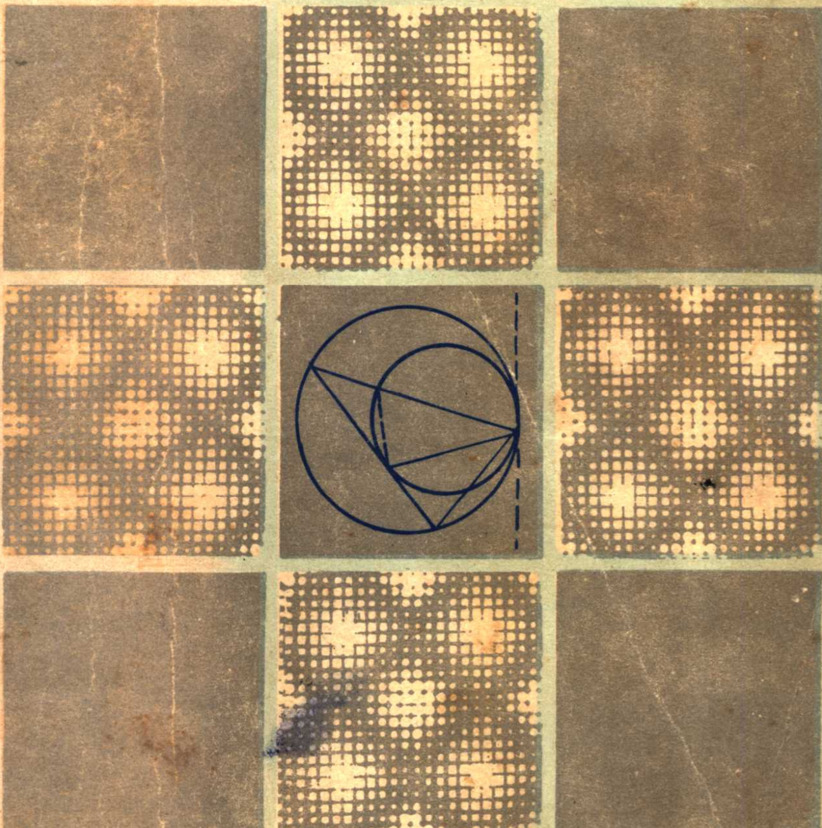
中学数学解题典型错误分析



福建科学技术出版社

中学数学解题典型错误分析

柯连平　黄警尘　黄则兴

福建科学技术出版社

一九八五年·福州

中学数学解题典型错误分析

柯连平 黄馨生 黄则兴

*

福建科学技术出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建福清印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 13.875印张 305千字

1985年6月第1版

1985年6月第1次印刷

印数：1—63,080

书号：15211·57 定价：1.93元

序

《中学数学解题典型错误分析》是从中学生解题容易产生错误的问题中，选出比较有代表性的题目编成的。作者从这些题目的错误解题中分析了它们产生错误的原因，指出了正确解答的方法，从而使读者正确地掌握数学的概念、审题、运算和证法等。

这本书可作为中学生的课外读物，对相当于中学水平的自学青年学习数学有帮助，对中学教师的教学有参考价值，也可以作为中学生开展课外活动的《问题征解》，让学生们找一找错在哪里？调动学生学习的积极性。

池伯鼎

1984年11月于福州

前　言

解答数学问题是学好数学基本知识，培养和提高各种能力的一种重要手段。但学生在解题过程中，往往由于概念模糊，或思考不周，或主观臆断，或偷换论题等，造成解题和证题的种种失误。对具有典型性、规律性和普遍性的错误题例进行深入地剖析，寻觅导致错误的原因，并通过分析归纳，导出正确的解题思想和解题方法，这对提高中学生分析问题和解决问题的能力，无疑是有很大帮助的。

本书包括中学的代数、平面三角、平面几何、立体几何和解析几何等部分，共筛选了学生解题中的典型错误490例。每个典型题例都有错解（错证）、分析、正解（正证）三个部分，有的题目由于错误的类型不同，也进行了多种分析，旨在提高学生的解题能力和发展学生的智力。

本书在内容上涉及的知识面较广，尽量覆盖了中学生在数学解题中的典型错误；在结构上按教材的顺序分门别类，由浅入深，从简到繁进行编写。

书末部分附上“错例类型索引”，把典型错例归纳为五大类：一、概念错误；二、审题错误；三、运算错误；四、证题错误；五、结论错误。并且还具体分出了26种不同的错误情况。其目的在于概括全书，起到提纲挈领的作用，同时也便于读者查阅。

