

747820

3322

7/3113

連體力學

Continuum Mechanics

Second Edition

原著者：馮元禎

譯述者：蔡少偉 樓克安 林雄堅

科技圖書股份有限公司

74117

747820

22

3322

75113

7/S113

連 體 力 學

Continuum Mechanics

Second Edition

原著者：馮 元 禎

譯述者：蔡少偉 樓克安 林雄堅

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書名：連體力學
原著者：馮元禎
譯述者：蔡少偉 樓克安 林雄堅
發行人：趙國華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市復興南路一段360號7樓之三
電話：7056781・7073230
郵政劃撥帳號15697

七十一年七月初版

特價新台幣110元

初版序

本書專為準備開始學習一系列力學課程的理工科學生所編寫。在目前階段，學生通常已學過微積分、物理、向量分析、以及若干微分方程；連體力學課程，能作為讀者學習流體力學、固體力學、材料科學以及其他科學與工程分支學科的基礎。

根據我的看法，初學者對物理意義的探討，應着重對數學意義的探討。對經常使用連體力學的工程師與科學工作者而言，本書主要的吸引力在於其概念的簡單性，與應用的具體性。因此，應該儘早介紹給學生如何去應用。

對一個科學工作者或工程師來說，他必需找出答案的重點：如何將問題用公式表示出來？如何陳述支配的場方程式與邊界條件；如何選擇可替代的假設？何種實驗能證明或給予否定，或改進所作的假設？觀察是否澈底？何處將會產生誤差？欲得一合理解，需化多少時間？成本多少？這些都是主動的研究者所關心的，並且要以分析作為工具來解決問題。欲完全解答這些問題，勢必超出初級課程的範圍，但由此却能有好的開始。我經常在本書中，要求讀者將問題用公式來表示，而不問其是否能解出這方程式，亦或了解全部數學技巧，我知道許多讀者早已讀過很多書，或做過無數習題，但却未曾親自規畫問題。我希望讀者能學習另一種方式，由自己去尋找問題，然後努力去發掘解答的方法與訣竅。應該鼓勵每個人去觀察自然、思考工程上的問題，然後踏出一步，寫下支配方程式與邊界條件的一切可能組合。本書的宗旨在於推導基本的支配方程式。或者說「初級課程」只能要求做到這個地步而已。但欲達到這個地步，所必需做的預習却是廣泛的。為使在這階段學得踏實，首先必需瞭解一些力學的基本概念及其數學表示法，然後要很有自信地運用這些基本公式，並且更能洞悉其來源與演導過程。因此，基本概念的探討必需完整，此即本書在前十章

所作詳盡說明的理由。

關於本書的構成是：首先解釋連體的觀念，然後再完整地處理應力與應變的觀念。至於實際決定主應力與主應變的技巧以及相容性的概念，則分成兩章來強調。當然也考慮到運動的描述。第七章中將提出流體及固體的理想特性。第八章則詳述等向性的重要觀念。第九章陳述一般流體與固體的力學性質，第十章則處理一些基本的物理守恒定律。第十一章簡略地描述理想流體，黏滯性流體、邊界層定理、線性彈性理論、彎曲與扭曲理論與彈性波等一般特性。最後兩章是提出當作流體與固體力學豐富領域的一角。欲廣泛地探討，需要更高深的數學水準。相信本書必將有助於讀者作進一步踏入這些領域的準備。

若讀者能由本書得到有關應力、應變與本構方程式方面清晰的觀念，我認為這本介紹性的書算是成功了。此外，本書尚提出若干傳統問題。在習題中將給出許多討論，這些都是構成本書成為完整體系所必要的部份。

本書經常引用並多處取自本人以前所寫的「基本固體力學」(Foundation of solid mechanics)，此書可作為本書的續篇。這本「初級」書的內容，是本人在加州大學聖地牙哥分校授課時所編寫的，其重點在使學生研讀分門科學之前，作為加重一般科學之用。本書將有助於具有適度數學基礎與物理背景的大學生或資淺的研究生之用。

編寫本書，實是一次愉快的經驗。內人 Luna 擔任整個工作的協助；當我來到 La Jolla 後，身為數學工作者的她，放棄教書生涯，自願藉着閱讀原稿來學習些力學。由於她的細讀研考，提出了許多問題，使若干章節更為清晰。密西根大學教授尹嘉訓，曾讀完全部原稿，並提供許多有價值的意見。同時也感謝麻省理工學院的董賓博士，加州聖地牙哥大學 Gillert Hegemier 先生的指正。最後對賓的斯書局 Nicholas Romanelli 在編輯上的協助，李琳女士的安排索引，Barbara Johnson 女士快速而正確的打字與幽默感，使工作進行得非常愉快。

