科學圖書大庫

實用近代數學

譯者 湯啓明 校閱 趙少鐵

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

實用近代數學

譯者 湯啓明 校閱 趙少鐵

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鍙　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年九月三十日初版
中華民國六十二年三月三十日再版

實用近代數學

定價　新台幣四十五元　港幣八元

譯者　湯啓明　淡江文理學院數學系理學士
校訂　趙少鐵　臺灣省立成功大學數學系主任

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱3261號　電話783686號
發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鍙　郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者　萬里彩色印刷股份有限公司

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同把人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之成就，已超越既往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人有無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本任務。培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如物理、數學、生物、化學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，至足欽佩！

科學圖書是學人們研究、實驗、教學的精華，明確提供科學知識與技術經驗，本具互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的收穫。我國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年所可苛求者。因此，本部編譯出版科學圖書，引進世界科技新知，加速國家建設，實深具積極意義。

本基金會由徐銘信氏捐資創辦，旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利。民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，返國服務者十不得一。另贈國內大學儀器設備，輔助教學頗收成效；然審度衡量，仍嫌未能普及，乃再邀承國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧滄氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱。「科學圖書大庫」首期編定二千册，凡四億言，叢書百種，門分類別，細大不捐；分爲叢書，合爲大庫。從事翻譯之學者五百位，於英、德、法、日文中精選最新基本或實

用科技名著，譯成中文，編譯校訂，不憚三復。嚴求深入淺出，務期文圖並茂，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，有教無類，效果宏大。賢明學人同鑑及此，毅然自公私兩忙中，撥冗贊助，譯校圖書，心誠胥善，悉付履行，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬菲薄，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，報國熱忱，思源固本，備居特切，至足欽慰！

今科學圖書大庫已出版七百餘册，都一億八千餘萬言；排印中者，二百餘册，四千餘萬字。依循編譯、校訂、印刷、發行一貫作業方式進行。就全部複雜過程，精密分析，設計進階，各有工時標準。排版印製之衞星工廠十餘家，直接督導，逐月考評。以專業負責，切求進步。校對人員既重素質，審愼從事，復經譯者最後反覆精校，力求正確無訛。封面設計，納入規範，裝訂注意技術改善。藉技術與分工合作，建立高效率系統，縮短印製期限。節節緊扣，擴大譯校複核機會，不斷改進，日新又新。在翻譯中，亦三百餘册，七千餘萬字。譯校方式分爲：(1)個別者：譯者具有豐富專門知識，外文能力強，國文造詣深厚，所譯圖書，以較具專門性而可從容出書者屬之。(2)集體分工者：再分爲譯、校二階次，或譯、編、校三階次，譯者各具該科豐富專門之知識，編者除有外文及專門知識外，尚需編輯學驗與我國文字高度修養，校訂者當爲該學門權威學者，因人、時、地諸因素而定。所譯圖書，較大部頭、叢書、或較有時間性者，人事譯務，適切配合，各得其宜。除重質量外，並爭取速度，凡美、德科學名著初版發行半年內，本會譯印之中文本，應即出書。欲實現此目標，端賴譯校者之大力贊助也。

謹特掬誠呼籲：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者，與從事科學建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者。

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或聯袂而來譯校叢書，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。祈學人們，共襄盛舉是禱！

校 閱 小 言

58年暑期接徐氏基金會來函邀本人譯書及校閱譯稿，過去對於徐氏基金會僅有所聞，後蒙基金會主持人徐氏在台北邀約會談，始悉基金會對於發展國家科學，尤其輔導一般失學青年能在工作之餘自修科學新知，甚爲欽佩。

本人於大學執教四十餘年，僅從事正規化教育，對失學青年之輔助教育甚少涉及，因之乃欣然同意接受此一工作，並邀學子黃德華，須忠中、柳賢諸君共同效力，期望能藉徐氏基金會之力，對於發展國家科學及輔導失學青年求知之心，切盡一份心力。

本書取材甚廣，無論是工程問題及最新管理科學均廣泛討論，對於工程從事人員之研究應用及大企業生產機構之事業推廣均大有裨益。

趙少鐵

59年4月

原　　序

本書之目的在闡明並指引一現代數學上重要發展的廣泛選擇。故具有此一特性之基本書刊，在過去二十年來因純數學之進步，與應用數學之發展而發生變化益顯其重要。

本書中之理論數學，包括了許多新的也極其重要的發展，例如對局論，彼曾廣泛地應用到許多問題上，從商業行政到工業競爭均為其應用之範圍。本書同時包含了許多對數學家並不陌生的標題，但彼在數學與基本數學之使用上，近年來卻扮演了極其重要的角色。這此種標題包括了點集論及其應用、數論、坐標系之變換及其幾何意義等。

