工程力學教程
運動學及動力學

徐芝綸 薛鴻達 吳永禎
合 編

3

上海新亞書店出版

工程力學教程

第二冊

運動學及動力學

徐芝綸 薛鴻達 吳永禎

合編

新亞書店出版

工程力學教程

第二册

運動學及動力學

一九五二年十二月初版

定價人民幣一五〇〇〇元

編　　者	徐芝綸　薛鴻達　吳永禎
出版者	新亞書店 上海河南中路159號 電話：94258
總發行所	中國科技圖書聯合發行所 上海中央路24號304室 電話：19566　電報掛號：21968
分銷處	上海　重慶　漢口　貴陽　新亞書店

1—6000—12

目　　次

第二篇　運動學

第三篇　動力學

第二編　運動學

第 十 一 章

質 點 的 運 動

11-1. 緒言. 在第一編'靜力學'裏,討論了物體的平衡條件,即物體受力而不改變動態的條件. 假如物體所受的力不滿足平衡條件,則物體的動態將因而改變. 物體運動的改變與造成此種改變的力,二者之間有怎樣的關係,是以後所要討論的'動力學'的主要題材. 但在討論動力學問題以前,必須先熟悉物體運動的性質與方式,因而先要學習'運動學'. 運動學專論物體在各種運動中的空間-時間的關係,而不計及產生或改變運動的原因,即不計物體所受的力. 照這樣說來,運動學可作爲動力學的導論看待;可是在許多的機械問題裏,運動的分析是主要的,力的分析卻是次要的,這些問題,在機構學(或稱機動學)中常常遇到,本書所講述的是基本的與比較簡單的一些問題.

所謂運動,是物體的位置隨時間而改變的現象,如果物體的位置保持不變,便是所謂靜止. '運動'與'靜止'都是相對的觀念,隨所選取的參照體而定. 例如:火車在行駛時,以火車車身爲參照體,車廂裏的桌子是靜止的,但以路旁的電桿爲參照體,它就在運動了. 若以地球爲參照體,電桿是靜止的,但以太陽爲參照體,它就在運動了. 因此,以甲物爲參照體(此時甲物認爲是相對地靜止的),乙物對甲物的位置關係,隨時間而改變的現象,稱做乙物對於甲物的運動. 同一個運動,隨了所選取的參照體的改變,所表現的情形也會改變. 例如,火車在曲線軌道上行駛時,某旅客在車廂裏循了直線作勻速運動,以火車爲參照體,他做着勻速直線運動,若以地球爲參照體,那時他便做着加速曲線運動了. 在

工程問題中，如果不特別聲明，都以地球爲參照體，卽我們通常所討論的，是物體相對於地球的運動.

爲求建立物體運動的基本概念，先須硏究質點的運動. 質點是具有一定質量，而大小可以不計的物體. 這當然是理想的觀念，因爲無論物體所含的質量是何等地少，它多少總占有一些空間. 但是，若所論物體的尺寸，遠比運動的範圍爲小，就可以當做質點看待. 例如，星體的直徑雖以千、萬公里計，但在天文學的計算中，仍可把它們當做質點. 又如，鎗彈的尺寸與其射程相較，極爲微小，因此也可看做是質點. 在運動學中，旣不論究發生運動的原因，質點的性質以及質量都無關重要，因此還可以把質點當做幾何點看待，來論究其運動. 剛體可以認爲是質點的集合體，從質點的運動推廣到質點系的運動，就可進而分析剛體的運動.

11-2. 位置、位移、速度、加速度的定義及矢量表示. (1) **位置.** 質點在空間的位置，須以矢量表示. 設在空間取一個定點 O (圖 11-1)，作爲位置參照點. 在任一時刻，質點在空間的位置 P，可用從點 O 聯至點 P 的位置矢(又名徑矢) $\boldsymbol{r}$ 來表示. 質點在空間運動時，其位置矢是隨着改變的，而成爲時間的矢函數，卽：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{11-1}$$

設 $t=0$ 時，質點的位置是 P_0，則 OP_0 代表 $t=0$ 時的位置矢 $\boldsymbol{r}_0$，稱做初位置矢. 同樣，OP_1 代表 $t=t_1$ 時的位置矢 $\boldsymbol{r}_1$，OP_2 代表 $t=t_2$ 時的位置矢 $\boldsymbol{r}_2$，等等.

