

902880

结构矩阵分析 及程序设计

杜正国 主编



西南交通大学出版社

结构矩阵分析及程序设计

杜正国 主编

杜正国

彭俊生 合编

赵 雷

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书包括七章和一个附录。首先阐明矩阵位移法的基本原理和分析步骤,附有若干算例引导读者入门,并扩展到子结构法及其算例。通过对四种典型杆件结构(连续梁、桁架、刚架和组合结构)内力分析的计算机程序模块化设计方法介绍,说明与编制程序直接有关的诸如支座约束条件的前、后处理方法;结构刚度矩阵的几种存储技巧和相应的线性方程组求解技术等。对于变截面结构、弹性支座和空间结构的解法,也作了适当介绍。第七章介绍 IBM-PC/XT 微机操作方法。附录提供了平面刚架结构分析程序和相应的绘图程序文本及其使用说明。各章上机算例均显示相应数据文件及机器输出的全套计算结果。各章末附有习题。

本书可作为高等学校土建与结构工程类专业本科生的结构分析程序设计课程教材或结构力学补充教材,也可供有关工程技术人员和研究生参考。

结构矩阵分析及程序设计

JIEGOU JUZHEN FENXI JI

CHENGXU SHEJI

杜正国 主编

西南交通大学出版社出版发行

(四川 峨眉山市)

四川省新华书店经销

西南交通大学出版社印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 13.125

字数: 328千字 印数: 1~4000册

1989年9月第一版 1989年9月第一次印刷

ISBN 7-81022-116-7/T 042

定价: 2.60元

序

结构矩阵分析原理、方法及其在计算机上的实施是结构力学课程新增添的重要内容之一，也是随着计算机应用的普及，有关工程技术人员迫切希望补充的颇具实用性的知识。

高等工业学校结构力学课程教学基本要求规定，计算机应用是结构力学课程中的重要内容。掌握矩阵位移法计算杆件结构的原理与方法并初步具备使用结构计算程序的能力，已经作为工科本科（尤其是土建、水利类专业）学生学习结构力学课程必须达到的合格要求。

本书第一章内容介绍结构矩阵分析方法中关于矩阵位移法的概念和原理，是作者为西南交通大学土建类专业学生讲授结构力学课程中的“直接刚度法”内容，并经过修改补充写成的。第二至第六章内容的重点放在矩阵位移法的计算机程序设计及其实现方法上，内容组织力求便于教师作指导性讲授和培养学生计算机上实际操作的能力；通过对常见的四种杆件结构（连续梁、桁架、刚架和组合结构）的计算程序设计方法的讨论，涉及到关于支座约束条件的前、后处理方法，结构刚度矩阵几种存储技巧和相应的线性代数方程组求解技术，对于诸如变截面结构、弹性支座和空间结构等特殊问题也作了适当介绍。本书的第一至第六章都附有算例和适合初学者练习或上机实习用的习题。本书专辟第七章介绍 IBM-PC/XT 微机操作要领。书中附录为读者提供了平面刚架结构矩阵分析源程序和相应的绘图程序及其使用说明，程序全部采用 FORTRAN 77 语言。

本书一至六章由杜正国执笔，第七章和附录部分由彭俊生和赵雷两人合作完成，他们并对全书各章的算例和习题作了试算。

书稿先后承西南交通大学周其刚、唐昌荣两位教授审阅，并提出不少宝贵意见，编者借此谨表谢忱。

限于编者水平，书中难免仍存在缺点和错误，恳请批评指正。

编者

1989年3月

目 录

第一章 结构矩阵分析原理

§ 1.1	概述	1
§ 1.2	矩阵位移法基本概念	1
§ 1.3	矩阵位移法一般情形和计算步骤	7
§ 1.4	单元刚度矩阵	8
§ 1.5	单元刚度矩阵坐标变换	12
§ 1.6	结构刚度矩阵的组集方法	14
§ 1.7	关于等效结点荷载	19
§ 1.8	支座约束条件的两种处理方法	20
§ 1.9	矩阵位移法算例	22
§ 1.10	子结构法及算例	32
习 题		42