读者在阅读本书时，对每一错例要认真思考，错在哪里？如何纠正？要做到心中有数，然后探求正确解法，尽量做到举

一反三，触类旁通。

本书可供广大中学生以及报考大、中专、电视大学的职工、青年自学，亦可供职工文化补习学校师生参考。

在编写本书过程中，蔡子朝、蔡辉煌、侯全胜、许远望、杨儒流、陈振兴、施惠民等老师提供了宝贵的意见，并得到晋江地区数学教学研究会有关同志的关心和帮助，最后又承蒙池伯鼎、庄天山、林铭荪等几位前辈审阅全文，在此一并致谢。

由于我们水平所限，书中的缺点、错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编著者

1984年7月

目　录

一、代　　数

（一）数　与　式

1. 1,580,000米等于多少公里?

错解　1,580,000（米）=1,580（公里）.

分析　错误在于"不名数"与"名数"混淆不清，片面记住"单位要括号"，而没有真正理解其意义.

正解　1,580,000米=1,580公里.

2. 已知a、$b\in N$，且$360a=b^3$，求a的最小值.

错解　$\because$　b^3是一个完全立方数，

$\therefore$　$a=360^2=129,600$.

分析　错误在于：(1)质因数概念理解不当；(2)题意理解不清. $a=129,600$固然能使$360a=360^3$，但a并非满足题意的最小值.

正解　$\because$　b^3是一个完全立方数，

又$360a=2^3\times3^2\times5a$，

$\therefore$　a的最小值为$5^2\times3=75$.

3. 已知三个连续整数的和与积相等，求这三个数.

错解　设三个连续整数分别为$x-1$、x、$x+1$，依题意得

$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)=(x-1)+x+(x+1)$

$x^3-x=3x$

$x(x^2-4)=0$

$\therefore$　$x_1=2$，$x_2=-2$（不合题意，舍去），

$x_3=0$（不合题意，舍去）.

故所求的三个数为1、2、3.

分析 整数概念错误．整数应包括正整数、零、负整数．故应把 $x_2=-2$ 和 $x_3=0$ 补回．

正解 ……… $x(x^2-4)=0$

$\therefore$ $x_1=2$，$x_2=-2$，$x_3=0$.

故所求的三个数为-1，0，1或-3，-2，-1或1，2，3.

4．叙述命题"若 a、b 均为偶数，则 $a+b$ 也为偶数"的逆否命题.

错解 逆否命题为"若 $a+b$ 为奇数，则 a、b 均为奇数".

分析 原命题与逆否命题是等价命题．若原命题真，则逆否命题亦真．但上述逆否命题不真（反例：$2+5=7$ 是奇数，但2不是奇数）.其实"a、b 均为偶数"的否定应包括：(1) a、b 均为奇数；(2) a、b 为一奇数、一偶数．而(1)、(2)统称应为"a、b 不全为偶数"或"a、b 至少有一个奇数".

正解 逆否命题为"若 $a+b$ 为奇数，则 a、b 不全为偶数".

5．若 $|ab|+1=|a|+|b|$，求实数 a、b.

错解 由已知得 $(|a|-1)(|b|-1)=0$，

则 $|a|=1$ 且 $|b|=1$，

故 $a=\pm1$ 且 $b=\pm1$.

分析 若 $A\cdot B=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$．上面的错误在于"若 $A\cdot B=0$，则 $A=0$ 且 $B=0$".

正解 由已知得 $(|a|-1)(|b|-1)=0$，

则 $|a|=1$ 或 $|b|=1$，

故当 $a=\pm 1$ 时，b 为任意实数；

当 $b=\pm 1$ 时，a 为任意实数.

6. 若 m、$n\in Z$，且 $|mn|=|m|+|n|$，求 m、n.

错解 (1)当 $m>0$、$n>0$ 时，$mn=m+n$ ①

当 $m<0$、$n<0$ 时，$mn=-m-n$ ②

①+② 得 $mn=0$，$\therefore$ $m=0$ 或 $n=0$；

(2)当 $m>0$、$n<0$ 时，$-mn=m-n$ ③

当 $m<0$、$n>0$ 时，$-mn=-m+n$ ④

③+④得 $mn=0$，$\therefore$ $m=0$ 或 $n=0$.

故 $m=0$ 或 $n=0$.

分析 (1)中条件"$m>0$、$n>0$"和"$m<0$、$n<0$"是互斥的，它们的结论不能进行运算；(2)的错误同(1).

