管理数学简明教程

主　编
马续援　张义侠　李桂琴
主审　陈克式

Ⅲ　线性代数与线性规划

大连海运学院出版社

管理数学简明教程

主　编
马续援　张义侠　李桂琴
主　审
陈克式

第　三　册

线性代数与线性规划

大连海运学院出版社

内 容 简 介

本教程是受全国经济院校经济数学学会委托，由全国各地区、各类经济管理和管理干部院校统编，并由学会理事长陈克式教授主审的数学教材。本书包括低学时和高学时两个层次的内容，作作各类成人院校管理数学教材，也可供普通院校经济管理专业理科类大专或文科类本科使用。同时还可作为经济管理人员自学或参考用书。本教程的编写力求简明适用，说理清楚，便于自学，紧密联系现代管理专业实际。对每一重要概念，注意交待其产生的背景和实际涵义。侧重通过几何直观和具体实例阐明理论，讲清数学方法。注重有关现代化管理的数学模型。部分内容还附有计算机实用程序。教材分基本内容和选学内容两部分。全书共分三册。第一册高等数学（低学时 72，高学时 108）；第二册概率论与数理统计（低学时60，高学时84）；第三册线性代数与线性规划（低学时66，高学时80）。书内各章附有习题。

管理数学简明教程

第 三 册

线性代数与线性规划

主 编

马续援 张义侠 李桂琴

大连海运学院出版社出版（大连凌水桥）

大连海运学院出版社发行

大连海运学院出版社印刷厂印刷

责任编辑 刘泰山

封面设计 安 生

开本 787×1092 1/32 印张：12.5 字数：270千字

1988年5月第一版 1988年5月第一次印刷 印数：1—6200

ISBN 7—5632—0046—0/G·26 定价：4.35元

前　　言

管理数学是一门新兴的应用数学。针对它所涉及知识的广泛性，需要对数学的基础知识作必要的介绍，同时还应紧密结合专业特点，注重数学方法在经济管理中的实际应用，以便培养并不断提高学生分析问题、解决问题的能力。

本册《线性代数与线性规划》充分重视上述特点，既要保持数学自身的系统性，又侧重于数学理论与管理科学的结合，力求做到系统完整、学以致用。

本册分两篇共十章。第一篇线性代数，共五章，内容包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、投入产出数学模型。第二篇线性规划，共五章，内容包括线性规划的数学模型、单纯形方法、对偶线性规划、灵敏度分析、运输与分配模型。

为突出教材的先进性、针对性与实用性，在编写中充分注意尽量从经济问题的实例出发，引入概念、导出理论和阐明方法，以深化由具体到抽象、由特殊到一般、由感性到理性的认识过程；对于理论和公式，则着重阐明其实际背景及指导意义，而不过分强调严格的逻辑证明；在选材上，紧缩了一部分纯数学的内容，而拓宽了数学方法的应用范围。

经验证明，自学的困难往往是不能深入问题实质、掌握内在规律。因此，本教材在知识展开的同时，注意在不断提出问题、探索问题之中去解决问题，并加强了知识的归纳与小结。

书中，于各章末尾均配有适量的练习题，书后还附有线性规划完整解法的计算机程序，可供读者练习与操作，以提高处理实际问题的能力。

参加本册编写工作的有下列同志：

李桂琴编写第一篇的第一、二章和第二篇的第五章及附录；

张爱莲编写第一篇的第三、四、五章；

朱霄凤编写第二篇的第一、二章；

赵景文编写第二篇的第三、四章。

俞斯晟先生和张耀梓先生分别审校了本册第一篇和第二篇初稿，并提出了许多十分中肯的指导性意见。提高了本书的质量。

在本教程的编写、出版过程中，承蒙大连海运学院出版社、全国经济院校经济数学学会及本教程主审——学会理事长陈克武教授——热情支持、关怀和指导。特别是编辑部的刘泰山先生作为本册书的责任编辑，对本书做了认真的加工，提出了许多有益的意见，对保证本书质量起到重要的作用，这里一并表示谢忱。

本教程是由各经济管理和管理干部院校教师，在教学工作繁重的条件下协作统编的，加之编者的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，敬希同行专家和广大读者不吝赐教。

编　　者

1988年4月

目　录

第一篇　线　性　代　数

第二篇　线　性　规　划

第一篇 线性代数

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中最基本的概念之一，源出于对线性方程组解法的研究。行列式做为工具不仅应用于数学的许多分支，而且在一些应用学科的理论研究中也都有着广泛地应用。本章主要介绍行列式的概念、性质及计算，并给出 n 个未知元 n 个线性方程的方程组的求解方法——克莱姆法则。

§1.1 二、三阶行列式

一、二、三阶行列式的定义

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1-1)$$

用“消元法”来解，可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

于是，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，则方程组（1—1）有唯一解，可表示为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (1-2)$$

为了将解的形式表示得既整齐又便于记忆，而引用符号并规定为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{(规定为)}} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1-3)$$

如此规定的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，横排为行，竖排为列。其中每一个数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 都称为行列式的元素，i 为行标，j 为列标。如 a_{21} 则表示它是第二行第一列上的元素。可见，每一个元素都在某一行某一列上。而代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为此二阶行列式的**展开式或值**。