第二章 程序设计概述与初步训练

§ 2.1	概述	44
§ 2.2	程序设计及初步训练	45
习 题		46

第三章 连续梁计算程序设计

§ 3.1	概述	48
§ 3.2	基本数据及其读入	48
§ 3.3	结构刚度矩阵组集和修改——子程序 BSK 3	50
§ 3.4	系数矩阵的分解 Crout 法	51
§ 3.5	子程序 UTDU 3 和子程序 DBAK 3	53
§ 3.6	结点荷载列阵的生成——子程序 BFJP	54
§ 3.7	结点位移和杆端力计算——子程序 BINTF	57
§ 3.8	辅助子程序 PRIN、BOUT 和 BMFIG	58
§ 3.9	连续梁计算的主程序	60
§ 3.10	上机算例	61
§ 3.11	程序扩展(一)——变截面连续梁计算	70
§ 3.12	程序扩展(二)——弹性支座上的连续梁计算	71
习 题		72

第四章 平面桁架计算程序设计

§ 4.1	概述	73
§ 4.2	基本数据及其读入	75
§ 4.3	子程序 LSC 及子程序 TSTIF	76
§ 4.4	结构刚度矩阵半等带宽压缩存储	77
§ 4.5	结构刚度矩阵的组集和修改——子程序 TSK 2	80
§ 4.6	子程序 UTDU 2 和子程序 DBAK 2	83
§ 4.7	结点荷载列阵生成——子程序 TLOAD	85
§ 4.8	结点位移和各单元轴向力计算——子程序 TINTF	85
§ 4.9	辅助子程序 TFDT、TOUT、PRIN 和 TMFIG	86
§ 4.10	平面桁架计算的主程序	87
§ 4.11	上机算例	88
§ 4.12	程序扩展(一)——支座位移对结构的影响	95
§ 4.13	程序扩展(二)——空间桁架计算	96
习 题		98

第五章 平面刚架计算程序设计

§ 5.1	概述	99
§ 5.2	基本数据及其读入	101
§ 5.3	约束条件前处理法及相关子程序	102
§ 5.4	结构刚度矩阵变带宽一维数组存储	105
§ 5.5	组集结构刚度矩阵——子程序 FRSK 1	108
§ 5.6	子程序 UTDU 1 和子程序 DBAK 1	110
§ 5.7	结点荷载列阵的生成——子程序 FRLOAD 及相关子程序	113
§ 5.8	单元杆端力计算——子程序 FRINTE	116
§ 5.9	辅助子程序 GPSDT、FROUT 和 CLEAR	118
§ 5.10	平面刚架计算的主程序	119
§ 5.11	上机算例	120
习 题		127

第六章 平面组合结构计算程序设计

§ 6.1	概述	129
§ 6.2	关于单元类型变换矩阵 [C]	130
§ 6.3	利用 [C] 处理特殊单元固端反力	132
§ 6.4	单元类型信息数组	133
§ 6.5	识别单元类型和进行组合结构结点编号须知	134

§ 6.6	新增输入信息及 [C] 的形成	136
§ 6.7	结构刚度矩阵的形成——子程序 GPSK 2	137
§ 6.8	形成结点荷载列阵——子程序 GLOAD	140
§ 6.9	计算单元杆端力——子程序 GINTEF	142
§ 6.10	输出计算结果——子程序 GPSOUT	142
§ 6.11	组合结构计算的主程序	143
§ 6.12	上机算例	145
习 题		150

第七章 计算机操作方法简介 (IBM-PC/XT 微型计算机)

§ 7.1	基本操作	152
§ 7.2	DOS 命令简介	153
§ 7.3	行编辑程序 EDLIN 命令简介	158
§ 7.4	FORTRAN 编译	162
§ 7.5	FORTRAN 连接	163
§ 7.6	运行 FORTRAN 程序	164
§ 7.7	一个完整的 FORTRAN 操作过程	164