正解 显然 $m=n=0$ 时，$|mn|=|m|+|n|$.

由 $|mn|=|m|+|n|$ 得 $|m|(|n|-1)=|n|$，

显然 $|n|>1$，同时可得 $|m|>1$.

(1)当 $|n|=2$、$|m|=2$ 时，$|mn|=|m|+|n|$；

(2)当 $|n|>2$、$|m|>2$ 时，$|mn|\neq|m|+|n|$.

故 $m=n=0$ 或 $m=\pm 2$，$n=\pm 2$.

7. 分解因式 $\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$.

错解 用 2 乘以原式各项，得

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$，

故原式 $=(x+y)^2$.

分析 这是把因式分解中的"恒等变换"与解方程中的"同解变换"混为一谈．因式分解过程应是恒等变换.

正解 $\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right)=\frac{1}{2}\left(x+y\right)^2.$$

8. 分解因式 $x^5+3x^3-2x^2-6$.

错解 原式 $=(x^3-2)(x^2+3)$

$$=(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x^2+3)$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt[6]{2})(\sqrt{x}-\sqrt[6]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x^2+3).$$

分析 错误有二：(1)因式分解概念不清.因为$\sqrt{x}$是无理式，故$(x-a^2)=(\sqrt{x}+a)(\sqrt{x}-a)$不称为因式分解；(2)没有注意在不同的数集中，分解的形式是不同的.

正解 (1)在 Z 或 Q 中，原式 $=(x^3-2)(x^2+3)$；

(2) 在 R 中，原式 $=(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})(x^2+3)$；

(3) 在 C 中，原式 $=(x-\sqrt[3]{2})\left(x+\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{108}i}{2}\right)$

$$\cdot\left(x+\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{108}i}{2}\right)(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i).$$

9. 移因式于根号内 $(a+b)\cdot\sqrt[4]{c}$.

错解 $(a+b)\sqrt[4]{c}=\sqrt[4]{(a+b)^4c}$.

分析 没有考虑所移动的因式是正的还是负的.

正解 $(a+b)\sqrt[4]{c}=\begin{cases}\sqrt[4]{(a+b)^4c}\ (\text{当 } a+b\geqslant 0 \text{ 时}),\\ -\sqrt[4]{(a+b)^4c}\ (\text{当 } a+b<0 \text{ 时}).\end{cases}$

10. 求$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$的算术平方根.

错解 原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)+1$$

$$=(x^2+5x+5)^2$$

故 $\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$

$$=\sqrt{(x^2+5x+5)^2}=x^2+5x+5.$$

分析 算术平方根是正数的正的方根，所以$\sqrt{a^2}=|a|$，应考虑 a 值的正、零、负问题.

正解 ……

故$\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}=\sqrt{(x^2+5x+5)^2}$

$$=\begin{cases} x^2+5x+5\left(\text{当 } x\leqslant\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\text{ 或 } x\geqslant\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\right); \\ -(x^2+5x+5)\left(\text{当 }\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

11. 化简 $\sqrt[24]{x^{12}y^{12}}+\sqrt[4]{121x^2y^2}$

错解 原式$=x^{\frac{12}{24}}y^{\frac{12}{24}}+\sqrt{11xy}$

$$=\sqrt{xy}+\sqrt{11xy}=(1+\sqrt{11})\sqrt{xy}.$$

分析 $\sqrt[4]{x^2y^2}$ 中 x、y 可取任意实数，而$\sqrt{xy}$ 中 x、y 应 $xy\geqslant 0$，故 $\sqrt[4]{x^2y^2}\neq\sqrt{xy}$. 同理$\sqrt[24]{x^{12}y^{12}}\neq\sqrt{xy}$.

正解 原式$=\sqrt{|xy|}+\sqrt{11}\cdot\sqrt{|xy|}$

$$=(1+\sqrt{11})\sqrt{|xy|}.$$

12. 化简 $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

错解 原式

$$=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}}$$

$$=2\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}.$$

分析 错在 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$. 这种错误常有出现，应切实防止.

正解一 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{2})^2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},$$

同理 $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

故 $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$$=\sqrt{2}.$$

正解二 设 $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $(x>0)$，
两边平方，得

$x^2=2+\sqrt{3}-2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}$

$x^2=4-2$, $\quad x^2=2$.

$\because$ $x>0$, $\quad\therefore$ $x=\sqrt{2}$.

故 $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

13. 计算(1)$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$；(2)$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$.