質點在空間運動的軌跡，稱做它的路徑，從圖 11-1，可見這就是各位置矢端的軌跡曲線，卽：位矢端線代

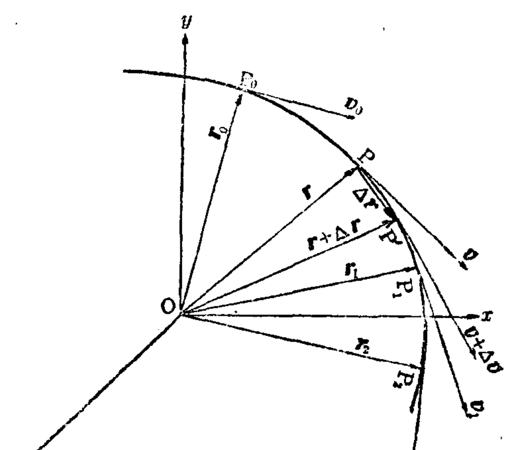


圖 11-1

表運動質點的路徑.

(2)**位移**. 位置的改變稱爲**位移**,位置矢的改變稱爲**位移矢**. 設在 t 時,質點的位置在 P, 其位置矢爲 $OP = \boldsymbol{r}$; 在 $t+\Delta t$ 時,質點的位置在 P′, 其位置矢爲 $OP' = \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$; 則 $PP' = \Delta\boldsymbol{r}$ 就代表質點在 Δt 時間內位置的改變,即位移矢. 位移祇與質點在所論時間 Δt 內的初位置 P 及終位置 P′ 有關,而與質點的實際路徑一般並不重合. 在 $\Delta t\to 0$, 卽 P′ 趨近於 P 時,位移矢 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向,便趨近於路徑在點 P 的切線的方向.

(3)**速度**. 速度是位置對於時間的改變率. 如圖 11-1, $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示質點在 Δt 時間內位置的改變,因而每單位時間的平均改變率是

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t},$$

這稱爲質點在 Δt 時間內的**平均速度**,它也是矢量,方向與位移矢 $\Delta\boldsymbol{r}$ 相同.

若 $\Delta t\to 0$, 則位置對於時間的改變率的極限值,稱爲質點在 t 時的(卽在位置 P 的)**瞬時速度**,簡稱**速度**:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}. \qquad (11\text{-}2)$$

速度也是矢量,它的方向與 $\Delta t\to 0$ 時位移矢所取的方向相同,卽路徑在點 P 的切線的方向. 速度的單位是:米/秒(m/sec), 仟米/小時(km/hr)等.

速度也是時間的矢函數,卽:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t). \qquad (11\text{-}3)$$

自 O′ 點引作 $O'Q_0, O'Q_1, O'Q_2, \cdots$ 等等,順次代表質點在空間的路徑上 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ 各點的速度矢 $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots$, 這時所得的速度矢的終點的軌跡曲線 $Q_0Q_1Q_2$, 稱爲運動質點的**速矢端線**(圖 11-2).

(4)**加速度**. 加速度是速度對於時間的改變率. 設在 t 時,質點的速度矢爲 $\boldsymbol{v}$, 在 $t+\Delta t$ 時,質點的速度矢爲 $\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$, 如圖 11-2 所表示; $\Delta\boldsymbol{v}$ 代表質點在 Δt 時間內速度的改變,因而每單位時間的平均改變率是

