高等数学例题与习题集（一）

一元微积分

[俄] И.И. 利亚什科　А. К. 博亚尔丘克
Я.Г. 加伊　Г. П. 戈洛瓦奇　编著

蔡大用　高策理　王小群　译

清华大学出版社

84

[俄] И.И. 利亚什科 А.К. 博亚尔丘克
Я.Г. 加伊 Г.П. 戈洛瓦奇 编著

蔡大用 高策理 王小群 译

高等数学例题与习题集（一）

一元微积分

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

《高等数学例题与习题集》是一本目前在俄国具有广泛影响的高等数学辅导用书．在我国，无论是高等数学教材的编写方面，还是高等数学的教学方面，都与俄国的高等数学教育有着很深的渊源．因此将这套书译成中文，介绍给国内读者．

本书为《高等数学例题与习题集》的第一卷，内容是关于一元微积分的例题与习题，具体包括分析引论、一元函数微分学、不定积分、定积分四章内容．每章开始给出必要的理论材料，然后是各类典型例题的演算，最后是为读者安排的练习题，书末给出练习题的答案．

北京市版权局著作权合同登记号　图字 01-2001-0653 号

书　　名：高等数学例题与习题集(一)·一元微积分
作　　者：И. И. 利亚什科等 编著　蔡大用等 译
出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
　　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：刘　颖
版式设计：刘　路
印 刷 者：北京牛山世兴印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×960 1/16　印张：28.5　字数：604 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-05064-3/O·272
印　　数：0001～5000
定　　价：36.00 元

译　者　序

数学，无论从其对其他学科的影响上看，还是从数学自身发展上看，它的重要性都是不言而喻的. 高等数学，作为大多数理工科大学生的必修课，在锻炼同学的逻辑思维，以及为后续专业课程的学习打好基础方面，其重要性更是不言而喻的. 如何学好高等数学，仁者见仁，智者见智，但数学习题的作用是大家公认的.

《高等数学例题与习题集》是由四位俄国数学家所编写的一套高等数学辅导书，全书共 5 册，其中第 1 册包括分析引论，一元函数微分学，不定积分，定积分 4 章内容；第 2 册包括级数，多元函数微分学两部分内容；第 3 册包括含参变量积分，重积分与曲线积分两部分内容；第 4 册是关于复变函数的内容，包括数学分析基础，复数与复变函数，复平面上的初等函数，复平面上的积分，解析函数级数、孤立奇点，解析延拓，留数及其应用，解析函数几何理论的一些问题共 8 章内容；第 5 册是关于微分方程理论的内容，包括一阶微分方程，高阶微分方程，微分方程组，一阶偏微分方程，微分方程解的逼近方法，稳定性与相轨道，解线性微分方程的 Laplace 积分变换法共 7 章内容.

作者曾编写过高等数学习题集，本书的前 3 册是他们两卷本辅导书《数学分析例题与习题》的修改与补充. 本套书从 1997 开始出版发行，历时两年于 1999 年完成. 并已被翻译成西班牙文出版发行.

本套书采用统一风格，每章的开始给出必要的理论材料，然后给出各种类型的例题，最后是为读者准备的习题，书末给出习题答案. 全书共演算例题 2823 道，其中第 1 册 805 道，第 2 册 497 道，第 3 册 369 道，第 4 册 363 道，第 5 册 789 道；收录习题 1998 道，其中第 1 册 923 道，第 2 册 328 道，第 3 册 238 道，第 4 册 193 道，第 5 册 316 道. 这些例题涵盖了各部分内容的典型习题和较难处理的习题，这样既有利于帮助读者尽快地掌握解决典型题目的方法，促进对基本概念和基本定理的理解，也可以通过一些较难题目的解法来提高知识的综合运用能力，用以强化和锻炼综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 本书参考了许多知名的俄文版习题集，其中包括在国内久负胜名的吉米多维奇的《数学分析习题集》(人民教育出版社 1958 年翻译出版)，沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版)，菲利波夫等的《微分方程习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版). 例如，前 3 册中所演算的例题就包括了《数学分析习题集》中的绝大多数典型题和难题.

我国近代的高等教育，无论是在教材的编写方面，还是在教学方法方面，都与俄罗斯(前苏联)的高等教育有着很深的渊源. 因此，我们将此套辅导书翻译成中文，一方面给读者提供一套辅导书，另一方面，也将俄罗斯当代的高等数学教学水准介绍给国内高校的学

生和数学教师.

本套书并没有局限于高等数学教科书的内容,而是站在较高的角度来梳理高等数学中各部分内容之间以及它们与其他相关分支之间的关系,并且将一些相关分支的内容纳入到高等数学的背景下来讨论(反映在理论材料、例题演算和习题中). 例如,书中涉及到了集合论、线性空间、矩阵、函数逼近论等方面的内容. 这样有利于读者从全局上把握高等数学的知识,以加深对这些知识的理解和认识.

本套书的读者对象主要为工科院校的学生以及理科或师范院校数学系的学生. 对于广大的高等院校中的数学教师来讲,它也是非常有用的参考书.