附 录

平面刚架分析和绘图源程序及说明	167
-----------------------	-----

第一章 结构矩阵分析原理

§ 1.1 概 述

结构矩阵分析为工程中不同的杆件结构计算问题提供了一种统一、紧凑和十分有规则的分析方法。这种分析方法与电子数字计算机成功地结合后，发展迅速并广泛应用于实际。特别是，它有效地解决了许多复杂结构的计算问题，从而使结构设计人员能从繁重的数字计算工作中摆脱出来，以便有更多的精力和时间，对所拟各种设计方案进行反复比较和研究后，决定一个较佳方案。结构矩阵分析付诸计算机实施的方法，对结构力学课程内容的革新、深化和发展产生了比较深远的影响。

采用矩阵方法进行结构分析，并不改变结构力学的基本原理。结构矩阵分析有两种平行的基本方法——力法和位移法。尽管这两种方法的基本未知量性质截然不同，但它们的解题步骤却是相似的，即先将结构分离（拆）成杆件单元并进行单元分析，获得单元力学特性；然后进行整体分析，将单元集合（装配）起来，使之满足变形条件和平衡条件，形成求解未知量的基本方程组；最后是解线性方程组，并求出结构的内力和位移。为了和大多数结构力学教材配套，本书只讨论矩阵位移法和相应的程序设计方法。

§ 1.2 矩阵位移法基本概念

（一）经典位移法的回顾

图 1.1(a) 所示两跨连续梁，结点 2 处有外力偶矩 M_2 作用。按手算方法解题时，通常只取结点 2 处的转角 θ_2 为位移法的基本未知量。

根据结点 2 处的平衡条件（见图 1.1(b)），由 $\sum M_2 = 0$

得

$$M_{21} + M_{23} = M_2 \quad (1.1)$$

由转角位移方程知

$$\left. \begin{aligned} M_{21} &= 4 i_1 \theta_2 \\ M_{23} &= 3 i_2 \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

式中， i_1 与 i_2 分别为杆 ① 和杆 ② 的线刚度（ EI/l 值）。

现将式 (1.2) 代入 (1.1)

得

$$4 i_1 \theta_2 + 3 i_2 \theta_2 = M_2$$

故

$$\theta_2 = \frac{M_2}{(4 i_1 + 3 i_2)} \quad (1.3)$$

当然，本例如按位移法的典型方程式求解，则该方程为

$$r_{22}\theta_2 + R_{2P} = 0$$

式中 $r_{22} = 4i_1 + 3i_2$, $R_{2P} = -M_2$

由此求出的 θ_2 显然与式 (1.3) 的结果是一样的。

θ_2 求得后，可进一步算出各杆杆端弯矩：

$$M_{12} = 2i_1\theta_2 = \frac{2i_1M_2}{(4i_1 + 3i_2)}$$

$$M_{21} = 4i_1\theta_2 = \frac{4i_1M_2}{(4i_1 + 3i_2)}$$

$$M_{23} = 3i_2\theta_2 = \frac{3i_2M_2}{(4i_1 + 3i_2)}$$

$$M_{32} = 0$$

该连续梁的弯矩图示于图 1.1(d)。

注意到上述解法中，两端支座结点的转角并不作为未知数看待。结点 1 处为固定端和结点 3 处为铰支座，这两个已知支承条件，在我们写出用未知转角 θ_2 表达的杆端弯矩表达式〔如式 (1.2)〕时，已经被考虑进去。因此该两跨连续梁的位移法未知数个数等于 1，即 θ_2 ，从而使得未知位移的求解工作为最简单。这一特点不仅体现在用手算位移法解连续梁过程中，而且也体现在求解其他形式的结构（如刚架）中。

(二) 矩阵位移法的概貌

为了便于位移法解算过程在电子计算机上进行，必须对经典位移法计算过程加以改造并采用矩阵方法。矩阵方法使运算公式表达紧凑、简明，各种情况可以统一处理，便于使计算过程实现自动化。

1. 为了使计算趋于自动化，我们先不考虑结构端部的支承情况，对于连续梁的每一个结点（包括两端的结点 1 与 3）都视作各有一个转角未知数，因此该两跨连续梁一共有三个未知数 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 ，并规定它们均以顺时针方向为正（见图 1.2）。

在每一结点处，根据力矩平衡条件建立如下三个方程：

$$K_{11}\theta_1 + K_{12}\theta_2 + K_{13}\theta_3 = M_1$$

$$K_{21}\theta_1 + K_{22}\theta_2 + K_{23}\theta_3 = M_2$$

$$K_{31}\theta_1 + K_{32}\theta_2 + K_{33}\theta_3 = M_3$$

(1.4)