特致謝忱

Y. C. Fung 馮元祯

二版序

本書第二版修訂的主旨，是由學生的觀點來改進本書的實用性。但在初版序文中所標榜的最初宗旨，則仍保留不變。學生在接受若干基本研討後，很快察覺出本課程的重要性。但也需要更多例題與如何解答問題的細節。因而，例題與解答正是本版主要增加的內容。

第一章完全沒有改變，新的重點在於強調自由體圖解法的應用。因此，舉出許多例題與習題來說明。自然地，從桿與版的問題中引出應力張量的概念，而在第二章中予以討論。樑的問題是一種最有用而頗具實用性的力學問題。故簡支樑的理論，將在第七章中介紹。

在 1.4 節中，概述本書中所研討的輪廓。吾們特別強調第十章極為重要。若能精通該章內容，對你未來的工程與科學生涯中，將受益無窮。

馮元楨

編輯者言

本書為吾國學人馮元禎教授所著，為從事訓練尖端科學人才的最基本教材，早被風行全球的名著。原書曾在台灣翻印，但銷路不甚理想，至為可惜。查馮教授原任加州理工學院教授，後改任加州大學（聖地雅谷分校）主持研究人身力學的先導工作，為斯界有數的專家，十年前曾在台大任客座教授，著作等身，本書為其最近的增訂版本（1977年）。本公司曾於六十七年將其增訂版委託台大土木研究生樓克安、林雄堅兩位同學合作翻譯，經過一年時間交稿，再由本公司編輯部同仁細心校讀至六十九年付梓。不幸在交付時，承辦人將原譯稿連同原書在途中全部遺失，而樓、林兩君亦已學成離校，無從連絡，且因一稿再譯，在心理上一定索然乏味，因而未能踵門再託。適在同時，有成大化工研究所碩士來函，擬譯此書，遂欣然委託，實屬巧合。七十年四月將譯稿交來，再由編輯部重行校讀一遍，及後發現，若用本公司傳統的排印方式，需時過久，再重頭將已校讀的原稿改用另一種排印方式的要求，又全部改編一次以求早日問世。

鑑於本書是一本訓練尖端科學人才的入門書，對目前的學術界具有舉足輕重的影響力，故雖經數度挫折，仍堅持完成出版工作以供獻社會，而本局編輯部同仁，對本書先後作了三次重覆工作，以致影響其餘出版計畫亦所不辭，此亦可見本公司出版的態度。

本書目前的譯稿為蔡少偉碩士所主持，但樓、林兩位碩士所譯的稿件雖被遺失，他們兩位曾經付出不少心血，功不可沒。故在書面列上三位大名，以留紀念，並為說明如上，對樓、林兩位碩士深致歉意。

科技圖書公司編輯部謹誌

七十年十月十日

目 錄

初版序

二版序

編輯者言

第一章 簡 介

1.1 本課程的目的.....	1
1.2 何謂力學.....	2
1.3 連體力學.....	2
1.4 學習計畫.....	4
1.5 牛頓運動定律.....	5
1.6 平衡.....	7
1.7 自由體圖.....	10
1.8 特殊理論與一般理論.....	24

第二章 向量與張量

2.1 向量.....	35
2.2 向量方程式.....	38
2.3 求和規約.....	41
2.4 座標平移與旋轉.....	44
2.5 座標的一般轉換.....	49
2.6 純量、向量及卡氏張量的解析定義.....	50
2.7 張量方程式的意義.....	52
2.8 向量與張量的記號表示法：黑體字或指標？.....	53
2.9 商數規則.....	54

2 連體力學

2.10 偏導數	54
----------------	----

參考書目	58
------------	----

第三章 應 力

3.1 應力的觀念	59
3.2 應力分量的記號	61
3.3 運動定律與自由體圖	63
3.4 Cauchy 公式	65
3.5 平衡方程式	68
3.6 座標轉換下應力分量的改變	71
3.7 正交曲線座標的應力分量	73
3.8 應力邊界條件	74

第四章 主應力與應力主軸

4.1 簡介	86
4.2 平面應力狀態	87
4.3 平面應力的 Mohr 圓	89
4.4 主應力	92
4.5 剪應力	95
4.6 應力偏差張量	97
4.7 Lamé 應力橢圓球	100
4.8 三維應力狀態下的 Mohr 圓	101