本套书已由清华大学出版社自俄罗斯引进中文版权,准备分 4 册出版发行(原书第 2 册和第 3 册合并为一册). 清华大学数学系组织了多名教授、副教授翻译. 第 1 册的翻译分工为:第 1 章由蔡大用教授翻译,高策理副教授校对;第 2 章由高策理翻译,苏宁教授校对;第 3 章、第 4 章由王小群副教授翻译,高策理校对. 在翻译过程中,对原书中的一些印刷错误直接进行了修改,而没有加脚注说明.

本书的责任编辑为清华大学出版社的刘颖同志,他在文稿编辑、成稿校对等环节上花费了大量心血,做了很好的工作;另外数学科学系的萧树铁教授、谭泽光教授、白峰杉教授等对本书的翻译给予了很多支持与鼓励,在此向他们表示感谢. 北京大学俄语系的王辛夷老师、林百学老师在联系俄罗斯出版社及其他事情上给了译者很多帮助,在此表示感谢.

由于译者的水平所限,书中自有很多错误或者不妥之处,敬请读者批评指正.

译　者

2001 年岁末

前　　言

您手头的《高等数学例题与习题集》第一卷《一元微积分》，对于俄国读者来讲不是完全陌生的．本书的前三卷是两卷本《数学分析例题与习题》（作者相同）的修改与补充，这些作者在大学生中被称为“反吉米多维奇”学派．本书的第四卷和第五卷是首次出版，内容是关于复变函数与微分方程理论的．

本书参考了很多知名的习题集，其中有吉米多维奇的《数学分析习题集》，沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》，菲利波夫等的《微分方程习题集》．全部五卷保持同一种风格：每章开始给出必要的理论材料，然后演算各种类型的例题，最后给出为读者准备的习题，书末给出习题答案．

本书适用于工程师、应用数学专家、高等学校教师、大学生以及自学高等数学者．

目 录

第1章　分析引论

1　集合论初步

1.1　逻辑符号

在数学中常常直接用一些符号代替文字描述. 例如,符号 $\forall$ 表示"对于任意的"或者"对于每一个"或者"随便哪一个",而符号 $\exists$ 表示"存在"或者"能找到". 符号 $\forall$ 和 $\exists$ 称之为量词.

写法 $A \Rightarrow B$(蕴含)意味着由命题 A 的正确性可以导出命题 B 的正确性. 此外,如果从 B 的正确性还能得出 A 的正确性时,就写成 $A \Leftrightarrow B$. B 是 A 成立的必要和充分条件.

如果假设 A 和 B 同时成立,则写成 $A \wedge B$. 又如果假设 A 和 B 中至少有一个正确时就写成 $A \vee B$.

1.2　集合上的运算

集合的数学定义认为是直觉的,集合由规则或特性给出,根据这些特性或规则可以确定一个元素属于或者不属于这个集合.

集合用 $A=\{x\}$ 表示,其中 x 是集合 A 的一般属性的元素. 集合也往往写成 $A=\{a,b,c,\cdots\}$ 的形式,这里把集合 A 的元素写在花括号内.

下面将用到如下的记号:

$\mathbb{N}$—所有自然数的集合;

$\mathbb{Z}$—所有整数的集合;

$\mathbb{Q}$—所有有理数的集合;

$\mathbb{R}$—所有实数的集合;

$\mathbb{C}$—所有复数的集合;

$\mathbb{Z}_0$—所有非负整数的集合.

写法 $a \in A$(或 $A \ni a$)代表元素 a 属于集合 A.

写法 $a \notin A$(或 $A \not\ni a$)代表元素 a 不属于集合 A.

如果集合 B 的所有元素都属于集合 A,就称 B 是 A 的子集,表示为 $B \subset A$(或 $A \supset B$)(图 1). 永远有 $A \subset A$,这是因为集合 A 的每个元素仍然属于 A. 空集,即不包含任何一个元素的集合,表示为 $\varnothing$. 任何一个集合都包含空集,把它作为自己的子集.

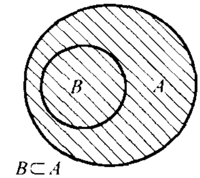

图　1

定义 1　如果 $A\subset B\wedge B\subset A$，则称 A 和 B 是相等的集，并记为 $A=B$.

定义 2　如果 $A\subset\mathscr{T}$，那些集合 $\mathscr{T}$ 中不属于 A 的元素所组成的集合称为 A 关于 $\mathscr{T}$ 的余集(图 2). 集合 A 关于集合 $\mathscr{T}$ 的余集用符号 $C_{\mathscr{T}}A$ 表示，或者，当对于哪个集合取余集是显然的时候，常常简记为 CA. 这样

$$C_{\mathscr{T}}A=\{x:x\in\mathscr{T}\wedge x\notin A\}.$$

如果 $A\subset\mathscr{T}$, $B\subset\mathscr{T}$，集合 B 关于集合 A 的余集称为 A 与 B 的差集，记做 $A\setminus B$(图 3)，即

$$A\setminus B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}.$$

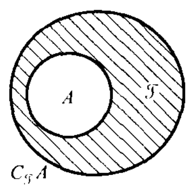

图　2

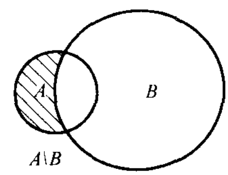

图　3

令 A 和 B 是集合 $\mathscr{T}$ 的子集.