$$\overline{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

這稱為質點在 Δt 時間內的平均加速度．它是矢量，方向與速矢端線中的表示 Δv 的 QQ' 相同．

若 $\Delta t \to 0$，則速度對於時間的改變率的極限值，稱為質點在位置 P 的瞬時加速度，簡稱加速度，即

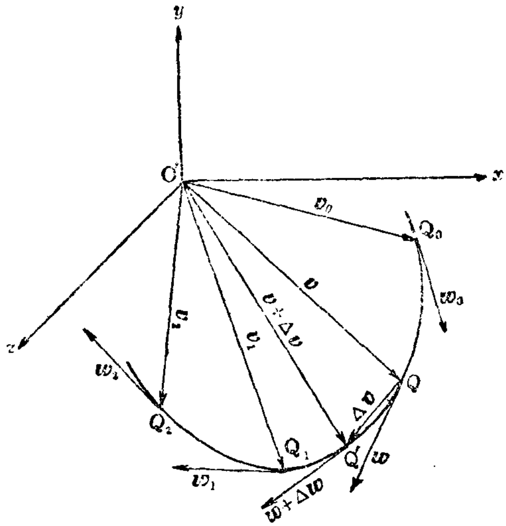


圖 11-2

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{r}. \qquad (11\text{-}4)$$

加速度矢的方向，與速矢端線上在 $\Delta t \to 0$ 時 Δv 所取的方向相同，即沿速矢端線在點 Q 的切線方向．顯然，這個方向一般並不是質點在路徑上點 P 的切線方向．加速度的單位是每秒每秒米（m/sec²），每秒每秒厘米（cm/sec²）等．

加速度也是時間的矢函數，即：

$$w = w(t). \qquad (11\text{-}5)$$

11-3. 位置、位移、速度、加速度的直角坐標表示． 對於實用問題，用矢量計算有時並不方便，宜用坐標法．本節單就通常採用的直角坐標制來講：

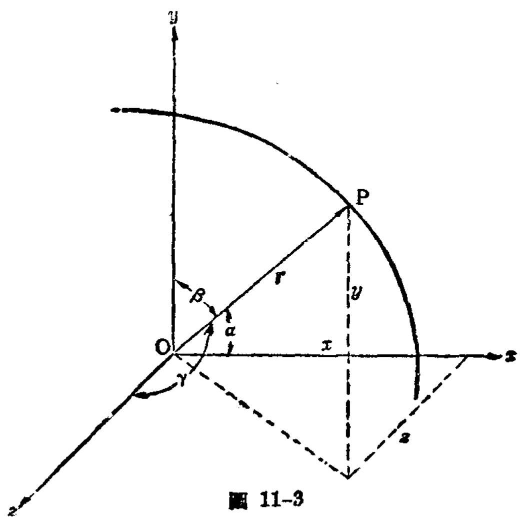


圖 11-3

(1)位置．以位置參照點 O 為坐標原點，在空間引作相互垂直的 x,y,z 坐標軸．於是質點在空間的任何位置 P，可用其坐標 (x, y, z) 表示．由

圖 11-3, 可見 x, y, z 分別爲位置矢 $\boldsymbol{r}$ 在三個坐標軸上的投影, 卽:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\boldsymbol{r}, x) = r\cos\alpha, \\ y &= r\cos(\boldsymbol{r}, y) = r\cos\beta, \\ z &= r\cos(\boldsymbol{r}, z) = r\cos\gamma, \\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}6)$$

(2) **位移**. 設在 t 時, 質點的位置爲 $\mathrm{P}(x, y, z)$, 在 $t+\Delta t$ 時, 質點的位置爲 $\mathrm{P}'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, 由圖 11-4, 可見: 質點的位移可用