第五章 形變分析

5.1 形變	115
5.2 應變	118
5.3 直角卡氏座標內的應變分量	120
5.4 微量應變分量的幾何說明	122
5.5 微量旋轉	124
5.6 有限應變分量	125
5.7 主應變, Mohr 圓	127

5.8 極座標內的微量應變分量	128
5.9 極座標中應變與位移間關係的直接演導	131
5.10 其他量度應變方法	133

第六章 速度場與相容性條件

6.1 速度場	147
6.2 相容性條件	148
6.3 三維應變分量的相容性	150
參考書目	155

第七章 本構方程式

7.1 材料性質說明	156
7.2 非黏滯性流體	157
7.3 Newton 流體	158
7.4 Hook 彈性固體	159
7.5 溫度作用的影響	162
7.6 更具複雜力學性質的材料	162
7.7 簡支樑定理	163
參考書目	178

第八章 等向性

8.1 材料等向性的觀念	179
8.2 等向性張量	180
8.3 三秩等向性張量	183
8.4 四秩等向性張量	184
8.5 等向性材料	186
8.6 應力與應變的主軸重合	186
8.7 其他表示等向性的方法	187

第九章 流體與固體的力學性質

4 連體力學

9.3 黏滯性	196
9.4 空氣的壓縮性	200
9.5 液體的壓縮性	202
9.6 固體的彈性	205
9.7 金屬塑性	208
9.8 金屬的理論強度	211
9.9 大形變、非線性彈性	213
9.10 黏滯彈性	216
9.11 非 Newton 流體	221
9.12 黏滯塑性材料	222
9.13 溶膠與膠質的轉換、復原性	224
參考書目	227

第十章 場方程式的演導

10.1 Gauss 定理	229
10.2 連體運動的實質描述	232
10.3 連體運動的空間描述	234
10.4 體積積分的實質導數	235
10.5 連續性方程式	237
10.6 運動方程式	238
10.7 動量矩	239
10.8 能量平衡	240
10.9 極座標的運動與連續性方程式	243

第十一章 流體的場方程式與邊界條件

11.1 Navier-Stokes 方程式	252
11.2 固體與流體界面的邊界條件	254
11.3 自由表面上的表面張力與邊界條件	257
11.4 動態相似與 Reynold 數	259
11.5 水平管或渠道中的層流	262
11.6 邊界層	266

9.1 流體	190
9.2 流體的抗拉強度	193
11.7 平板上的層流邊界層	269
11.8 非黏滯性流體	271
11.9 旋渦度與環流	273
11.10 無旋流	275
11.11 可壓縮非黏滯性流體	277
11.12 次音速流與超音速流	280
參考書目	290

第十二章 若干簡單彈性問題

12.1 均一等向性體的基本彈性方程式	291
12.2 平面彈性波	293
12.3 簡化法	295
12.4 Airy 應力函數	297
12.5 圓軸的扭曲	298
12.6 Saint-Venant 原理	303
12.7 樑	304
12.8 結論	306
參考書目	313

附錄 一般問題	314
---------------	-----

第一章 簡介

1.1 本課程的目的

我們的目的，在於學習如何演導問題，以及如何將含糊的問題與想法，簡化成正確的數學敘述。

考慮以下這些問題：一架飛機正掠過頭頂上方，為負載旅客與貨物的重，它的兩翼一定承受應變。試問兩翼到底承受多少應變？假如你飛的是用滑翔機，如遇砧雲 (anvil cloud) 出現，而熱流把它帶得更高，如此，你敢飛進雲層中去嗎？是否兩翼的強度足夠呢？你的前方可以看到「金門大橋」，吊橋上的鋼纜支持極大的負荷，那麼要怎樣設計這種鋼纜呢？雲中含有水份，鄉村地區正需要水，若在雲層中播放水滴晶種，即能產生雨水嗎？並且雨量是否足夠，而不致造成洪水呢？遠處一個核子反應發電站，其反應器內部的熱量是如何傳送的？反應器內有那種熱應力？又如何保證地震時該發電站能安然無恙？到底是怎麼回事而使地球會發生地震？想到地球，你可能對大陸的漂移、滑動或裂開感到驚奇；再看我們自己，我們是如何呼吸的？若做瑜珈和倒立，肺中又會有何變化？