本書中之應用數學為讀者準備了許多商業行政上新的使用方法，任由讀者選讀。像著名的"利潤與產品極大的極小值"（Problems of maximinization of profits and production ）和"價格與損失極小的極小值"(minimzation of costs losses)等，此等技巧普通包括了運輸問題，線性與整數計劃(linear and integer programming)，網流問題（Network flow problems ）與組合數學等。

變換式在本書中有詳細之解說，並對拉氏變換式在工程與工業控制問題的重要應用上亦有詳盡之解說。在或然率與統計此章中以現代的品質管理為其矢的。

本書是專為想要瞭解並使用此等新的方法自修者而編輯，故不需教師之指導，亦可為想要增廣在理論數學方面之知識者所使用。本書為數學叢書中的一本，其中每一本皆為想要增進運用數學方法與運算之能力者而設計。

目　　次

第一章
集合論、數及群

近代數學最引人的發展之一就是集合論的重要性及成長，其原因則完全由於數學的任一支系所討論的實質或事物均可看成某種特徵的集合，以致於可由集合論的公理引出它們的性質。

集合的觀念是直覺的，而且永遠表一堆事物。這事物（若用數學術語來講便是集合中之元素）可以任何種類的，它或許是所有的鳥所成的集合，也可能是所有瑞典人所成的集合。對於數學家而言，他們較感興趣的集合是所有質數所成的集合，所有實數所成的集合，所有正多邊形所成的集合，或者由 0，1，−1三數所構成的集合，或者其他數學東西所組成的集合。

集合論發展的程序是公理化的，而且它用了一套符號，這些符號所代表的意義都很清楚地被定義下來。集合論的整個結構完全基於公理的邏輯推演，並且剛開始時需要很虛心學習這些符號與公理。在本章中，我們將用文字介紹那些較不常出現的關係，以使符號的數量保持在最低限度。

§1 集合元素（Set Membership）

集合的基本觀念是屬於關係；若 x 是集合 A 內之元素，則我們將表爲

$$x \in A \qquad (1-1)$$

“屬於”是用“$\in$”符號來代替，小寫字母 x 用來表元素，大寫字母 A 卻是用來表集合；但因爲集合的元素可能仍舊是集合，小寫字與大寫字的用法也就不一定要遵循如此。

§2 相等（Equality）

第二個觀念是相等，其重要性一如在數學上的地位。集合 A 與集合 B 相等的關係是表爲

$$A = B \qquad (1-2)$$

而且等號關係的公理化定義是：

(1)兩集合相等的充要條件是它們擁有相同的元素；這句話的意思是集合 A 與 B 相等的充要條件是 A 集合的元素是 B 集合的元素，而集合 B 之元素

都是集合A的元素。

因此我們若要知道兩集合是否相等以前，必須清楚它們的元素，而表示集合中之元素通常用列舉和敍述兩種方法；舉個例子來解釋，若集合D由a，b，c，d四個元素組成，則D可寫成

$$\{a, b, c, d\} \tag{1-3}$$

或 $$\{a \in D: a \text{ 是字母中的第 } 1,2,3 \text{ 或 } 4 \text{ 個字母}\} \tag{1-4}$$

括號內通常是我們要列舉的事物或某敍述。該描述讀成"a爲集合D的元素：a爲字母中頭四個字母之一。"

當我們利用第二形式表一集合時，則能將集合的元素特性列舉出來。此種方法可以邏輯導出特徵公理（Axiom of Specification）。譬如說：上述之例題，集合D和A的關係，其特徵公理被敍述爲：

(2)給予任一集合A及任一條件$S(x)$，則我們可以對應出一集合D，D中之元素便是那些集合A中能滿足條件$S(x)$的元素。

換句話說，條件$S(x)$爲集合D的元素所具有的特性如同A中具有$S(x)$特性的元素。若A表由所有的字母所組成，則$S(x)$就是指字母中前四個中之任一個。故我們可將D表爲

$$D=\{x \in A: S(x)\} \tag{1-5}$$

§3 集合、部份集合及包括關係（Sets, Subsets, Inclusion）

在前一個例子中，由前四個字母所組成之集合D是由所有字母所組成集合A之部份集合，或們可以符號關係表為：

$$A \supset D$$

或者

$$D \subset A \tag{1-6}$$

若集合X與集合Y有$X \subset Y$之關係，則Y可能沒有X之外的元素，換句話說，X或許等於Y；如果不是這情形，Y必含有X所沒有的元素，則我們稱X是Y的眞部份集合（proper subset）。

