

走向科学的明天丛书

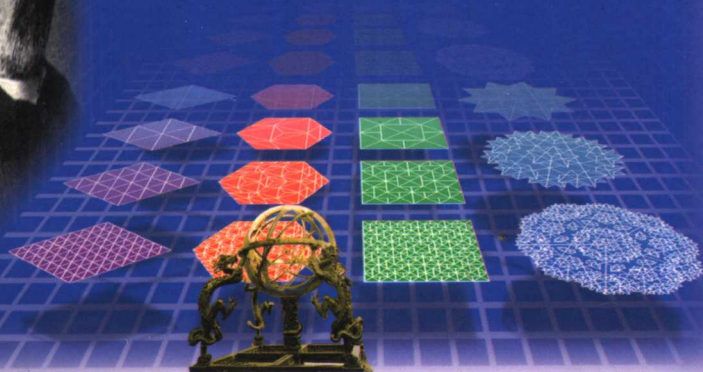
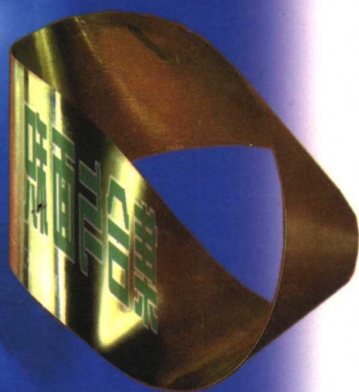
ZOUXIANG
KEXUE
DE
MINGTIAN
CONGSHU

集合与面积

JIHE
YU

MIANJI

李惠玲 金家樑等 著



广西教育出版社

WORLD LEADERS

集會與運動

100

100

Abstract



国家“九五”重点图书
出版规划项目

走向科学的明天丛书

集合与面积

李惠玲 金家樑 苏明剑 著
刘 珊 吴作章

广西教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

集合与面积/李惠玲等著. — 南宁: 广西教育出版社,
2000.4

(走向科学的明天丛书)

ISBN 7-5435-2981-5

I. 集... I. 李... III. ①集论-普及读物 ②测度
论-普及读物 IV. 0144-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 19549 号

走向科学的明天丛书

集合与面积

李惠玲 金家樑 苏明剑 著
刘 珊 吴作章

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码: 530022 电话: 5850219

本社网址 <http://www.gep.com.cn>

读者电子信箱 master@gep.com.cn

全国新华书店经销 广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 3.125 印张 插页 4 58 千字

1999 年 12 月第 1 版 2000 年 8 月第 3 次印刷

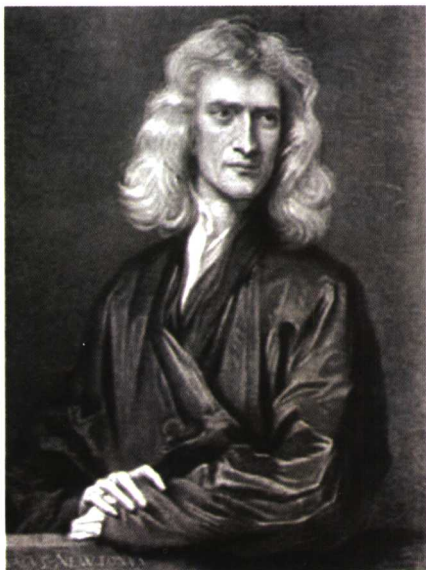
印数: 9 001—14 000 册

ISBN 7-5435-2981-5/G · 2265 定价: 6.50 元

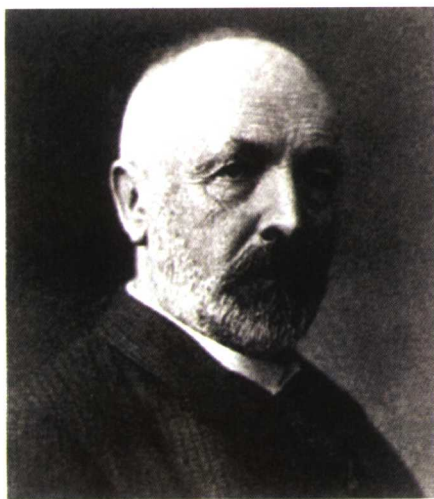
如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与承印厂联系调换