定义 3　集合

$$A\cup B=\{x:x\in A\vee x\in B\}$$

称为集合 A 和 B 的并集(图 4).

类似地，如果 $A_j\,(j=1,\cdots,n)$ 是集合 $\mathscr{T}$ 的子集，则它们的并集是集合

$$\bigcup_{j=1}^{n}A_j=\{x:x\in A_1\vee x\in A_2\vee\cdots\vee x\in A_n\}.$$

定义 4　集合

$$A\cap B=\{x:x\in A\wedge x\in B\}$$

称为集合 A 和 B 的交集(图 5).

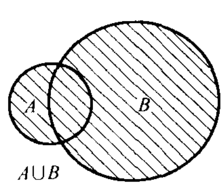

图　4

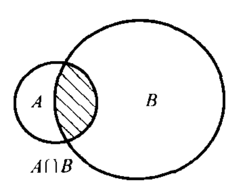

图　5

类似地，符号 $\bigcap\limits_{j=1}^{n}A_j$ 代表集合 $\mathscr{T}$ 的子集 $A_j\,(j=1,\cdots,n)$ 的交集，即

$$\bigcap_{j=1}^{n}A_j=\{x:x\in A_1\wedge x\in A_2\wedge\cdots\wedge x\in A_n\}.$$

如果对于每一个 $\mu\in M$ 对应某个集合 A_μ，则称给出了一个集合族 $\{A_\mu\}$, $\mu\in M$. 在这

个情况下集合

$$\bigcup_{\mu\in M} A_\mu = \{x\text{: 存在 } \mu \in M \text{ 使得 } x \in A_\mu\}$$

称为集合族 A_μ 的并. 而集合 $\bigcap\limits_{\mu\in M} A_\mu = \{x: x \in A_\mu, \forall \mu \in M\}$ 称为集合族 A_μ 的交.

定义 5 由两个集合的差集 $A\backslash B$ 和 $B\backslash A$ 的并集定义的集合,称为集合 A 和 B 的对称差集(图 6).

用符号 $A\Delta B$ 表示对称差.

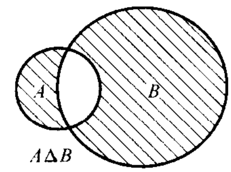

图 6

定义 6 a 和 b 是两个元素,如果指定了哪一个是第一个,哪一个是第二个,且$((a,b)=(c,d))\Leftrightarrow(a=c\wedge b=d)$,则称其为一个有序对.

用符号(a,b)表示元素 a 和 b 的有序对.

同样可以定义 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 形成的有序组,并用符号$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示. 元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为有序组的坐标.

定义 7 所有可能的有序对(a,b)的总体,其中 $a\in A,b\in B$,称为集合 A 和 B 的积,并用符号 $A\times B$ 表示.

同样,符号 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 表示集合 $A_j\subset\mathcal{T}(j=1,\cdots,n)$的积,即所有可能的有序组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的总体,其中 $a_j\in A_j(j=1,\cdots,n)$.

1.3 布尔代数

令 A 和 B 是集合 $\mathcal{T}$的任意两个子集. 那么由并集、交集和余集运算的定义可以直接地得出下列命题:

1) $A\cup B\subset\mathcal{T},A\cap B\subset\mathcal{T}$. (并与交集运算的封闭性)

2) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$. (并与交集运算的可交换性)

3) $A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D;A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D$. (并集与交集运算的可结合性)

4) $A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$. (并集关于交集运算的可分配性)

5) $A\cup A=A\cap A=A$.

6) $(A\cup B=B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)$.

7) $A\cup\varnothing=A,A\cap\mathcal{T}=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cup\mathcal{T}=\mathcal{T}$.

8) $A\cup CA=\mathcal{T},A\cap CA=\varnothing$.

如果对于集合 $\sigma=\{A,B,C,\cdots\}$上的元素定义了并($\cup$)以及交($\cap$),它们满足关系1)—8),那么三元组$(\sigma,\cup,\cap)$称为一个布尔代数. 这样,如果 σ 是 $\mathcal{T}$的所有子集形成的族,则$(\sigma,\cup,\cap)$是一个布尔代数.

1.4 对偶性原则

对于集合 $\mathcal{T}$的任意两个子集恒有等式

$$C(A\cup B)=CA\cap CB,\ C(A\cap B)=CA\cup CB. \tag{1}$$

等式(1)给出的性质称为对偶性原则. 可以用下面说法表述：并集的余集等于余集的交集，交集的余集等于余集的并集. 不难把对偶性原则推广到任意个子集 A_μ 上去. 这时

$$C\bigcup_\mu A_\mu=\bigcap_\mu CA_\mu,\ C\bigcap_\mu A_\mu=\bigcup_\mu CA_\mu. \tag{2}$$

在这种情况下余集符号 C 与符号 $\cup$ 或者 $\cap$ 可以交换位置，同时要把 $\cup$ 和 $\cap$ 这两个符号互换.

