序数意义).



二、零和扩大的自然数列

1. 零

自然数是用来表示一个或一个以上物体的个数的. 但是，我们常常会遇到一个物体也没有的情况. 例如，教室里一个学生也没有，书架上一本书也没有，这时，我们还是把它作为学生的集合或者书的集合，这就成了一个元素也没有的集合，这种集合就叫做**空集合**(或**空集**). 那末，至少含有一个元素的集合，我们就叫做**非空集合**(或**非空集**). 空集合用符号 ϕ 表示.

为了表示“没有”就产生了一个新的数——零. 零是空集合的标记，它表示了空集合里一个元素也没有.

作为一个独立的数，零不仅可以表示“没有”，还可以作为界限. 例如，“今天气温是摄氏零度”，并不是说今天没有温度，而是指温度是零度. 零度是零上温度和零下温度的分界，是在通常情况下，水开始结冰的一个完全确定的温度.

2. 扩大的自然数列

如果我们把零写在自然数列的前面，那末我们就得到**扩大的自然数列**：

$$〇, 一, 二, 三, \cdots\cdots$$

在扩大自然数列里，只有零不是自然数，其他的数都是自然数.

扩大自然数列的特性如下：

每一个数的后边，都有一个而且只有一个数紧跟着它；

有一个数零，它不紧跟着任何数；

除了数零以外，每一个数都必定紧跟着某一个数，并且只紧跟着一个数.

扩大自然数列里的任何一个数都叫做整数. 因此，任何一个自然数或零都是整数*.

三、十进位制和整数的读写

每一个数都应当有一个名称和书写的符号，这样我们才能够读出(或称呼)、写出(或记下)这个数.

但是，自然数是无限多的，如果每一个自然数都用一个独立的名称(或符号)来读出(或写出)它，那是非常不方便，也是不可能做到的.

随着生产和经济的发展，人类迫切需要创造一种计数和读、写数的方法. 人类生来就有十个指头，而且常常利用十个指头来计数. 所以，就创造出一种"十进"的计数、读数、写(记)数的方法，这就是十进位制.

1. 十进位制读数的原则

十进位制的特点是"满十进一".

利用十进位制读数，应有以下名称:

(1) 自然数列里最前面的十个数，各有一个独立的名称，这就是

一、二、三、四、五、六、七、八、九、十;

十以上的数一般不给新的名称，而是把十和不满十的数结合起来. 例如，十一、十二、……、十九，十和十合在一起叫做二十；同样，三个十叫做三十；……；几个十叫做几十.

(2) 十个十给一个新的名称，叫做百.

(3) 十个百给一个新的名称，叫做千.

---

* 本书所指的数只限于非负数，同时用文字表示数时，如果不加说明，则该文字表示整数.

(4) 十个千给一个新的名称，叫做万.

万以上虽然仍是十进，但不逐一给新的名称. 十个万叫做十万；十个十万叫做百万；十个百万叫做千万.

(5) 十个千万(即万万)给一个新的名称，叫做亿. 亿以上还有十亿，百亿，千亿.

(6) 十个千亿(即万亿)给一个新的名称，叫做兆. 兆以上有十兆，百兆，千兆.

(7) 十个千兆(即万兆)给一个新的名称，叫做京. 京以上有十京、百京、千京.

……

一(个)、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿、十亿、百亿、千亿、兆、十兆、百兆、千兆、京……，这些都是计数单位.

2. 十进位制记数的原则

用来记数的符号叫做数字. 自然数列里最初的九个数，分别用下面的阿拉伯数字来表示：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

此外，还用数字"0"来表示没有单位，即数"零".

记数时，把数字并排成横列，一个数字占有一个位置，这些位置都叫做数位.

从横列的右端算起，第一位是"个位"，第二位是"十位"，第三位是"百位"，第四位是"千位"，第五位是"万位"，第六位是"十万位"等等. "个"位上的计数单位是"一(个)"，"十"位上的计数单位是"十"，"百"位上的计数单位是"百"，"千"位上的计数单位是"千"，"万"位上的计数单位是"万"，"十万"位上的计数单位是"十万"等等.

同一个数字由于它在所记的数里的位置不同，所表示的数也不同，也就是说，每一个数字除了本身的值以外，还有一

个"位置值". 例如"3",如果记在个位上,就表示三个一;如果记在十位上,就表示三个十;如果记在百位上,就表示三个百等. 这就是记数的"位值原则".

把数位依次排列,就得到数位顺序表:

数 位 顺 序 表

……	兆位	千亿位	百亿位	十亿位	亿位	千万位	百万位	十万位	万位	千位	百位	十位	个位	数位
……	兆	千亿	百亿	十亿	亿	千万	百万	十万	万	千	百	十	个	计数单位

用一个数字记出的数(不是0),叫做**一位数**(如1, 3, 6);用二个数字、三个数字、……记出的数(其最左端的数字不是0),就分别叫做**二位数**(如10, 29)、**三位数**(如100, 110, 908)等等. 所以,在一个数中数字的个数是几(其最左端的数字不是0),这个数就叫做几位数.

在一个数里,记在某个数位上的数字,我们有时也把它说成是"某位数字". 例如,记在十位上的数字,我们就说它是"十位数字".

3. 十进位制读数的法则

我国的读数法则采用四位分级. 即从个位数起,每四个计数单位作为一级.

个位、十位、百位、千位组成第一级,叫做**个级**;

万位、十万位、百万位、千万位组成第二级,叫做**万级**;

亿位、十亿位、百亿位、千亿位组成第三级,叫做**亿级**.

每一级里的四个数位,分别叫做这一级的第一位、第二位、第三位、第四位,也就是这一级里的个位、十位、百位、千