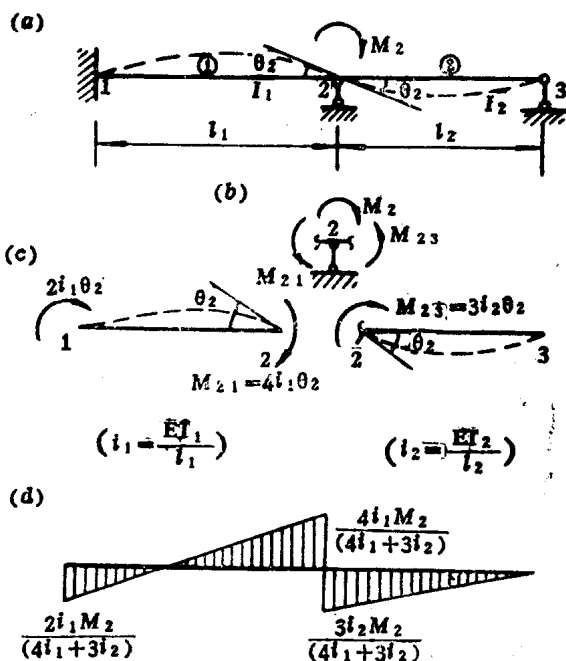


图 1.1

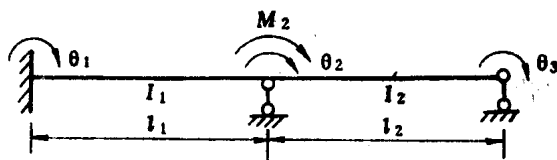


图 1.2

式中, 系数 K_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 称为结点刚度系数。它表示当 $\theta_i=1$ 时, 在 θ_i 方向引起的结点力矩。 M_1 在本例中代表支承 1 的固端反力矩; M_3 为零。

现将式 (1.4) 写作矩阵形式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

其简式为

$$[K]\{\theta\} = \{M\} \quad (1.6)$$

式中, $[K]$ 称为结构刚度矩阵; $\{\theta\}$ 为结点转角列阵; $\{M\}$ 为结点力矩列阵, 它的正方向与 θ 的规定一致。式 (1.6) 就是用矩阵位移法解等截面连续梁的基本方程。

2. 为了求出结构刚度矩阵 $[K]$ 中的各元素, 现引入单元刚度矩阵的概念。

对于连续梁中的任一杆件单元 (e) (如图 1.3 所示), 其左端的杆端位移为 θ_1 , 右端为 θ_2 (两端均无线位移); 相应的杆端力矩为 M_1 和 M_2 。

根据杆端转角位移方程, 显然有

$$M_1 = 4i\theta_1 + 2i\theta_2$$

$$M_2 = 2i\theta_1 + 4i\theta_2$$

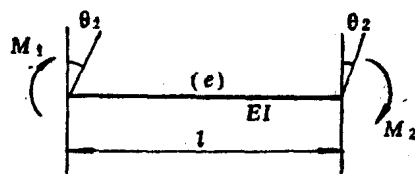


图 1.3

式中, $i = \frac{EI}{l}$ 。上式如写作矩阵形式, 则为

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [k]^{(e)} \{\theta\}^{(e)} \quad (1.7)$$

式中

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}$$

称为杆件 (e) 的单元刚度矩阵, 它实际上就是杆端转角——杆端力矩的变换矩阵。

对于图 1.2 所示例题, 可以写出

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$$

式中字母右上角括号内的上标表示所属单元编号。

3. 为了明确结点刚度系数和单元刚度系数之间的关系, 可以画出当 $\theta_1=1$, $\theta_2=1$ 和 $\theta_3=1$ 分别发生时的三个示意图, 如图 1.4 所示。根据图中各结点的平衡条件, 可以推知结点刚度系数是与会交于该结点的各杆件的刚度系数有关的。