1.5　集合代数

令 $\mathcal{T}$ 是某个集合，$P(\mathcal{T})$ 是集合 $\mathcal{T}$ 中所有可能子集的集合.

定义 1　非空的集合族 $R\subset P(\mathcal{T})$，它关于并集、交集以及差集运算封闭，称为一个集合环.

定义 2　如果集合 $E\in\Sigma$ 而且 $\forall A\in\Sigma$ 恒有 $A\cap E=A$，则称集合 E 为 Σ 的单位元.

定义 3　含有单位元的集合环称为一个集合代数.

定义 4　集合 $S\subset P(\mathcal{T})$，如果它包含空集，而且如果 $\forall A\in S$ 和 $\forall A_1\subset A$ 存在集合 $A_2,A_3,\cdots,A_n\in S$ 使得

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

其中符号 $\cup$ 表示不相交集合的并集，就称 S 是一个半环.

1　证明 1.3 节中的关系式 1)～8).

◀1) 根据 1.2 节的定义 3 得

$$A\cup B=\{x\in\mathcal{T}:x\in A\vee x\in B\},$$

因此，从 $x\in A\cup B$ 就得知 $x\in\mathcal{T}$，即 $A\cup B\subset\mathcal{T}$.

类似地，根据 1.2 节的定义 4 得

$$A\cap B=\{x\in\mathcal{T}:x\in A\wedge x\in B\},$$

所以从 $x\in A\cap B$ 也就得知 $A\cap B\subset\mathcal{T}$.

2) 因为命题 $x\in A\vee x\in B$ 等价于 $x\in B\vee x\in A$，

故
$$\begin{aligned}A\cup B&=\{x\in\mathcal{T}:x\in A\vee x\in B\}=\{x\in\mathcal{T}:x\in B\vee x\in A\}\\&=B\cup A.\end{aligned}$$

可以类似地证明第二个等式.

3) 根据逻辑符号 $\vee$ 的性质，可知

$$\begin{aligned}A\cup(B\cup D)&=\{x\in\mathcal{T}:x\in A\vee x\in(B\cup D)\}\\&=\{x\in\mathcal{T}:x\in A\vee(x\in B\vee x\in D)\}\\&=\{x\in\mathcal{T}:(x\in A\vee x\in B)\vee x\in D\}\\&=\{x\in\mathcal{T}:x\in(A\cup B)\vee x\in D\}\\&=(A\cup B)\cup D.\end{aligned}$$

可以类似地证明 3)中第二个等式.

4) 我们有

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap D) &= \{x \in \mathscr{T}: x \in A \vee x \in (B \cap D)\} \\ &= \{x \in \mathscr{T}: x \in A \vee (x \in B \wedge x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathscr{T}: (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in \mathscr{T}: (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup D)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup D). \end{aligned}$$

可以类似地证明第二个等式.

5) 令 $x\in A\cup A$,则有 $x\in A\vee x\in A$,即 $x\in A$,于是 $A\cup A\subset A$ 成立. 反过来的关系 $A\subset A\cup A$ 可以直接从蕴含的定义得到,从这两个蕴含关系得出 $A\cup A=A$.

可以类似地证明 $A\cap A=A$.

6) 假设等式 $A\cap B=A$ 成立,则

$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \subset A \cap B) \Rightarrow (A \subset B).$$

利用得到的蕴含关系,得出

$$A \cup B = \{x \in \mathscr{T}: x \in A \vee x \in B\} \subset \{x \in \mathscr{T}: x \in B \vee x \in B\} = B.$$

又因为 $A\cup B\supset B$,则 $A\cup B=B$. 这样

$$(A \cap B = A) \Rightarrow (A \cup B = B). \tag{1}$$

利用蕴含关系 $A\subset B$ 得知

$$A \cap B = \{x \in \mathscr{T}: x \in A \wedge x \in B\} \supset \{x \in \mathscr{T}: x \in A \wedge x \in A\} = A.$$

又因为该式及反向蕴含关系 $A\cap B\subset A$,则 $A\cap B=A$,从而有

$$(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A). \tag{2}$$

从式(1)和式(2)得出$(A\cap B=A)\Leftrightarrow(A\cup B=B)$.

7) 如果 $x\in A\cup\varnothing$,则 $x\in A\vee x\in\varnothing$. 因为集合$\varnothing$不包含任何元素,由 $x\in A\cup\varnothing$得知 $x\in A$,即 $A\cup\varnothing\subset A$. 它与蕴含关系 $A\cup\varnothing\supset A$ 合在一起等价于等式 $A\cup\varnothing=A$.

其次,从$\varnothing\subset A\cap\varnothing\subset\varnothing$直接得到等式 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

因为 $A\subset\mathscr{T}$,则 $A\cap\mathscr{T}=\{x\in\mathscr{T}:x\in A\wedge x\in\mathscr{T}\}\supset\{x\in\mathscr{T}:x\in A\wedge x\in A\}=A$,连同蕴含关系 $A\cap\mathscr{T}\subset A$ 就得出等式 $A\cap\mathscr{T}=A$.