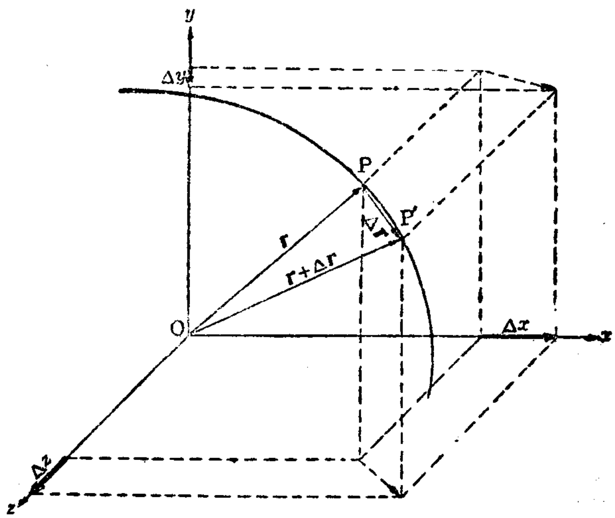


圖 11-4

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 表示, 它們分別爲位移矢 $\Delta\boldsymbol{r}$ 在三個坐標軸上的投影, 亦卽 $\Delta\boldsymbol{r}$ 在三個坐標軸方向的分位移. 卽:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \Delta r\cos(\Delta\boldsymbol{r}, x), \\ \Delta y &= \Delta r\cos(\Delta\boldsymbol{r}, y), \\ \Delta z &= \Delta r\cos(\Delta\boldsymbol{r}, z), \\ \Delta r &= \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}. \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}7)$$

(3) **速度**. 比率

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

分別表示質點在 Δt 時間內, 在 x, y, z 三個方向上的平均分速度, 在

$\Delta t \to 0$ 時，這三個比率的極限值便成為質點在位置 P 時在 x, y, z 三個方向的瞬時分速度，即：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \\ v_y &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \\ v_z &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}8)$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 既是位移矢 $\Delta \boldsymbol{r}$ 在坐標軸上的投影，所以 $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$ 代表平均速度 $\bar{v}$ 在坐標軸上的投影，因而可以推論到：v_x, v_y, v_z 是瞬時速度矢 $\boldsymbol{v}$ 在三個坐標軸上的投影，亦即 $\boldsymbol{v}$ 在 x, y, z 方向上的分速度。

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos(\boldsymbol{v}, x), \\ v_y &= v\cos(\boldsymbol{v}, y), \\ v_z &= v\cos(\boldsymbol{v}, z), \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}9)$$

上式中的 $(\boldsymbol{v}, x)$，$(\boldsymbol{v}, y)$，$(\boldsymbol{v}, z)$ 分別表示質點路徑在 P 處的切線與三坐標軸所成的角。已知 v_x, v_y, v_z 後，便可據上式求出 v，並決定此等方向角之值。

(4) **加速度.** 設在 t 時，質點的直角分速度為 v_x, v_y, v_z，在 $t + \Delta t$ 時，其分速度為 $v_x + \Delta v_x$，$v_y + \Delta v_y$，$v_z + \Delta v_z$，則

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \qquad \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \qquad \frac{\Delta v_z}{\Delta t},$$

三比率便分別表示在 Δt 時間內，質點在 x, y, z 三個方向的平均分加速度，在 $\Delta t \to 0$ 時，這三個比率的極限值，便成為質點在位置 P 時在 x, y, z 三個方向上的瞬時分加速度，即：

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ w_y &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ w_z &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}10)$$

根據與前述速度時的同樣推理，可知 w_x, w_y, w_z 分別是瞬時加速度矢 $\boldsymbol{w}$ 在三個坐標軸上的投影，亦即 $\boldsymbol{w}$ 在 x, y, z 方向上的分加速度，即：

$$\left.\begin{aligned} w_x &= w\cos(\boldsymbol{w}, x),\\ w_y &= w\cos(\boldsymbol{w}, y),\\ w_z &= w\cos(\boldsymbol{w}, z),\\ w &= \sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11-11}$$

合加速度 $\boldsymbol{w}$ 的方向，當然是速矢端線在點 Q（對應於質點的位置 P）的切線的方向． 在已求知 w_x, w_y, w_z 後，即可據上列四式求出 $\boldsymbol{w}$ 的大小及方向．