令我們覺得有趣的是，這些問題皆可歸納成一些微分方程式與邊界條件來描述。因此，藉着解出這些問題，便可得到正確的數量資料

本書談到構成這些微分方程與邊界條件的基本原理。雖然一旦寫成方程式，然後再求出答案，是件愉快的事。但本書將不詳細討論這些解答。我們目的在於公式的推演，即將一般想法的法則，簡化成數學形式。這些數學問題可能不易解出，但經過許多科學與工程的訓練，人們已經設計出快速且有效的求解方法。上一代，科學與工程方面的學生花費難以計算的時間在學習解答微分方程式的技巧上，而今日這

2 連體力學

些工作很容易的由電算機來代勞

1.2 何謂力學

力學，是研究物質運動及引起運動的力的科學。它以時間、空間、力、能量與物質的概念為基礎。力學的知識，對於物理學、化學、生物學、工程學等所有分枝部門的研究，均屬必需；但考慮所有力學對我們來說，實在過於浩大。因此，本書僅論及連體的力學。我們關切的是適用於流體與固體的基本原理，至於專門科目的細節，則非本書討論的範圍。

1.3 連體力學

連續的觀念，導源於數學。我們說，實數系是個連續系統，即任兩個相異實數間必有另外一個實數。因此推知，兩個相異實數間有無限多個實數。直覺上，時間可用一個實數 t 來表示。三維空間也能以三組實數系 x, y, z 來表示。因此，我們將時間與空間當作一個四維連續系統。

將連續的觀念推廣到物質上，故可說物質在空間是連續分佈的。這最好拿密度的觀念來說明。假設物質的總量用質量來代表，且一些物質分佈在某一空間 $\mathcal{V}_0$ ，如圖 1.1 所示。考慮 $\mathcal{V}_0$ 中一點 P ，同時一序列的部份空間 $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots$ 收斂至 P 。

$$(1.3-1) \quad \mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_{n-1}, \quad P \in \mathcal{V}_n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

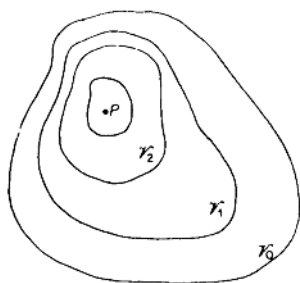


圖 1.1 一序列空間定義域收斂至 P 點

設 v_n 的體積為 V_n ，包含於 v_n 中物質的質量為 M_n 。當 $n \rightarrow \infty$ 且 $V_n \rightarrow 0$ 時，求出 M_n/V_n 的比值；假如 M_n/V_n 的極限存在，則此極限值被定義為 P 點處物質分佈的密度，而以 $\rho(P)$ 表示

$$(1.3-2) \quad \rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n}.$$

若密度在 v_0 中到處完全被定義着，則稱物質為連續分佈的。

同理，可以定義動量、能量等的密度。所謂連續物質乃是從數學觀點來看，其質量、動量與能量密度皆存在的物質。因此研究這種物質的力學，就是連體力學 (continuum mechanics) 了。本書是以這種數學觀點來建立連體力學。

在物質世界的問題中，連體力學具有廣泛的用途；但由於它是一種抽象的數學概念，故在應用的問題上，應小心考慮。特別在近代物理中，物質，被認為具有質點的構造，故調和質點觀念與連續觀念成為一致乃屬必要。明顯地，若視水由基本粒子所組成，則不再是連續體了。若依照 (1.3-2) 式的定義，來定義水的密度，當 v_n 的尺寸減至原子半徑大小時，我們將碰到了難題。假如 v_n 與 v_{n+1} 相差一個中子，則比值 M_n/V_n 與 M_{n+1}/V_{n+1} 將存在着有限差，同時也不難看出當顆粒到處移動時， M_n/V_n 的極值或不存在，或隨着時間與空間而起伏不定。為補救這種情形，我們將採取以下的彌補程序。考慮比值 M_n/V_n 。設 v_n 愈來愈小，但仍大到其內部含有大群粒子。在此限制下，比值 M_n/V_n 仍趨近於有限極值 $\rho(P)$ ，則定義 $\rho(P)$ 為物質的密度。換言之，相當與真實材料，我們定義一種數學上的連續，其與式 (1.3-2) 在嚴密觀點下得到的密度 $\rho(P)$ 相同，然後材料力學上作更進一步的分析，就能基於此種數學模式來進行。