最终可以从 $\mathscr{T}\subset A\cup\mathscr{T}\subset\mathscr{T}$ 直接得到等式 $A\cup\mathscr{T}=\mathscr{T}$.

8) 根据性质 1)

$$A \cup \mathrm{C}A \subset \mathscr{T}. \tag{3}$$

令 $x\in\mathscr{T}$,如果 $x\in A$,则 $x\in A\cup \mathrm{C}A$;如果 $x\notin A$,则 $x\in \mathrm{C}A$,从而 $x\in A\cup \mathrm{C}A$. 这样,从 $x\in\mathscr{T}$ 得出 $x\in A\cup \mathrm{C}A$,即

$$\mathscr{T} \subset A \cup \mathrm{C}A. \tag{4}$$

从式(3)和式(4)得到等式

$$A \cup \mathrm{C}A = \mathscr{T}. \tag{5}$$

为了证明等式 $A\cap CA=\varnothing$,应该指出集合 $A\cap CA$ 不包含任何元素. 实际上,根据等式(5)集合 $\mathscr{T}$ 的任一元素属于 A 或者 CA. 如果 $x\in A$,则 $x\notin CA$,并有 $x\notin A\cap CA$. 如果 $x\in CA$,则 $x\notin A$(因为不然的话 $x\in A$,则 $x\notin CA$),又得到 $x\notin A\cap CA$. 因为集合 $A\cap CA$ 不包含任何一元素,所以这个集合是空的,也就是说 $A\cap CA=\varnothing$. ▶

2　证明对偶性原则

$$C(A\cup B)=CA\cap CB, \tag{1}$$

$$C(A\cap B)=CA\cup CB. \tag{2}$$

(见 1.4 节等式(1)).

◀证明等式(1)(可以类似地证明等式(2)).

令 $x\in C(A\cup B)$,则根据前一问题的等式(5)及 $A\cap CA=\varnothing$ 得知 $x\notin A\cup B$,即 $x\notin A\wedge x\notin B$. 从而 $x\in CA\wedge x\in CB$,因此 $x\in CA\cap CB$. 这样,就有

$$C(A\cup B)\subset CA\cap CB. \tag{3}$$

现在假设 $x\in CA\cap CB$,则 $x\in CA\wedge x\in CB$,即 $x\notin A\wedge x\notin B$,它意味着 $x\notin A\cup B$,即 $x\in C(A\cup B)$,由此得知

$$CA\cap CB\subset C(A\cup B). \tag{4}$$

由(3)和(4)得出等式(1). ▶

3　证明等式

$$A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A. \tag{1}$$

◀利用问题 1 的 4)和 5),得到等式(1)的第一部分

$$A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B).$$

剩下只要证明 $A\cap(A\cup B)=A$. 如果 $x\in A\cap(A\cup B)$,则 $x\in A\wedge x\in A\cup B$,因此

$$A\cap(A\cup B)\subset A. \tag{2}$$

如果 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$,给出 $x\in A\cap(A\cup B)$,即

$$A\subset A\cap(A\cup B). \tag{3}$$

由(2)和(3)得到等式(1)的第二部分. ▶

4　证明等式:

1) $CCA=A$; 2) $C\mathscr{T}=\varnothing$; 3) $C\varnothing=\mathscr{T}$.

◀1) 如果 $x\in CCA$,则 $x\notin CA$,所以 $x\in A$. 因此关系 $CCA\subset A$ 成立. 反之,若 $x\in A$,则 $x\notin CA$,所以 $x\in CCA$,又得到了 $A\subset CCA$. 由这两个给出的关系得到等式 1).

2) 集合 $C\mathscr{T}$ 是空的,因为对于任何 $x\in\mathscr{T}$ 其反命题 $x\notin C\mathscr{T}$ 都成立.

3) 如果 $x\in\mathscr{T}$,则 $x\notin\varnothing$,所以 $x\in C\varnothing$,从而有 $\mathscr{T}\subset C\varnothing$. 又因为永远有 $C\varnothing\subset\mathscr{T}$,由最后两个蕴含关系得到等式 3).

5　证明如下关系成立:

$$(A\backslash B)\subset(A\backslash D)\cup(D\backslash B).$$

◀令 $x\in(A\backslash B)$则 $x\in A\wedge x\notin B$. 当 $x\notin D$ 时,有 $x\in(A\backslash D)$,因而有 $x\in(A\backslash D)\cup$

$(D\backslash B)$. 又假设 $x\in D$,因为 $x\notin B$,得到 $x\in(D\backslash B)$,所以 $x\in(A\backslash D)\cup(D\backslash B)$,这样,无论 $x\notin D$ 或 $x\in D$,均可由 $x\in(A\backslash B)$得出 $x\in(A\backslash D)\cup(D\backslash B)$,这个关系式证明了结论.