我們取前敍的集合D，即

$$D=\{a, b, c, d\} \tag{1-7}$$

D包含自身的部份集合$\{a, b, c, d\}$，根據前敍定義，該部份集合非眞部份集合；D同時也包含有許多眞部份集合，擁有三個元素的部份集合計有$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{a, c, d\}$，$\{b, c, d\}$，擁有二元素的部份集合計有$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$，只有單個元素的部份集合

有 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$；還有一個部份集合——空集合（empty set），它的定義是沒有元素的集合。空集合是集合理論很重要的一環，而且每一集合均有此一部份集合，我們將之記為 ϕ。將 ϕ 看成 D 之一部份集合之後，我們不難發現 D 有十六個部份集合。

同理，當列舉出一集合中只含有 1，2，3，4 或 5 …個元素的部份集合，可推得一通式：若 n 是一集合內元素的個數，則該集合恰有 2^n 個部份集合。

我們應該注意的是在任何情形下，集合內之元素無次序關係；例如

$$\{a, b, c\}=\{c, b, a\}.$$

§4 集合的集合（Sets of Sets）

如果我們回溯到空集合的討論，則將會對集合的集合有具體的概念。ϕ 是空集合，它不含任一元素，但 $\{\phi\}$ 是一個以 ϕ 為其唯一元素的集合，同理 $\{\{\phi\}\}$ 是以 $\{\phi\}$ 為唯一元素的集合。於是乎，

$$\{\{\phi\}\}\neq\{\phi\}\neq\phi\text{，且 }\{\{a\}\}\neq\{a\}\neq a$$

我們將在下節討論此不等的符號"$\neq$"。

§5 否定（Negatives）

我們到此所介紹的三種關係都有其反意義。

以"$\in$"符號表示屬於的關係，其相反符號以"$\notin$"表之；於是乎，敘述「x 非集合 A 中之元素」記為 $x\notin A$；集合的相等關係，我們將之記成"$=$"，它也有一個相反符號"$\neq$"，於是乎，我們將集合 A 不等於集合 B 記為"$A\neq B$"；包含關係的符號是 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，它的否定符號是"$\not\subset$"或"$\not\supset$"，於是乎，我們將集合 A 不包含於集合 B 記為"$A\not\subset B$"或 $B\not\supset A$。

§6 聯集與交集（Unions and Intersections）

就如同數及其他數學上的東西一樣，我們可以對兩個或兩個以上的集合作一運算而得到另一集合。

兩集合之聯集（Union）是由所有屬於該兩集合之一的元素所成的集合；若 C 是集合 A 與集合 B 之聯集，我們記之為

$$C=A\cup B \qquad (1-8)$$

請參閱圖 1-1（用圖來解說研究集合論或邏輯上的推論的圖，我們稱之為 Venn 圖）。

在此圖內，集合 A 的元素便是大圓所包圍的元素，而由小圓內的元素組

成了集合 B，整個斜線條所圍成的地區就是 A 與 B 之聯集。

聯集的觀念並不限於兩集合，我們利用聯集公理可以把它擴展到任何數目的集合：

給予一大堆集合，則存在一個由所有屬於這堆集合之一（或許更多）的元素所組成的集合。要注意的是上述公理沒有表示出該集合不包含那一大堆集合以外的元素；爲了强調聯集的限制需用到下面的定義。

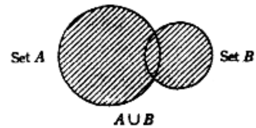

圖 1－1

我們將這堆集合以 C 表之，則聯集公理說明：爲任一堆集合 C，存在另一集合 D 滿足下列性質：若 X 爲 C 之一元素，$x\in X$，則 $x\in D$；若再以純符號表之，那就是

$$\{x\in D: x\in X, X\in C\} \qquad (1-9)$$

這公理可以一更簡明符號來表示：

$$D=\cup\{X: X\in C\} \qquad (1-10)$$

此處 D 是 C 中所有集合的聯集。

兩集合 A 與 B 的交集（Intersection）便是由同時屬於集合 A 與 B 之元素所組成的集合；若 C 是集合 A 與 B 的交集，我們記爲：

$$C=A\cap B \qquad (1-11)$$

請參看圖 1－2。

一如圖 1－1 一樣，大圓表集合 A，小圓表集合 B，斜線部份是 A 與 B 之交集。交集的概念並不限於兩集合，我們也可以將之擴展到任意數目的集合；圖 1－3 表出 A，B 與 C 三集合之交集。