11-4. 位置、位移、速度、加速度的路徑表示． (1)位置． 另外一種便利的分析質點運動的方法，是路徑表示法．在運動質點的路徑上，選一參照點 S． 質點在各時刻的位置，用從 S 沿路徑至所論位置的路程 s 表示． 如圖 11-5，設在 $t=0$ 時，質點位置爲 P_0，可用自 S 至 P_0 的路程 s_0 來表示． 同樣，用路程 s_1, s_2 可分別表示 $t=t_1, t=t_2$ 時的質點位置 P_1, P_2． 路程 s 不是矢量，而是標量．

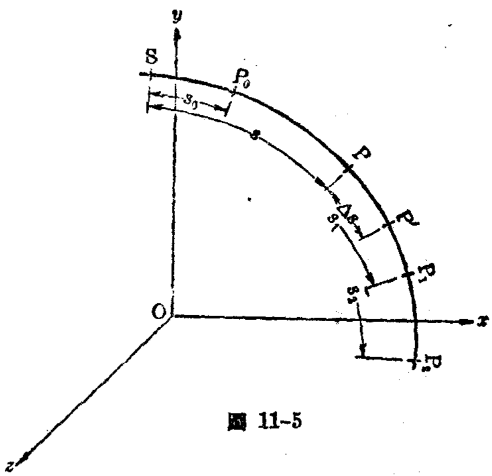


圖 11-5

(2)速度． 設在 t 時，質點位置是 P，在 $t+\Delta t$ 時，質點位置是 P'，這二點離開參照點 S 的路程分別是 s 及 $s+\Delta s$． 於是 Δs 便表示質點在 Δt 的時間內所行的路程．（Δs 是標量，並非是位移．） 因而質點每單位時間平均所行的路程是 $\bar{v}=\Delta s/\Delta t$，這稱做質點的平均速率． 速率是標量，與爲矢量的速度不同，必須辨清． 在 $\Delta t\to 0$ 時，$\Delta s/\Delta t$ 所取的極限值，便是質點在位置 P 的瞬時速率． 它也是標量．

試聯合觀察圖 11-1, 11-5，可見在 $\Delta t\to 0$，點 P' → 點 P 時，路程 Δs

與位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的絕對值是趨於相等的，因而質點在位置 P 的瞬時速率與瞬時速度的數值是相等的，卽我們可據下式來求質點的速度：

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \qquad (11\text{-}12)$$

速度的方向，是運動質點的路徑在 P 點的切線方向.

設在 $t-\Delta t, t, t+\Delta t$ 時，質點的空間位置分別在 P″, P, P′. 三點可以決定一個平面，並且決定一個圓. 在 $\Delta t \to 0$ 時，P″, P, P′ 三點決定的平面所取的極限位置，稱爲路徑曲線在點 P 的**密切面**. 這時，三點所決定的圓的極限位置，稱爲路徑曲線在點 P 的密切圓，它的半徑稱爲路徑曲線在點 P 的**主曲率半徑** ρ. 路徑曲線在點 P 的切線，位於密切面內. 在密切面內垂直於切線的直線，稱爲主法線，主法線是通過路徑曲線在點 P 的曲率中心 C 的. 通過點 P 而垂直於密切面的直線，稱爲仲法線.

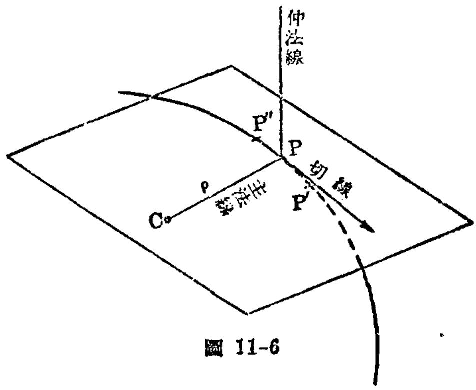


圖 11-6

運動質點在位置 P 的速度 $\boldsymbol{v}$，已知是在路徑曲線上點 P 的切線方向，所以將此速度按切線，主法線，仲法線互相垂直的三個方向分解爲分矢時，得到各分矢的數量如下：

切向分矢 $v_t = v = \dot{s}$,

主法向分矢 $v_n = 0$,

仲法向分矢 $v_b = 0$.