于是, 可写出图 1.2 所示连续梁的结构刚度矩阵

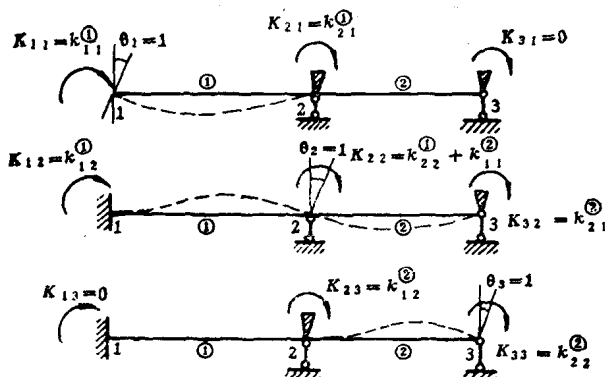


图 1.4

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ 0 & k_{31}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$$

联系式 (1.7) 与 (1.8), 知

$$[K] = \begin{bmatrix} [k]^{(1)} & 0 \\ 0 & [k]^{(2)} \end{bmatrix}$$

上述关于结构刚度矩阵 $[K]$ 和单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 之间关系的推导, 虽然在力学概念上很明确, 但是尚未实现计算的自动化, 不宜用于多未知数的结构。为改进此点, 可采取下列做法:

(1) 先确定 $[K]$ 的阶数, 这里应该是 3×3 , 并将其全部元素先视作零 (计算机术语叫冲零)。

(2) 将各单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 的行号和列号由单元的局部编码 (1、2) 改成相应于结构整体的位移编号, 如图 1.5 所示。

单元 ①

1 2 整体码
1 2 局部码

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

局部号 整体码

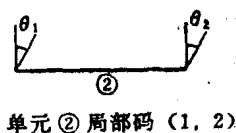
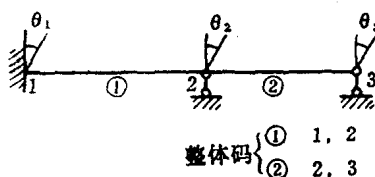
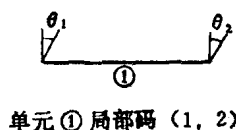


图 1.5

单元 ②

$$\begin{array}{cc}
 2 & 3 \text{----- 整体码} \\
 1 & 2 \text{----- 局部码}
 \end{array}$$

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \end{array}$$

$\vdots$
局部码

$\vdots$
整体码

(3) 将已经更改行、列号码的各单元刚度矩阵的全部元素，按其新的行、列号送到 $[K]$ 中去；如 $k_{11}^{(1)}$ 送入 K_{11} ， $k_{12}^{(1)}$ 送入 K_{12} ， $k_{22}^{(1)}$ 送入 K_{22} ， $k_{11}^{(2)}$ 也送入 K_{22} ， $k_{22}^{(2)}$ 送入 K_{33} 等等。凡是送入 $[K]$ 中同一位置上的两个数，令其自动做累加；凡是 $[K]$ 中空白的元素，表示各单元对该元素无“贡献”，实际上就是零。这一过程，称为直接由单元刚度矩阵组集结构刚度矩阵。结果应为：

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}$$

4. 引入已知支承条件，计算各结点位移未知数。本例的已知支承条件是 $\theta_1 = 0$ ，连同已经获得的 $[K]$ ，以及各结点的荷载值 (M_1 、 M_2 及 $M_3 = 0$) 一起代入各结点平衡方程式 (1.5)，得

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

为了求解未知转角 θ_2 、 θ_3 ，可将上式各矩阵按虚线分块，于是

$$\begin{bmatrix} 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

得

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{M_2}{2(4i_1 + 3i_2)} \\ \frac{M_2}{4i_2} \end{Bmatrix}$$

5. 由结点位移计算各杆端力

由公式 (1.7)
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = [k]^{(e)} \{\theta\}^{(e)} \quad (1.11)$$

对于单元①

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} &= [k]^{(1)} \{\theta\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_2}{(4i_1 + 3i_2)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{2i_1 M_2}{(4i_1 + 3i_2)} \\ \frac{4i_1 M_2}{(4i_1 + 3i_2)} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