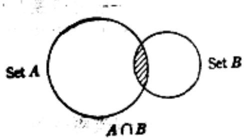

圖 1－2

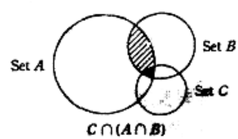

圖 1－3

在圖 1－3 內，三個圓分別代表三集合，淡淡的斜線部份是 A 與 B 的交集，而較明顯的斜線部份是 A，B 的交集與 C 之交集。

設 C 集合內的元素都是集合，則這一大堆集合的交集的通式是：

$$D=\{x: x\in X, X\in C\} \qquad (1-12)$$

D便是它們的交集；D也可寫成

$$D=\cap\{X : X\in C\} \qquad (1-13)$$

在三集合的交集裡，用到了二個運算符號，二者都是交集；集合論是由一個以上的符號交錯作成一套很重要的部份。下面一節我們進一步討論其中的關係。

§7　聯集與交集的應用

1．聯集與交集都遵守交換律，即

$$A\cup B=B\cup A \qquad (1-14)$$

$$A\cap B=B\cap A \qquad (1-15)$$

這兩式可以直接由定義與集合的概念推得；然而在本節中，所有式子的證明均將從略。

2．聯集與交集二者運算均滿足結合律，即

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C \qquad (1-16)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C \qquad (1-17)$$

3．交集對聯集的分配律成立，即

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad (1-18)$$

A與（B與C的聯集）的交集等於（A與B之交集）與（A與B之交集）的聯集。（請參看圖1－4）

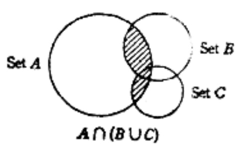

圖1－4

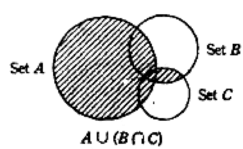

圖1－5

4．聯集對交集的分配律成立，即

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

A與（B與C的交集）的聯集等於（A與B的聯集）與（A與C的聯集）的交集；請參看圖1－5。

§8　差集（Complement）

對於集合欲作更深一層的討論，首先必須介紹差集。若A和B都是集合,

則B在A中的相對差集，（我們也稱之爲A與B之差）記作$A-B$，它是由所有不在集合B的所有A中元素組成，如圖1－6所示。

我們可以藉用差集，推得兩個很具權威的集合關係的公式，我們稱之de Morgan's法則，它們就是：

(a) $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$ (1－19)

(b) $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$ (1－20)

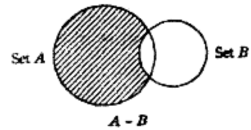

圖1－6

(a)式相當於下列的敘述：B在A中的相對差集與C在A中的相對差集之交集等於（B與C的聯集）在A中的相對差集。（圖1－7）

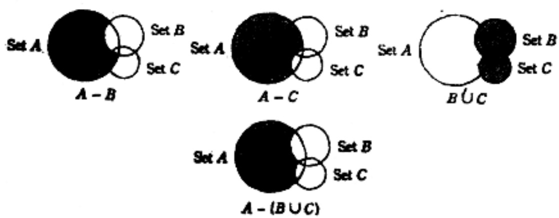

圖1－7

(b)式相當於下列的敘述：B在A中的差集與C在A中的差集的聯集等於B與C的交集在A中之差集。（圖1－8）

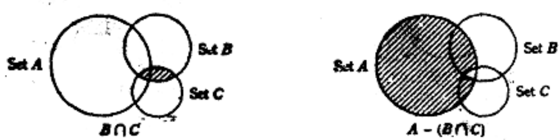

圖1－8

在de Morgan法則裡，兩者非常相像，其差別僅在聯集與差集的不同而已，所以我們稱它們爲dualization法則。所以若我們知道其中之一式，則另一式便知道了；事實上，許多集合論的定理也有相似的道理，以致於更容易去導出它們，也很方便的記憶下來。