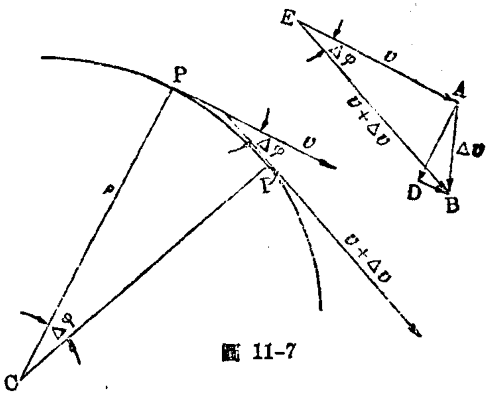


圖 11-7

(3) 加速度. 設在 t 時，運動質點的空間位置爲 P，速度爲 $\boldsymbol{v}$，在 $t+\Delta t$ 時，位置爲 P′，速度爲 $\boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v}$. 在 Δt 很微小，P 與 P′ 很接近時，質點運動路徑在 P, P′ 的

二切線便可決定一個平面，此平面在 $\Delta t \to 0$ 時的極限位置，便是上面所說的密切面，同樣，在 P, P′ 的主法線亦得相交於一點，在 $\Delta t \to 0$ 的極限位置，即上面所說的曲率中心 C，而 CP 便表示主曲率半徑 ρ. 這樣，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v}$ 二矢以及曲率中心 C 都位於同一的密切面內.

從任一點 E 引作 EA, EB，分別表示 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\Delta \boldsymbol{v}$，那末 AB 便表示 $\Delta \boldsymbol{v}$. 此 $\Delta \boldsymbol{v}$ 亦位於密切面內. 將 $\Delta \boldsymbol{v}$ 分爲兩個分量，AD 及 DB，各沿垂直及平行於 EA 的方向，即各沿路徑在 P 點的法線及切線方向. 於是，沿 P 點的切線及法線方向，速度對時間的改變率各爲

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{DB}}{\Delta t} \quad 及 \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{AD}}{\Delta t}.$$

當 $\Delta t \to 0$ 時，P′ 趨近於 P，DB 趨近於 $\mathrm{AB} = \Delta v$，故質點沿路徑切線方向的分加速度爲

$$w_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}, \qquad (11\text{-}13)$$

同時，AD 趨近於 $v\,\Delta\varphi = v\dfrac{\Delta s}{\rho}$，故質點沿路徑法線方向的分加速度爲

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\,\Delta s}{\rho\,\Delta t} = \frac{v}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (11\text{-}14)$$

又因當 $\Delta t \to 0$ 時，$\boldsymbol{v}$ 及 $\Delta \boldsymbol{v}$ 都在密切平面內，故質點沿仲法線方向的加速度爲

$$w_b = 0.$$

質點運動時，有沿路徑的切線方向的分加速度，是由於速度改變大小的結果. 若是速度只改變方向而不改變大小，則沿切線方向並無分加速度. 因此，質點以勻速率沿曲線運動時，$w_t = 0$. 質點運動時，有沿路徑的法線方向的分加速度，是由於速度改變方向的結果. 若是速度只改變大小而不改變方向，則沿法線方向並無分加速度. 因此，質點沿直線運動時，$w_n = 0$.

11-5. 直線運動. 若質點沿一直線運動，取該直線爲 x 軸，則

$$y = z = 0, \quad v_y = v_z = 0, \quad w_y = w_z = 0.$$

在任一瞬時，質點的位置只須用其 x 坐標表示. 時間改變，其 x 坐標也隨着改變. 因此，x 是時間 t 的函數，而位置方程爲

$$x = f(t).$$

根據方程 11-8 及 11-9, 可得速度方程及加速度方程各爲

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \tag{11-15}$$

$$w = w_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \tag{11-16}$$

當質點的位置方程已知時,可用微分法由方程(11-15)求得速度方程,由(11-16)求得加速度方程. 反之,若加速度方程已知,雖然也可用積分法求得速度方程及位置方程,但後二方程中含有積分常數. 當 $t=0$ 時的初位置坐標 x_0 及初速度 v_0 爲已知時,速度方程及位置方程可以完全確定如下:

由公式(11-16),得:

$$dv = w\,dt, \quad \int_0^t dv = \int_0^t w\,dt, \quad v - v_0 = \int_0^t w\,dt,$$

因此,
$$v = v_0 + \int_0^t w\,dt. \tag{11-17}$$

又由公式(11-18),得:

$$dx = v\,dt, \quad \int_0^t dx = \int_0^t v\,dt, \quad x - x_0 = \int_0^t v\,dt,$$

因此,
$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt. \tag{11-18}$$

再將公式(11-17)代入(11-18),卽得

$$x = x_0 + v_0 t + \int_0^t\int_0^t w\,dt^2. \tag{11-19}$$

有時,質點的位置坐標、速度、加速度三者不能用時間 t 的簡單函數表明,或是雖然可用簡單的函數表明,但微分與積分極爲複雜. 於此,可用曲線代替方程,而用圖解法代替微分積分法.

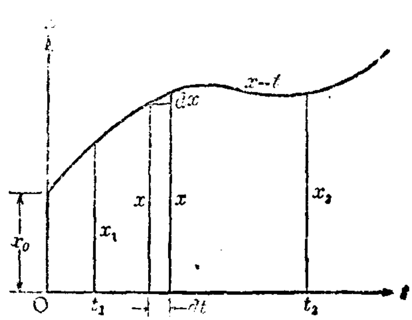


圖 11-8

以每一對 x 與 t 的對應值作爲

坐標，繪出一點，連接各點所成的曲線，即爲位置-時間(x-t)曲線，如圖 11-8 所示．此曲線的斜率爲 $\frac{dx}{dt}$，但 $v=\frac{dx}{dt}$，故 x-t 曲線上任一點的斜率，即按照某一比例尺(視 x 及 t 的比例尺而定)代表質點在該瞬時的速度．

同理，速度 v 與時間 t 的關係，亦可作速度-時間(v-t)曲線來表示，如圖 11-9．曲線上任一點的斜率爲 $\frac{dv}{dt}$，但 $w=\frac{dv}{dt}$，故 v-t 曲線上任一點的斜率，以某一比例尺(視 v 及 t 的比例尺而定)代表該瞬時的加速度．又因 $dx=v\,dt$，而 $v\,dt$ 表示 v-t 曲線下在 dt 一段內的面積，故該面積即代表 dt 時間內的位移．因此，v-t 曲線下在 t_1 到 t_2 一段內的面積，即代表 t_1 到 t_2 一段時間內的總位移，亦即質點在該段時間內所經的路程．

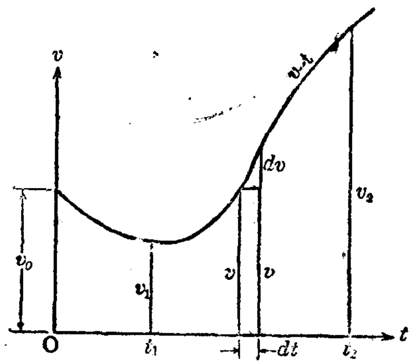


圖 11-9

與上述相仿，可畫出**加速度-時間**(w-t)**曲線**，並可證明該曲線下在 t_1 到 t_2 一段內的面積即代表 t_1 到 t_2 一段時間內的速率改變．