对于单元②

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{23} \\ M_{32} \end{Bmatrix} &= [k]^{(2)} \{\theta\}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{M_2}{(4i_1 + 3i_2)} \\ -\frac{M_2}{2(4i_1 + 3i_2)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{3i_2 M_2}{(4i_1 + 3i_2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

为便于计算机接受结构支承约束情况信息（如那些结点位移为零的信息），编写计算程序时，通常可将式 (1.9) 中与 θ_1 对应的 $[K]$ 中主元（即 K_{11} ）赋予大数 A （如 10^{20} ），使该式变成如下形式：

$$\begin{bmatrix} A & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

这样做相当于把原来要剔除的方程式，改为如下特殊方程式而保留在方程组内：

$$A \cdot \theta_1 + 2i_1 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 = M_1$$

上式各项被大数 A 除后，变成

$$\frac{A \cdot \theta_1}{A} + \frac{2i_1 \cdot \theta_2}{A} + \frac{0 \cdot \theta_3}{A} = \frac{M_1}{A}$$

由于 A 为极大数，因此，除第一项中的系数为 1 外，其余各项可以认为都是零，因此在计算机内存中便出现

$$\theta_1 = 0$$

的结果。式 (1.12) 中的第 2 和第 3 两式随之调整为与式 (1.10) 完全相同。

6. 图 1.2 所示连续梁只受结点荷载作用。当结构受非结点荷载作用时，应先将非结点荷载化为等效结点荷载，按结点荷载建立式 (1.6) 所示基本方程并求解。在计算最后杆端内力时，再考虑非结点荷载的影响。

例如图 1.6(a) 所示连续梁承受非结点荷载作用。

第一步, 在各结点加上附加约束阻止结点转动 (如图 1.6(b))。这时, 各杆独立地承受各自的荷载。杆端固端力矩记作

$$\{M_0\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{(e)}$$

各结点的约束力矩分别等于在该结点汇交的各单元固端力矩之代数和。例如

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{01}^{(1)} \\ M_{02}^{(1)} + M_{01}^{(2)} \\ M_{02}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

第二步, 在各结点施加与约束力矩大小相等、方向相反的力矩 (如图 1.6(c))。

显然, 叠加图 1.6(b) 和 1.6(c) 两种情况, 即得图 1.6(a) 非结点荷载的情况。图 1.6(c) 中的结点荷载称为原非结点荷载的等效结点荷载, 即

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_{01}^{(1)} \\ -M_{02}^{(1)} - M_{01}^{(2)} \\ -M_{02}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

结构在非结点荷载作用下的内力由两部分组成: 一部分是在等效结点荷载作用下的内力, 如图 1.6(c) 所示; 另一部分是在结点受固结条件下的内力, 如图 1.6(b) 所示。前者可按式 (1.11) 根据求出的杆端位移和单元刚度矩阵计算。叠加这两部分内力, 便得到非结点荷载作用下各单元的杆端内力:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(e)} &= [k]^{(e)} \{\theta\}^{(e)} + \{M_0\}^{(e)} \\ &= \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(e)} + \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{(e)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

对于连续梁, 有

$$\theta_1^{(e)} = \theta_e$$

$$\theta_2^{(e)} = \theta_{e+1}$$

式 (1.13) 可写成

$$\begin{aligned} M_1^{(e)} &= 4i_e \theta_e + 2i_e \theta_{e+1} + M_{01}^{(e)} \\ M_2^{(e)} &= 2i_e \theta_e + 4i_e \theta_{e+1} + M_{02}^{(e)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

此式就是读者熟知的无侧移杆件的转角位移方程。

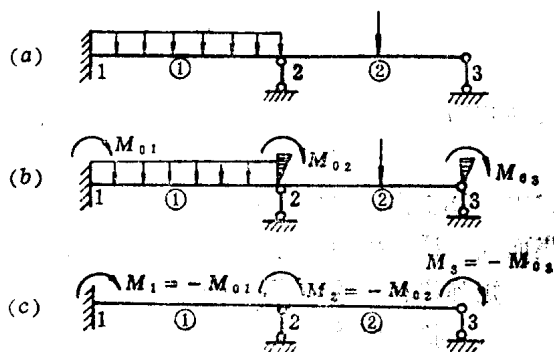


图 1.6

§ 1.3 矩阵位移法一般情形和计算步骤

设某结构全部结点上的结点位移总数为 n , 现暂时不考虑结构各支座的约束条件, 根据各结点位移方向上的平衡条件, 可写出如下用矩阵形式表达的基本方程

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

或简写为

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (1.16)$$

式中, $[K]$ 称为结构刚度矩阵, 它通过将各单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 的行列号换成整体码后组集而成; $\{D\}$ 和 $\{F\}$ 分别为结点位移列阵和结点荷载列阵。