错解 (1)$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{3-4\sqrt{3}+4}$

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot 2+2^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$$

$$=\sqrt{3}-2;$$

(2)$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

$$=\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt[6]{9^2-(4\sqrt{5})^2}=\sqrt[6]{1}=1.$$

分析 (1)错误在于对算术平方根的意义理解不清，误认为 $\sqrt{a^2}=a$，实际上 $\sqrt{a^2}=\begin{cases}a\ (a\geqslant 0),\\ -a\ (a<0).\end{cases}$

(2)只有当 $a>0$ 时公式 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ $(m、n、p\in N)$ 成立．因为 $2-\sqrt{5}<0$，所以 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\neq\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}$，而 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=-\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}$.

正解 (1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\cdots=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=2-\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
$\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{4-5}=\sqrt[3]{-1}=-1.$

另解 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}=-\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}$
$\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}=-\sqrt[6]{1}=-1.$

14．已知 $\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x-3}=\dfrac{x\sqrt{x+1}}{x-3}$，求 x.

错解 要使等式成立，必须 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x-3\neq 0\end{cases}\Longrightarrow x\geqslant -1$ 且 $x\neq 3$.

分析 要使 $\sqrt{x^2(x+1)}=x\sqrt{x+1}$，必须 $x\geqslant 0$.

正解 要使等式成立，必须 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+1\geqslant 0\\ x-3\neq 0\end{cases}\Longrightarrow x\geqslant 0$ 且 $x\neq 3$.

15．已知 $\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$，求 $\sqrt{4x+x^2}$.

错解 由已知得 $x=a+\dfrac{1}{a}-2$.

则 $\sqrt{4x+x^2}=\sqrt{(x+2)^2-4}$

$$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$$

（1）当 $a-\frac{1}{a}\geqslant 0$，即 $-1\leqslant a<0$ 和 $a\geqslant 1$ 时

$$\sqrt{4x+x^2}=a-\frac{1}{a};$$

（2）当 $a-\frac{1}{a}<0$，即 $a\leqslant -1$ 和 $0<a\leqslant 1$ 时

$$\sqrt{4x+x^2}=\frac{1}{a}-a.$$

分析　解题过程没有注意到题给条件 $\sqrt{x}\geqslant 0$，其中隐含条件 $a\leqslant 1$，此时 $a-\frac{1}{a}\leqslant 0$.

正解　……，$\sqrt{4x+x^2}=\cdots=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$.

$\because$　$\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\geqslant 0$,

$\therefore$　$\frac{1-a}{\sqrt{a}}\geqslant 0$,

又　$\sqrt{a}>0$，则 $a\leqslant 1$,

此时 $a-\frac{1}{a}\leqslant 0$.

故　$\sqrt{4x+x^2}=\frac{1}{a}-a$.

16．若多项式 $x^4+4x^3+3x^2+px+q$ 和 x^3+3x^2+2x+1 除以 x^2+2x+1 所得的余式相同，求 p、q 的值.

错解　设 $f_1(x)=x^4+4x^3+3x^2+px+q$

$f_2(x)=x^3+3x^2+2x+1$

又　$x^2+2x+1=(x+1)^2$,

根据余式定理，有：

$f_1(x)$除以$(x+1)^2$所得的余式为

$R_1=f_1(-1)=(-1)^4+4(-1)^3+3(-1)^2+p(-1)+q$

$=-p+q$;

$f_2(x)$除以$(x+1)^2$所得的余式为

$R_2=f_2(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+2(-1)+1=1$,

由题设所知$R_1=R_2$，$-p+q=1$，即$q-p=1$.

故凡满足$q-p=1$的p、q值皆为所求.

分析 误用余式定理.

正解 用综合除法可得

$R_1=(p+2)x+q+2$; $R_2=-x$,

由题设所知$(p+2)x+q+2=-x$,

$\begin{cases}p+2=-1\\q+2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-3\\q=-2.\end{cases}$

17. 已知$t=4$，求代数式$\dfrac{5t-t^2}{20\times2\div t+60\div3\times t}$的值.

错解 原式$=\dfrac{5\times4-4^2}{20\times2\div4+60\div3\times4}$

$=\dfrac{20-16}{40\div4+60\div12}$

$=\dfrac{4}{10+5}=\dfrac{4}{15}$.

分析 在四则混合运算中，不仅要记住“先乘除，后加减”，还要注意“乘除中，乘在前先乘，除在前先除”.

正解 原式$=\dfrac{20-16}{40\div4+20\times4}$

$=\dfrac{4}{10+80}=\dfrac{2}{45}$.