二阶行列式有两行、两列，4 个元素。其展开式中有两项：从行列式的左上角到右下角（称为主对角线）上的二元素之积为正项；从右上角到左下角（称为次对角线）上二元素之积为负项，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}a_{21} \qquad\qquad +a_{11}a_{22}$$

这就是二阶行列式的对角线展开法则，利用它很容易写出二阶行列式的展开式。

利用二阶行列式的定义或对角线展开法则，可将解式（1—2）中的二分子 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ 和 $b_2a_{11}-b_1a_{21}$ 依次表示为二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \text{简记为 } D_1$$

和
$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$
简记为 D_2

于是，二元线性方程组（1—1）的解（1—2），便可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (1-4)$$

这便是二元线性方程组（1—1）的公式解。其中分母行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

恰是方程组（1—1）中未知元的系数按原有次序组成的，故称为**系数行列式**。而分子行列式 D_1、D_2 是用方程组（1—1）的常数项列 b_1、b_2 分别代替系数行列式 D 中的第一列和第二列的结果。这样，二元线性方程组的求解问题，便归结为二阶行列式的计算问题。故此解法称为行列式解法。

例1.1 计算下列行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$，　（2）$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2x+1 & x \end{vmatrix}$

解 由二阶行列式的定义，有

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \times 2 - 3 \times 5 = -3$

(2) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{vmatrix} = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

(3) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2x+1 & x \end{vmatrix} = x^2 - (-1)(2x+1) = x^2 + 2x + 1$

例1.2 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

解 将原方程组改写为

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

而系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

由公式解（1—4），得方程组的唯一解

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-9}{-3} = 3$$

类似地，为讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1—5}$$

的解，可引入符号并规定为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1—6}$$

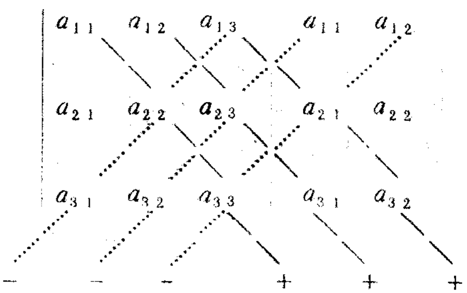
由（1—6）规定的符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1—7}$$

称为**三阶行列式**。（1—6）右端的代数和，称为三阶行列式的**展开式**。

三阶行列式有三行、三列、9个元素。其展开式有3！＝6项，其中三个正项，三个负项。

与二阶行列式类似，三阶行列式也有对角线展开法则：



即实线上三个元素之积取“+”号，虚线上三个元素之积取“-”号。

例如

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\times(-1)\times1+1\times3\times1+0\times0\times2-0\times(-1)\times1-1\times0\times1-2\times3\times2=-11$$

现在用消元法来解三元线性方程组（1—5），并利用三阶行列式的概念，当其系数行列式（1—7）$D\neq0$时，同样可得其唯一的公式解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}\qquad(1—8)$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

容易看出，公式（1—8）的三个分子的三阶行列式D_1、D_2、D_3，也是由三元线性方程组（1—5）的常数项列b_1、b_2、b_3分别代替其系数行列式D的第一、二、三列的结果。

例1.3 解三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+1=0\\ 2x_1+2x_2-3x_3-2=0\\ 3x_1+x_2-4x_3=0\end{cases}$$

解 将原方程组改写为标准形式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

利用行列式解法，须计算四个三阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -13$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

由于其系数行列式 $D \neq 0$，所以由公式解（1—8），可得方程组的唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-13}{-7} = \frac{13}{7}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7}$$

例1.4 计算下列三阶行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & b & 1 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

解 利用对角线展开法则来解：

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & b & 1 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix} = abc + 1\times 1\times 0 + 0\times(-1)\times(-1) - 0\times b\times 0 - 1\times(-1)\times c - a \times(-1)\times 1 = abc + c + a$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 2bc + 2ac + 2ab - 2ab - 2bc - 2ac = 0$

比较公式（1—4）和（1—8）可知，利用行列式来表示线性方程组的解，使得二元、三元线性方程组的解在形式上是一致的，又很便于记忆。但在实际问题中往往会遇到未知量不止三个的线性方程组，为了研究它们的解的情况，需要将二、三阶行列式加以推广而引进 n 阶行列式的概念。为此，我们完全有必要进一步分析二、三阶行列式的内在规律性，从而推广到 n 阶行列式中去。

二、三阶行列式的按行（列）展开

我们知道，二阶行列式的展开式只有两项，而三阶行列式则有六项，显然复杂得多。那末不禁要问：能否将三阶行列式用二阶行列式来定义呢？为回答这一问题，我们不妨将三阶行列式的展开式改为如下写法：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\underline{\text{按第一行元素集项}}\,a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}$$
$$-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1-9)$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\text{按第一列集项}}\,a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (1-9')$$

由（1—9）和（1—9′）可知，三阶行列式的展开规律是：将该行列式的第一行（列）的各元素乘以划掉该元素所在的行和列后剩下的二阶行列式，冠以正、负相间的符号，然后再求其代数和。

如果我们将 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列 $(i,j=1,2,3)$ 后剩下的低一阶的二阶行列式记为 M_{ij}，则有

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$