彩图 1 牛顿 (Issac Newton, 1642—1727), 出生于英国, 科学巨人, 微积分发明者



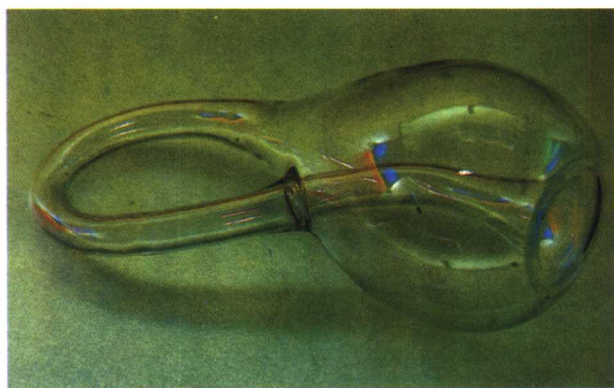
彩图 2 希尔伯特 (D. Hilbert, 1862—1943), 19 世纪末 20 世纪初的德国数学家。这是他 22 岁时的照片



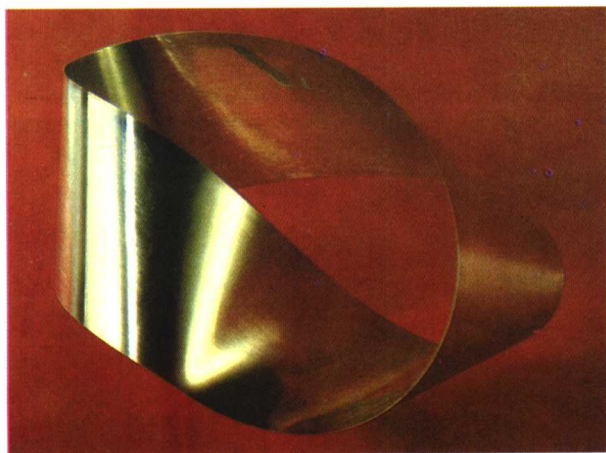
彩图 3 康托 (G. Cantor, 1845—1918), 德国数学家。集合论创始人



彩图 4 勒贝格 (H. Lebesgue, 1875—1941), 法国数学家。创立可数可加测度理论



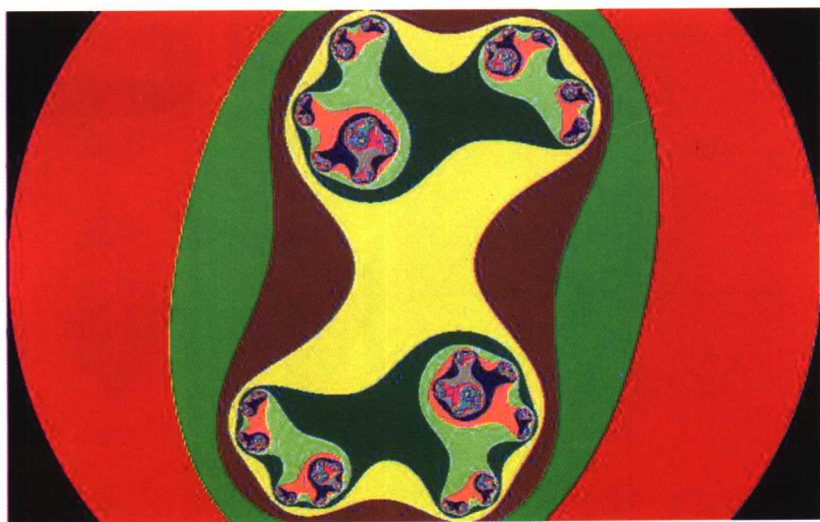
彩图 5
克莱因瓶



彩图 6
麦比乌斯带



彩图7 邮票照片。从右上角按顺时针方向依次是：
Lagrange，
Pascal，
Kovalevskaya，
Al Khuwarizmi，
Dedekind，
Newton，
Cauchy，
Ramanujan，
Bolzano