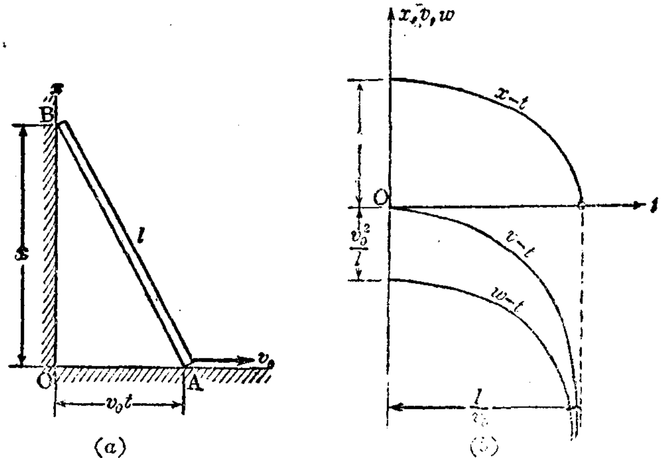
例題 11-1． 一質點作勻加速直線運動，其勻加速度爲 w_0，初速度爲 v_0，初位置坐標爲 x_0，試求其在任一瞬時的速度與位置坐標．

解：因 $w=w_0$ 爲一常數，故由公式(11-17)及(11-18)得速度及位置坐標各爲：

$$v=v_0+\int_0^t w_0\,dt=v_0+w_0t,$$

$$x=x_0+v_0t+\int_0^t\int_0^t w_0\,dt^2=x_0+v_0t+\frac{w_0}{2}t^2.$$

例題 11-2． 直桿 AB，長 l，在鉛直面內運動，A 端恆與水平地板接觸，B 端恆與鉛直牆壁接觸，如圖 11-10(a)．設該桿自鉛直位置開始運動，A 端的速度 v_0 保持不變，試畫出 B 端的位置-時間曲線，速度-時間曲線，及加速度-時間曲線．



(a) (b)

圖 11-10

解： 以 OB 爲 x 軸. 在瞬刻 t, $OA = v_0t$, 故 B 點的位置坐標爲

$$x = \sqrt{l^2 - (v_0t)^2}, \tag{a}$$

速度爲

$$v = \dot{x} = -\frac{v_0^2 t}{\sqrt{l^2 - (v_0t)^2}}, \tag{b}$$

加速度爲

$$w = \ddot{x} = -\frac{v_0^2 l^2}{(l^2 - v_0^2t^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{c}$$

在 $t = l/v_0$ 時，全桿成水平，故上列各式只在 $0 < t < l/v_0$ 時有效. 據(a),(b),(c)三方程,可點繪 B 端的 x-t, v-t, w-t 曲線,如圖 11-10(b)所示. 式(a)可化爲 $\frac{x^2}{l^2} + \frac{t^2}{(l/v_0)^2} = 1$, 故 x-t 曲線爲四分之一橢圓,其半軸爲 l 及 l/v_0.

例題 11-3 曲柄及連桿機構. 於汽機的汽缸中,有活塞 M,由活塞桿 AM 與十字頭 A 相連. 十字頭 A 由連桿 AB 與曲柄 OB 用銷 B 相連. 曲柄繞機軸 O 轉動時,活塞 M 作往復的直線運動. 設曲柄 OB 與汽缸軸所成的角 φ 與時間 t 成正比例而變化,即 $\varphi = \omega t$, 而 ω 爲常量❶. 試分別求活塞 M 的位置坐標、速度、加速度方程.

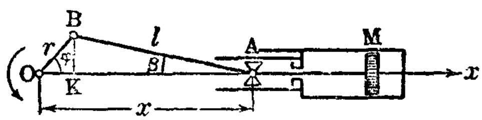


圖 11-11

解： (I) 位置坐標. 設以機軸 O 爲原點,汽缸軸線 OM 爲 x 軸,則活塞 M 即在 x 軸上作往復運動. 顯然,它與十字頭 A 的運動情形並無區別,因而原問題就成爲求十字頭 A 的運動方程. 命 r 及 l 分別代表曲柄 OB 與連桿 BA 的長度,β 代表連桿 BA 與 x 軸所成的角. 以曲柄 OB 與 x 軸的正向相重合時爲起算的時刻,則在時刻 t, OB 與 x 軸所成角

註❶ ω 代機軸轉動時的角速度,單位爲〔弳/秒〕,意義見 §12-3.