6 确定集合 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, B\backslash A, A\Delta B$ 如果

1) $A=\{x: 0<x<2\}, B=\{x: 1\leqslant x\leqslant 3\}$;

2) $A=\{x: x^2-3x<0\}, B=\{x: x^2-4x+3\geqslant 0\}$;

3) $A=\{x: |x-1|<2\}, B=\{x: |x-1|+|x-2|<3\}$.

◀利用并集、交集、差集和对称差集的定义得出

1) $A\cup B=\{x: (0<x<2)\vee(1\leqslant x\leqslant 3)\}=\{x: 0<x\leqslant 3\}$;

$A\cap B=\{x: (0<x<2)\wedge(1\leqslant x\leqslant 3)\}=\{x: 1\leqslant x<2\}$;

$A\backslash B=\{x: (0<x<2)\wedge x\notin[1,3]\}=\{x: 0<x<1\}$;

$B\backslash A=\{x: (1\leqslant x\leqslant 3)\wedge x\notin(0,2)\}=\{x: 2\leqslant x\leqslant 3\}$;

$A\Delta B=\{x: (A\backslash B)\cup(B\backslash A)\}=\{x: (0<x<1)\vee(2\leqslant x\leqslant 3)\}$.

2) 由 $x^2-3x<0$ 得 $0<x<3$,即 $A=\{x: 0<x<3\}$. 而当 $-\infty<x\leqslant 1$ 和 $3\leqslant x<+\infty$ 时不等式 $x^2-4x+3\geqslant 0$ 成立. 取 $D=\{x: -\infty<x\leqslant 1\}, E=\{x: 3\leqslant x<+\infty\}$,那么 $B=D\cup E$. 利用集合运算的性质得到:

$$\begin{aligned}A\cup B &= A\cup(D\cup E)=A\cup D\cup E\\ &=\{x: (0<x<3)\vee(-\infty<x\leqslant 1)\vee(3\leqslant x<+\infty)\}\\ &=\{x: -\infty<x<+\infty\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cap B &= A\cap(D\cup E)=(A\cap D)\cup(A\cap E)\\ &=\{x: (0<x\leqslant 1)\vee x\in\varnothing\}=\{x: 0<x\leqslant 1\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\backslash B &= A\backslash(D\cup E)=\{x: x\in A\wedge(x\notin D\vee x\notin E)\}\\ &=\{x: (x\in A\wedge x\notin D)\vee(x\in A\wedge x\notin E)\}\\ &=(A\backslash D)\cup(A\backslash E)=\{x: 1<x<3\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B\backslash A &= (D\cup E)\backslash A=\{x: (x\in D\vee x\in E)\wedge x\notin A\}\\ &=\{x: (x\in D\wedge x\notin A)\vee(x\in E\wedge x\notin A)\}=(D\backslash A)\cup(E\backslash A)\\ &=\{x: (-\infty<x\leqslant 0)\vee(3\leqslant x<+\infty)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\Delta B &= A\Delta(D\cup E)=(A\backslash(D\cup E))\cup((D\cup E)\backslash A)\\ &=\{x: (1<x<3)\vee(-\infty<x\leqslant 0)\vee(3\leqslant x<+\infty)\}\\ &=\{x: (-\infty<x\leqslant 0)\vee(1<x<+\infty)\}.\end{aligned}$$

3) 写出集合 A 的明显表达式为 $A=\{x: -2<x-1<2\}=\{x: -1<x<3\}$. 然后,解不等式

$|x-1|+|x-2|<3$ 得到集合 B 的明显表达式 $B=\{x: 0<x<3\}$. 因此

$$A\cup B=\{x: (-1<x<3)\vee(0<x<3)\}=\{x: -1<x<3\};$$

$$A\cap B=\{x: (-1<x<3)\wedge(0<x<3)\}=\{x: 0<x<3\};$$

$$A\backslash B=\{x: (-1<x<3)\wedge x\notin(0,3)\}=\{x: -1<x\leqslant 0\};$$

$B\backslash A=\{x:(0<x<3)\wedge x\notin(-1,3)\}=\varnothing$;

$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=A\backslash B=\{x:-1<x\leqslant 0\}$. ▶

7　取 $A=\{(x,y):|x|+|y|<\delta\}$（图 7），$B=\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}<\delta\}$（图 8），$D=\{(x,y):\max\{|x|,|y|\}<\delta\}$（图 9）. 指出 $A\subset B\subset D$.

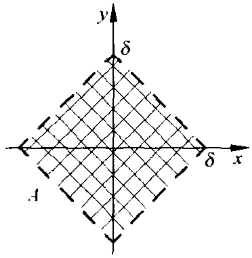

图　7

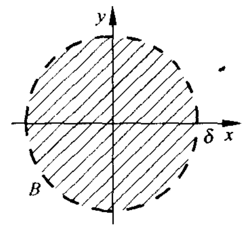

图　8

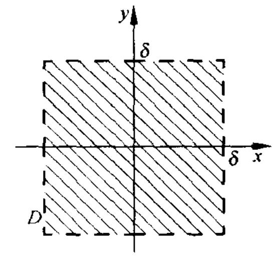

图　9

◀令 $(x,y)\in A$，则 $|x|+|y|<\delta$，从而

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{x^2+2|x||y|+y^2}=|x|+|y|<\delta,$$

即 $(x,y)\in B$. 它同时也导出不等式

$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\delta.$$

从而有蕴含关系 $(x,y)\in D$. 这样得到 $A\subset B\subset D$. ▶

8　令 $A=\{x:2\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y:1\leqslant y\leqslant 3\}$. 在 xOy 平面上给出集合 $A\times B$ 的点.