矩阵位移法的计算步骤可归纳为:

1. 整理原始数据, 对单元和结点进行编号。
2. 计算各单元的单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 。
3. 把各单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 的行列号换成整体码, 并以此为依据将各 $[k]^{(e)}$ 的元素送入 $[K]$ 中的指定位置, 此步骤称为结构刚度矩阵的组集, 它是矩阵位移法的核心部分。
4. 在非结点荷载作用下, 计算各单元固端反力, 以求得等效结点荷载并形成 $\{F\}$ 。
5. 根据支承约束条件修改结构刚度矩阵, 形成求解未知结点位移的基本方程。
6. 解方程, 求出结点位移 $\{D\}$ 。
7. 根据结点位移和各单元刚度矩阵, 分别计算各单元的杆端内力 $\{f\}^{(e)}$ 。

§ 1.4 单元刚度矩阵

本节将列出等截面杆件在局部坐标系下的各刚度系数 k'_{ij} , 以及由全部 k'_{ij} 组成的单元刚度矩阵 $[k']$ 。所谓局部坐标系, 是以杆件的一端为坐标原点, 以杆轴方向为 x 轴, 垂直于杆轴方向为 y 轴, 如图 1—7(a) 所示。

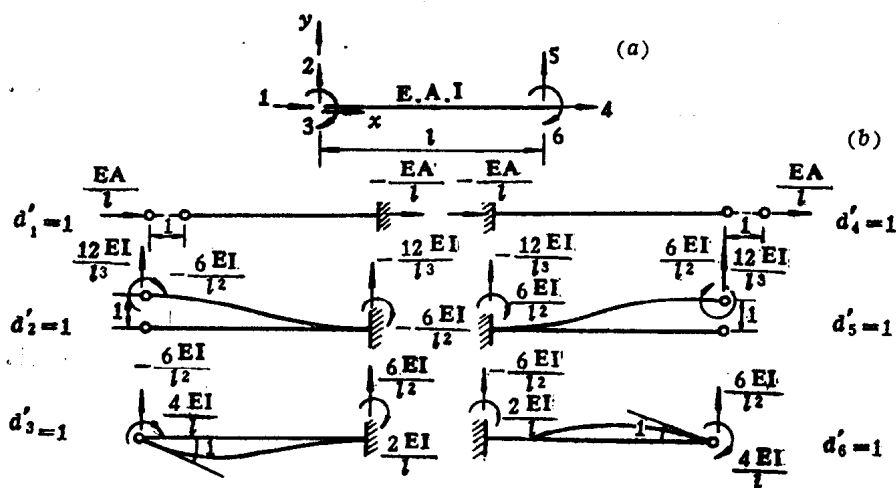


图 1.7

图中字母 E 为材料弹性模量, A 和 I 分别为截面面积和惯性矩, l 为杆件长度。

图 1.7(a) 表示一般平面杆系结构中的一根等截面杆件, 每个杆端有三个位移分量, 两端

共六个。与此相应共有六个杆端力，杆端位移和力的编号（起始端为 1、2、3，末端为 4、5、6）以及它们的正方向、杆件的局部坐标系如图 1.7(a) 所示。

今设 d' 为杆端位移，相应的杆端力以 f' 表示。它们的矩阵形式分别为：

$$\{d'\} = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad \{f'\} = \begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

现推导杆端位移与杆端力之间的关系式。图 1.7(b) 画出了六种单位位移分别发生时产生的各杆端力，即局部坐标系下单元刚度矩阵中的全部元素。引用位移法的结果，把六种情况下的各杆端力标于杆端，如图 1.7(b) 所示。