事實上，使用這種彌補程序仍有缺點。水分子的因次大約為 $1 \text{ \AA}$ (10^{-8} cm)。因此，在不需顧及因次小於 10^{-6} cm 情況下來考慮問題中的水分子時，我們將可安心的視水為連體。在室溫時，地球表面空氣分子的平均自由路徑約為 $5 \times 10^{-6} \text{ cm}$ ，因此，考慮飛機附近空氣的流動時，可視空氣為連體。人類血液中紅血球的直徑約為 $8.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$ ；

因此，考慮在直徑為0.5cm的動脈中流動的血液時，可視其為連體。

在統計學上，這些觀點能處理得更為嚴密。氣體動力學，就是一個最好的例子。氣體分子的運動，可分成「隨意」(random) 運動與「系統」(systematic) 運動兩部份。前者提供的合動量為零，但仍具視作熱能的有限動能，而此熱能與絕對溫度有關。另一方面，系統部份（局部平均值）則提供連體力學中氣體本身整體運動的來源。因此，在真實世界裏，若將物質的連續視為一種數學的理想化，便可將其應用在忽略物質完美結構的問題上。當完美結構吸引吾們注意時，我們將回返到質點物理與統計力學。連續與質點的双重特性，可幫助我們將整個物理世界視為一體；譬如在近代光學裏，著名的例子是，有時視光為質點，有時却看成波動。

1.4 學習計畫

因為連體，是應用在一大群質點的抽象概念，故連體力學的目的在於描述這些質點在空間與時間的運動，（其特例則為平衡），以及影響此運動（或平衡）的所有力。多年來，連體力學已經發展出若干方便的方法，與一套準確的術語。我們將學習這些方法與術語。

首先從牛頓的質點運動定律開始，然後必需知道如何將 Newton 定律應用到質點系統，或是系統中的某一部份。上句中的最後四個字，將是了解力學的關鍵所在。為要曉得連體內某一部份是怎麼一回事，我們將那部份分開（在我們心中），並且檢視物體那一部份與另外部份間的作用。被分開的部份本身，視為一個整體，稱為自由體 (free body)。對學習連體力學的同學來說，自由體圖 (free-body diagrams) 經常去應用才是最重要的。本章將談此論題，並用許多例題來說明。

考慮物體某一部份沿着一個假想表面，在其他部份的作用力，便可導出應力 (stress) 的觀念。應力為向量，連體上任何部份的應力向量，決定於其所作用表面的方向，而表面的方向則由其法向向量來決定。因此，應力是與另外一個向量結合的向量。像應力這種量，稱為「二秩張量」(tensor of rank-two)。若使用張量的術語，則應力

的分析將可大為簡化。因此，在第二章中，我們離開本題，先對卡氏張量作一概略的介紹。

然後在第三與第四章，再對應力張量(stress tensor)的性質作一完整的討論。

第五章將考慮連體形變(deformation)的分析；在此，將可再度發現描述形變最佳的方法，是使用稱為應變(strain)的張量。第六章將討論形變的變化率。

每種材料皆有其獨特的力學性質。材料力學性質的數學描述，稱為材料的本構方程式(constitutive equation)。在許多材料中，有三種理想材料在工程科學與物理學上被研究的最為透澈，那就是非黏滯性流體，Newton 黏滯性流體，與 Hook 彈性固體。這三種理想材料的本構方程式將在第七章中表示。依其等向性(isotropy)而作的簡化，則留在第八章中討論。通常真實材料的性質與這些理想材料並不相同，故在第九章將談到若干工程上極為通用，而且很重要的材料。

現在談到第十章本科目的重心，亦即「場方程式的演導」(derivation of field equation)。連體力學的場方程式，就是對力平衡、質量平衡、以及能量平衡的敘述，(也就是動量、質量與能量守恒律)。對連體而言，這些平衡用應力與應變張量來表示，而邊界條件，通常是基於相同原理的補充描述。這些方程式加上本構方程式，乃是一般決定一個問題所必需的一切資料。因此，本書第十章中的內容最為重要。

剩下的兩章，提出有關流體及固體力學方面的一些特性。對於初讀本書的讀者，附有星號的章節可予省略。

學習力學，就像學習語言一樣，必需不斷練習與應用。因此，例題與習題，應是學習計畫的重要一環。以下先從複習Newton定律開始。

1.5 Newton運動定律

Newton運動定律，是基於經驗而獲得的抽象觀念。自發表後，三百年來已被用作所有問題的分析方法，只要運動的速度遠小於光速，此定律毫無例外的皆可使用。本書將考慮移動速率遠小於光速的系