◀因为 $A\times B=\{(x,y):(2\leqslant x\leqslant 4)\wedge(1\leqslant y\leqslant 3)\}$，则 $A\times B$ 是由边为直线 $x=2,x=4,y=1,y=3$ 所围成矩形内点的全体（图 10）.

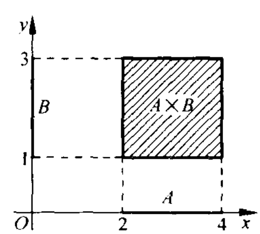

图　10

9　指出对于并和差封闭的族 R 是一个环.

◀如果 A 和 B 是集合族 R 中任意的集合，因为 $A\cap B=A\backslash(A\backslash B)$，而 $A\subset R$，$A\backslash B\subset R$，则 $A\cap B\subset R$. 因此，族 R 关于并、交和差封闭，即它构成一个环. ▶

10　族 $R=\{\alpha,\varnothing\}$ 是由非空集 α 和空集 $\varnothing$ 构成的. 证明它是一个环. 这个环是否为一个代数？

◀族 R 包含自身元素的并集 $\alpha\cup\varnothing=\alpha$ 和差集 $\alpha\backslash\varnothing=\alpha$，$\varnothing\backslash\alpha=\varnothing$. 所以 R 关于并与差封闭，从前例得知它是一个环. 又因为元素 $\alpha\in R$，R 包括了族 R 的全部成员，则 α 是族 R 的单位元，所以 R 是一个代数.

11　令集合 $\mathscr{T}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 由三个元素组成，而 $P(\mathscr{T})$ 是 $\mathscr{T}$ 的所有子集的族.

1）写出由 $P(\mathscr{T})$ 中元素所有可能构成的代数并指出其单位元.

2）写出由 $P(\mathscr{T})$ 中元素可能构成的环.

3) 写出由 $P(\mathscr{T})$元素可能构成的半环,且说明那些不是环.

◀1) 最简单的代数是族$\{\varnothing\}$,它由唯一空集构成;三个代数

$$\{\{\alpha\},\varnothing\},\{\{\beta\},\varnothing\},\{\{\gamma\},\varnothing\},$$

均由两个元素构成,相应的单位元是$\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\}$(见前例);6 个代数

$$\{\{\alpha,\beta\},\{\alpha\},\{\beta\},\varnothing\},\{\{\alpha,\gamma\},\{\alpha\},\{\gamma\},\varnothing\},$$

$$\{\{\beta,\gamma\},\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing\},\{\{\alpha,\beta\},\varnothing\},\{\{\alpha,\gamma\},\varnothing\},\{\{\beta,\gamma\},\varnothing\},$$

它们相应的单位元是$\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\}$. 不难看出,这些族中任何一个对于并集和差集封闭:4 个代数

$$\{\mathscr{T},\{\alpha,\beta\},\{\gamma\},\varnothing\},\{\mathscr{T},\{\alpha,\gamma\},\{\beta\},\varnothing\},\{\mathscr{T},\{\beta,\gamma\},\{\alpha\},\varnothing\},\{\mathscr{T},\varnothing\},$$

它们的单位元是 $\mathscr{T}$. 最后,所有列出代数的并集

$$\{\mathscr{T},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing\}$$

也是以 $\mathscr{T}$ 为单位元的代数.

2) 所有在 1)中给出的代数自然都是环,没有其他环存在.

3) 所有的环都是半环. 其实,从 A 和 $A_1\subset A$ 属于环R 的条件得到$A=A_1\cup A_2$,其中 $A_2=A\backslash A_1\subset R$.

此外,在此情况下可以构造出不是环的半环例子,例如:

$$\{\{\alpha\},\{\beta\},\varnothing\},\{\{\alpha\},\{\gamma\},\varnothing\},\{\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing\},$$

$$\{\{\alpha,\beta\},\{\gamma\},\varnothing\},\{\{\alpha,\gamma\},\{\beta\},\varnothing\},\{\{\beta,\gamma\},\{\alpha\},\varnothing\}.$$

事实上,上面给出的 6 个族里,任意两个元素的交集属于该族. 其次,族中每一个非空的元素都作为族本身的一个子集. 例如,对族$\{\{\beta,\gamma\},\{\alpha\},\varnothing\}$有

$$\{\beta,\gamma\}=\{\beta,\gamma\}\cup\varnothing=\{\beta,\gamma\},\{\alpha\}=\{\alpha\}\cup\varnothing=\{\alpha\},$$

即确定半环的第二个条件得以满足. 包含$\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing$的任何一个族是半环,且不重合于 $P(\mathscr{T})$:

$\{\{\alpha,\beta\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing\},\{\{\alpha,\gamma\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing\}$等等.