彩图8 Julia集

序

在世纪之交,我们这套《走向科学的明天丛书》问世了。这是一套面向青少年朋友的大型科普读物,是为了补充学校教育之不足,从数学、物理学、化学、天文学、地球科学和生命科学六大基础科学的历史发展、当前的成就、未来的璀璨远景,分类展示给读者。

本世纪末,有一股反科学的逆流,认为科学的时代已经过去。例如美国的约翰·霍根,他写了一本书《科学的终结》,他说:“科学(尤其是纯科学)已经终结,伟大而又激动人心的科学发现时代已一去不复返了!”与此同时,法国当代女巫伊丽莎白·泰西埃也写了一本畅销书《占星术——21 世纪的科学》,再加上那些“世纪末”的谣言和形形色色的邪教,把社会搅得似乎有点混乱。

然而,科学永远是照亮世界的火炬,光芒所至,一切邪魔歪道都会原形毕露。这套《走向科学的明天丛书》也正是告诉大家,21 世纪的科学非但不会终结,还将会有更大的发展。

为什么《走向科学的明天丛书》还是从数、理、化、天、地、生这老的六大基础科学讲起?因为我们不能割断人类认识客

观世界的历史,这是人类认识绝对真理的长河中的一个非常重要的环节,近代科学和未来的科学都是在这个基础上发展起来的,边缘科学、前沿科学……我们都在科学的明天中讲到了。有人不顾客观的科学发展的历史事实,主观地想把科学体系打乱,从而建立个人的“新科学体系”,这样只能把科学搞乱,给伪科学以钻空子的机会。

在80年代初期,科普界曾有过一场争论,那就是有人说知识的科普已经过时,科普的任务是普及科学思想和科学方法,而这个任务将由科学文艺(主要是科幻小说)来完成。我们说科学基础知识与科学思想和科学方法是刀与刃的关系,抛弃科学基础知识,科学思想和科学方法就成了无刀之刃,只是幻想与空话。科学基础知识越深厚,科学之剑也就越坚实,砥砺出来的剑刃也就无坚不摧。我们推出这套《走向科学的明天丛书》,也就是想让每一位读者都能得到这柄坚实的剑,而砥砺剑刃则需要读者们自己的努力了。

这套丛书的编写是在一批老科普作家支持下集体完成的,他们多年来在教育和科研第一线工作,如今大多已年近花甲或年过花甲,但为了科普事业的发展,他们仍然在百忙之中创作了这批精彩的科普作品,我们应该向他们表示衷心感谢。

最后,要特别感谢广西教育出版社,正是在编辑们的精心设计和组织下,这套《走向科学的明天丛书》才能与读者早日见面。

郭正谊

1999年8月20日

致青少年朋友

无论哪个国家,数学和本国语文都是学生的主课。这两科构成了人们最基本的文化素养。数学,则是最具国际性的学科。到20世纪中叶,世界各国的数学课程大体上是相同的。算术、几何、代数、三角成为人类基础教育的主题。这一切,古希腊的学者都已完成了,埃及、巴比伦、印度、阿拉伯和古代中国的数学家也都有特定的贡献。因此,现在的中小学数学内容,是人类的共同财富。

17世纪牛顿和莱布尼兹发明微积分,20世纪冯·诺依曼等发明了计算机,使得数学文明发生了巨大的变化。数学,以更新的面貌推动着社会前进。20世纪的数学发展,抵得上过去的几百年。现在的标准数学学科分类,有96门大学科,几百门小学科。现在世界上已经找不到能够通晓整个数学的数学家了。

一方面是中小学数学内容相对不变,另一方面是现代数学内容飞速发展。这二者间如何协调?除了加强中小学数学教育改革之外,对公众进行数学普及是一件大事。在“科教兴国”的今天,没有数学的普及是不可想像的。

2000年,被国际数学家联合会确定为数学家年,目的是让公众了解数学。

广西教育出版社出版《走向科学的明天丛书》,其中包括的数学学科一套共6册。数学学科的内容是如此广泛,一套科普丛书是不可能介绍完全的。我们只选择一些重要的、比较熟悉的部分向读者做一些力所能及的介绍,希望本丛书能帮助读者对当代数学及其前景作一管窥。

数学全套书由以下6册组成:

1.《数学的明天》,这是我个人对现代数学的一些感受,主要由一些新闻和故事组成,期望从整体上看数学。

2.《集合与面积》,这是一本涉及无限的书,是现代数学的精华部分,我们做了简单的描述。主要作者是李惠玲和金家樑。苏明剑、刘珊、吴作章写了一些初稿。

3.《精益求精的最优化》,反映了人类期望用数学方法求得精确控制经济、管理、军事以及生产过程的愿望。李惠玲是主要作者。参加写作的有施洪亮、刘开峰和刘玲。

4.《大千世界的随机现象》,主要介绍概率和数理统计的简单内容。当“降水概率”在电视屏幕上出现时,高中毕业生却全然没有在课堂上听说过“概率”,这是数学教育的悲哀。对这本书,我花了一些力气,刘萍作了一些整理工作。初稿由张东鸿、李雪峰、何君等完成。

5.《组合数学方兴未艾》,对未来会有重大发展的一门学科做了介绍。计算机是“离散”的,数据是离散的。“组合”爆炸是一个现实问题。书中谈了许多中国古代数学家的贡献。此书由王春萍、张建国写初稿。

6.《平面几何定理的机器证明》,是一本介绍当代中国数学家成就的普及性书籍。由江西师范大学孙熙椿教授撰写,

预想会受到读者的关注。

这套书是1998年动手写的。我拟订了提纲。开始时由华东师范大学数学系一批研究生写初稿,开过几次会。有些同学很用心,写得不错。不过毕竟第一次写作,需要改动之处甚多,有许多则完全是另起炉灶。我在匆忙中找李惠玲教授帮忙。她费了许多工夫。

由于匆忙,参与的人多,错误之处在所难免,对此心中十分忐忑,诚恳地希望读者原谅。

数学不像有些人宣传的那样,存在“数学危机”。数学在一日千里地前进。祝愿中国数学繁荣发展,尽早实现“21世纪数学大国”梦想。

张奠宙

1999年12月

写在前面的话

本书是《走向科学的明天·数学》丛书中最抽象的一本。不过,只要耐着性子读下去,就会回味无穷。这些内容虽然抽象,但却是20世纪数学的“华丽乐章”,一旦有所领悟,将会击节三叹,感到美不胜收。此外,你会知道“什么是好的数学,而什么是不大好的数学”。读完本书,也许会对你长期形成的某些陈旧数学观产生巨大的冲击。

确实,数学中有“大江东去”式的豪放型的理论构思,同时也有“小桥流水”式的“婉约”型的技巧制作。自从陷入中小学的“数学题海”之后,技巧派大行其是,而在数学发展史上所发生的数学理论变革,即那些激动人心的数学革命,几乎从数学教学中消失了。这里,我们想对20世纪以来数学发展的一个侧面——集合、维数、测度——做一个鸟瞰式的介绍,体会一下数学家创新的心迹。同时,这些内容也必将向21世纪延伸。陈省身在《微分几何讲义》一书中明确提出:“下一世纪数学的研究对象必然是流形。”本书当然不可能接触到当今的数学研究前沿,但是,为了理解今天数学家所努力追求的目标,“窥其一斑”大概还是可以做到的。

自从徐迟的名作《哥德巴赫猜想》发表以后,陈景润的数学工作为世人所景仰。这篇报告文学对中国数学发展起了重

大的作用,功不可没。文中把“解决哥德巴赫猜想”比喻为“摘取皇冠上的明珠”,这本无可。但是,听说不少人士以为“中国数学离世界最高水平”仅“一步之遥”,而“哥德巴赫猜想”就是世界数学的研究中心,产生了一种盲目乐观的情绪,这恐怕是徐迟先生所未曾想到的了。产生这样的错觉,其实是数学教学上的失败。因为我们没有向我们的中小學生,甚至一些大学生,适当地介绍 20 世纪以来数学发展的真实面貌。