它们是：

当 $d'_1 = 1$ 时，有

$$k'_{11} = \frac{EA}{l}, \quad k'_{21} = 0, \quad k'_{31} = 0, \quad k'_{41} = -\frac{EA}{l}, \quad k'_{51} = 0, \quad k'_{61} = 0;$$

当 $d'_2 = 1$ 时，有

$$k'_{12} = 0, \quad k'_{22} = \frac{12EI}{l^3}, \quad k'_{32} = -\frac{6EI}{l^2}, \quad k'_{42} = 0, \quad k'_{52} = -\frac{12EI}{l^3}, \quad k'_{62} = -\frac{6EI}{l^2};$$

当 $d'_3 = 1$ 时，有

$$k'_{13} = 0, \quad k'_{23} = -\frac{6EI}{l^2}, \quad k'_{33} = \frac{4EI}{l}, \quad k'_{43} = 0, \quad k'_{53} = \frac{6EI}{l^2}, \quad k'_{63} = \frac{2EI}{l};$$

当 $d'_4 = 1$ 时，有

$$k'_{14} = -\frac{EA}{l}, \quad k'_{24} = 0, \quad k'_{34} = 0, \quad k'_{44} = \frac{EA}{l}, \quad k'_{54} = 0, \quad k'_{64} = 0;$$

当 $d'_5 = 1$ 时，有

$$k'_{15} = 0, \quad k'_{25} = -\frac{12EI}{l^3}, \quad k'_{35} = \frac{6EI}{l^2}, \quad k'_{45} = 0, \quad k'_{55} = \frac{12EI}{l^3}, \quad k'_{65} = \frac{6EI}{l^2};$$

当 $d'_6 = 1$ 时，有

$$k'_{16} = 0, \quad k'_{26} = -\frac{6EI}{l^2}, \quad k'_{36} = \frac{2EI}{l}, \quad k'_{46} = 0, \quad k'_{56} = \frac{6EI}{l^2}, \quad k'_{66} = \frac{4EI}{l}。$$

根据矩阵形式表示的单元刚度方程：

$$\{f'\}^{(e)} = [k']^{(e)} \{d'\}^{(e)} \quad (1.18)$$

显然，将以上 $6 \times 6 = 36$ 个刚度系数按式 (1.19) 排成矩阵，得

$$[k'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} & k'_{15} & k'_{16} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} & k'_{25} & k'_{26} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} & k'_{35} & k'_{36} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} & k'_{45} & k'_{46} \\ k'_{51} & k'_{52} & k'_{53} & k'_{54} & k'_{55} & k'_{56} \\ k'_{61} & k'_{62} & k'_{63} & k'_{64} & k'_{65} & k'_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$[k']$ 称等截面直杆在局部坐标系下的单元刚度矩阵。

对于只有轴向力和轴向变形的拉压杆 (如图 1.8) 的单元刚度矩阵, 可由式 (1.19) 删去其中第 2、3、5、6 行和第 2、3、5、6 列后得到, 如式 (1.20) 所示。

$$[k'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

在连续梁或无侧移刚架中, 如果忽略轴向变形, 则各单元在杆端只有角位移, 没有线位移如图 1.9 所示。单元刚度矩阵在 § 1.2(二) 中已经推导, 如式 (1.21) 所示。

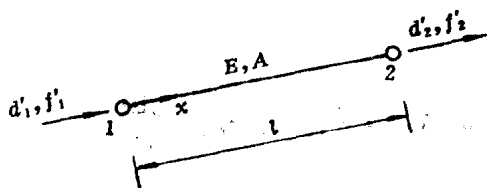


图 1.8

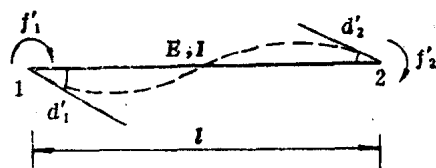


图 1.9

$$[k'] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

对于不计轴向变形, 但两端有垂直于杆轴的线位移的杆件, 如图 1.10 所示。单元刚度矩阵可由式 (1.19) 删去其中第 1、4 行和第 1、4 列后得到, 如式 (1.22) 所示。