例如,让我们指出族 $S=\{\{\alpha,\beta\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\varnothing\}$为一个半环. 事实上,$S$ 中任何两个元素的交集又是 S 的元素. 进而有,所有 S 的元素都可以分解为不相交的集合:$\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\}\cup\{\beta\},\{\alpha\}=\{\alpha\},\{\beta\}=\{\beta\},\{\gamma\}=\{\gamma\}$. 这样,族 S 是一个半环. ▶

12 给定三个数 a,b 和 c 满足不等式 $a<c<b$. 证明由闭区间和半闭区间形成的集合

$$S=\{[a,b],[a,c],[c,b],[a,c),[c,c],(c,b],\varnothing\}$$

是半环但不是环.

◀族 S 中任何两个元素的交集是 S 中的元素,即 S 关于交集运算是封闭的. 其次 S 中任何元素可以分解成属于 S 的不相交集合的并集.

例如:

$$[a,b]=[a,c]\cup(c,b]=[a,c)\cup[c,c]\cup(c,b]$$
$$=[a,c)\cup[c,b],$$
$$[a,c]=[a,c)\cup[c,c].$$

等等. 族 S 不是环,因为它关于并集运算不封闭. 例如$[a,c)\cup(c,b]$不属于 S. ▶

13 证明

$$(A\cap B)\times(D\cap E)=(A\times D)\cap(B\times E). \tag{1}$$

◀令$(x,y)\in(A\cap B)\times(D\cap E)$,则有 $x\in A\cap B$ 和 $y\in(D\cap E)$,它等价于 $x\in A\wedge x\in B$和 $y\in D\wedge y\in E$. 又因为 $x\in A\wedge y\in D$,得知$(x,y)\in A\times D$. 类似地,由 $x\in B\wedge y\in E$ 得到$(x,y)\in B\times E$,于是$(x,y)\in(A\times D)\cap(B\times E)$和

$$(A\cap B)\times(D\cap E)\subset(A\times D)\cap(B\times E). \tag{2}$$

现假设$(x,y)\in((A\times D)\cap(B\times E))$,那么$(x,y)\in(A\times D)\wedge(x,y)\in(B\times E)$,从而有 $x\in A\wedge y\in D$ 和 $x\in B\wedge y\in E$. 由此得出 $x\in A\cap B$ 和 $y\in D\cap E$,即$(x,y)\in((A\cap B)\times(D\cap E))$. 所以蕴含关系

$$(A\times D)\cap(B\times E)\subset(A\cap B)\times(D\cap E) \tag{3}$$

成立. 由(2)和(3)得到(1). ▶

练 习 题

1 证明等式: 1) $C\bigcup\limits_{\mu}A_\mu=\bigcap\limits_{\mu}CA_\mu$; 2) $C\bigcap\limits_{\mu}A_\mu=\bigcup\limits_{\mu}CA_\mu$, (见 1.4 节等式(2))其中 μ 属于任意集合.

2 令 $A\subset B$ 且 D 为任意集合. 证明蕴含关系: 1) $A\cap D\subset B\cap D$; 2) $A\cup D\subset B\cup D$.

3 证明: 如果 $A\subset B\wedge A\subset D$,则 $A\subset B\cap D$. **4** 证明: 如果 $A\subset D\wedge B\subset D$,则 $A\cup B\subset D$.

5 证明等式: 1) $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$; 2) $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$; 3) $A\backslash B=A\Delta(A\cap B)$.

6 证明下面的关系对于对称差成立

$$A\Delta B\subset((A\Delta D)\cup(B\Delta D)).$$

7 设 A_1,A_2,B_1,B_2 为集合 $\mathscr{T}$ 的子集. 证明下式: 1) $(A_1\cup A_2)\backslash(B_1\cup B_2)\subset(A_1\backslash B_1)\cup(A_2\backslash B_2)$;
2) $(CA_1\cup CA_2)\Delta(CB_1\cup CB_2)\subset C((CA_1\Delta CB_1)\cap(CA_2\Delta CB_2))$.

8 设 A_1,A_2,B_1,B_2 为集合 $\mathscr{T}$ 的子集. 证明: 1) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$;
2) $(A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cap(A_2\Delta B_2)$; 3) $(A_1\backslash A_2)\Delta(B_1\backslash B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\backslash(A_2\Delta B_2)$.

9 确定集合 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, B\backslash A, A\Delta B$,如果:
1) $A=\{x:-4<x<1\}, B=\{x:0<x<4\}$;
2) $A=\{x:x^2-x-2>0\}, B=\{x:6x-x^2\geqslant 0\}$;
3) $A=\{x:\sin\pi x=0\}, B=\left\{x:\cos\dfrac{\pi x}{2}=0\right\}$.

10 确定集合 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B, B\backslash A, A\Delta B$,如果:
1) $A=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}, B=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$;
2) $A=\{(x,y):\max(|x|,|y|)\leqslant 1\}, B=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$;