今天的数学家有三类,第一类数学家是专攻数学难题的,例如,陈景润研究“哥德巴赫猜想”,“ $1+2$ ”的结果至今仍是世界上最好的。1993 年,准尔斯(Wiles)证明了费尔马猜想($x^n + y^n = z^n$,当 $n > 2$ 时无整数解),轰动了世界。第二类数学家是构筑数学模型,用来描述科学规律,解决工程技术难题,参与金融、社会、经济等重大决策。这是数学直接为社会发展服务的方面,中国数学在这方面比较落后,需要大力发展,迎头赶上。此处不赘。第三类数学家是面对一些“基本的数学问题”,构思理论,提供新的数学工具,提升数学理解的水平。确实,一些非常基本的数学问题现在还远远没有得到解决。就以代数方程的求根问题而言,一个未知数的 n 次方程一定有 n 个根,这在高斯时代已经解决了。可是,对于多变量的情形呢?我们却所知甚少。比如,两个未知数的方程

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

其解是一条曲线:圆。我们当然很清楚。可是,只要稍稍复杂一点,比如,有 4 个未知数的方程(爱因斯坦相对论认为现实空间是四维的)

$$x^2 + y^3 + z^4 + w^4 + x^2 y^2 z^2 + y w^4 - x w z + 1 = 0$$

它的根是什么?表示怎样的“曲面”?分为几块?各为几维?

曲面是否光滑？有没有奇点？二次曲线可以分类(椭圆、双曲线、抛物线)，高次曲面如何分类？用什么指标作为分类的标准？这些基本的问题到现在还远远没有解决。数学家绞尽脑汁，试图构造出一种理论，求得比较彻底的解决。20世纪已经过去，进展很大，但离开完全解决还非常遥远。21世纪必将继续努力。

上述这样的代数方程求解问题，与几何密切相关。一般方程的解，乃是一个高维曲面，现代数学中称之为“流形”。如果未知数 x, y, z, w 是复数，其解所成之曲面，便是“复流形”了。正如二维曲面有单侧、双侧之分，高维曲面的类型就远为复杂。代数几何学，微分几何学，纤维丛理论，大范围微分几何学等等，都是为解决这一基本问题而发展起来的。

显然，要解决这样的深刻问题，做几万道习题是不够用的，也不是算几麻袋草稿纸所能奏效的。关键在于面对现实，富于想象，善于表示，深于思考，敢于建构，有远大的理想，并脚踏实地去做。就这一层面来说，中学的数学学得再好，哪怕是得了“国际数学奥林匹克”金牌，在数学攻坚的国际竞赛中，恐怕还远未入门呢！

现在让我们回到本书。中学里引入了集合的概念。平面上点的集合也是一种图形，它是否有面积？这是本书的主旨。

20世纪的数学，先是从“无限”引起争端。康托的集合论是向“无限”进军的利器。可数与不可数，在无限王国里排成次序。“无限”是对人们认识能力的一种挑战，悖论也随之而来。数学基础是否牢靠，曾经是一个严重的问题，而且现在也不能算解决了。

无限集合有许多奇异的性质。康托三分集是一个杰出的例子，令人叹为观止。它所具有的分数维数，形成了当代数学

的新分支。

20 世纪初的勒贝格测度是人类深沉思考的产物,它和康托的集合论遥相呼应,创立的可数可加测度理论,终于导致积分学的一场革命。概率论在 20 世纪走向成熟,其根基正是勒贝格积分论。

群是解代数方程的产物。在大数学家庞加莱的手里,却成为描写曲面(流形)的工具。球面和环面有何不同,似乎只能意会不能言传,即使说了也不准确。好,庞加莱提出了曲面的基本群的概念,用完全准确的数学语言加以表达。这是真正好数学的范例。

总之,写这本书的目的在于使读者能够感受一下纯粹数学的一点气氛,让大家对 20 世纪的一些重大数学成果作一些欣赏,能够从内心感到数学的精美,并大声喝彩。

目 录

序

致青少年朋友

写在前面的话

无限集合	1
无限	1
希尔伯特的无限旅店	6
基数的困惑	11
芝诺悖论	16
罗素悖论	21
集合的维数	26
n 维欧氏空间	27
曲线和曲面的维数	29
海岸线的长度, 豪斯道夫维数	33
柯赫雪花曲线的维数	36
康托三分集的维数	40
西尔宾斯基地毯的维数	42
长度 面积 测度	50
长度公理、面积公理	50
内填外包法	57
测度公理	61
质量分布测度	66
概率测度	69
20 世纪的化圆为方问题	74
高维高次的时代	78