

竞赛

数学的 原理和方法

柳柏濂 吴康 编著

广东高等教育出版社

JINGSAISHU XUE DE YUANLI HE FANGFA

竞赛数学的原理和方法

柳柏濂 吴康 编著

广东高等教育出版社

·广州·

图书在版编目 (CIP) 数据

竞赛数学的原理和方法/柳柏濂, 吴康编著. —2 版. —广州: 广东高等教育出版社, 2002. 7

ISBN 7-5361-2619-0

I. 竞… II①柳… ②吴… III. 数学-竞赛-基本知识-高等教育-自学考试-教材 IV. O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 068800 号

广东高等教育出版社出版发行

(邮码: 510076 电话: (020) 87550735
地址: 广州市广州大道北广州体院内 20 栋)

广州市新明光印刷有限公司印装

850 毫米×1168 毫米 32 开本 10.875 印张 253 千字

2002 年 7 月第 2 版 2002 年 7 月第 2 次印刷

印数: 2001~6000 册

定价: 19.80 元



数学竞赛的历史，可以追溯到 16 世纪意大利求解三次方程的“擂台战”。而 1894 年匈牙利举办的全国中学数学竞赛，可以说是开中学生数学竞赛的先河。从 1959 年第一届国际中学生数学奥林匹克 (IMO) 开始到现在，已举行了 42 届。这些竞赛不但成了各国青少年数学天才的较量，更重要的是，通过 IMO 所刮起的旋风，掀起了世界各地数学竞赛的热潮，更成为广大中学生一展数学拳脚的天地。中国的青少年在 IMO 上屡屡夺标，不仅展示了炎黄子孙的数学才能和苦学精神，而且肯定了中国在数学教学和奥林匹克数学培训中的可贵经验。如果说，一名中学生，他有可能选择是否接受竞赛数学的培训，那么，一位中学数学教师没有理由对中学数学中的这一“高档菜”毫无所知。因此，我们认为：在高等师范院校中，增加竞赛数学的课程很有必要。

本书是为高等师范院校、教育学院本、专科，教育硕士研究生，硕士研究生课程班，以及中学教师进修班开设“竞赛数学”课程所编写的教材。本书也适用于中学数学竞赛培训，可作为高中学生参加数学奥林匹克学习和训练、高中教师指导学生参赛的教材和读物。本书的初稿曾在华南师范大学、湛江师范学院、广东教育学院及省内多间师专使



用，在教学中不断修改、润饰、补充，先后重印十次。最近，本书被广东省自考办列为自学考试师范数学类本科指定教材。在正式出版前，我们再次作了一次全面的补充和修改。

本书力求简明地阐述竞赛数学的原理、方法和应用，焦点集中于方法的了解和应用而不拘泥于理论的系统性。书中出现的一些初等数学知识（如集合运算、排列组合等），一般不予赘述或详证。各章节引用的例题及习题，大多数是各级数学竞赛的试题，但在书中不再注明出处。目录中有“*”号的章节为选学内容。

本书的编写、试用和出版，得到各方面人士的支持和帮助。中国数学会原理事长、中国数学奥林匹克委员会主席王元院士，中国数学会普及工作委员会原主任、中国数学奥林匹克委员会副主席裘宗沪研究员给予我们积极的鼓励，王元院士还专门为本书的出版亲笔题词：“参加数学竞赛，提高数学水平，增强友谊，共同进步。”广东省及全国各地的师范院校、教育学院和数学奥林匹克训练班的教师，在本书的使用中给予我们宝贵的意见和建议。广东高等教育出版社吴惟粤社长、朱仲庆副总编为本书的及时、高质量出版做了卓有成效的工作，在此深表谢意。本书编写中参考了大量的有关书刊，因篇幅不再一一注明，谨向这些书刊的作者、编者致以衷心的感谢。本书出版后，受到使用者的欢迎和好评，给予我们很大的鼓舞。现对发现的错漏之处加以修改，作为第2版。

我们热诚期望，广大读者继续给予我们帮助和指正。

2001年7月1日写，2002年4月24日改
于华南师范大学

目 录

第1章 数学竞赛与竞赛数学	(1)
§1 数学竞赛活动	(1)
§2 竞赛数学	(9)
习题一	(15)
第2章 抽屉原理	(16)
§1 抽屉原理基本形式	(16)
§2 抽屉原理应用技巧	(22)
习题二	(28)
第3章 容斥原理	(31)
§1 容斥原理基本形式	(31)
§2 容斥原理应用技巧	(34)
习题三	(40)
第4章 不等式解题方法	(42)
§1 不等式基础解法	(42)
§2 排序原理	(55)
* §3 几何不等式	(62)
习题四	(70)
第5章 数论方法	(74)
§1 奇偶性分析与同余方法	(74)
§2 数谜与不定方程	(90)
* §3 数论函数	(103)
习题五	(109)
第6章 递归方法	(114)
§1 递归关系应用方法	(114)
§2 线性递归关系解法	(120)
* §3 函数迭代与函数方程	(124)
习题六	(132)





第7章 组合计数方法	(135)
§1 一一对应方法	(135)
§2 组合恒等式证法	(144)
* §3 生成函数方法	(149)
习题七	(159)
第8章 图论方法	(162)
§1 点边度关系	(163)
§2 图的染色方法	(166)
§3 平面图与欧拉定理	(174)
* §4 有向图与竞赛图	(177)
习题八	(182)
第9章 组合几何方法	(184)
§1 组合几何计数方法	(184)
§2 整点问题	(193)
* §3 距离几何与覆盖问题	(200)
习题九	(206)
第10章 几何解题方法	(210)
§1 解析几何方法	(210)
* §2 几何变换方法	(219)
习题十	(226)
第11章 若干重要的解题原理与方法	(229)
§1 极端原理	(229)
§2 构造性解题方法与数形结合法	(237)
§3 相似原理与对称原理	(251)
* §4 逻辑方法	(258)
习题十一	(267)
习题参考解答	(270)
附录: 数学竞赛大纲	(324)



第 1 章

数学竞赛与竞赛数学

数学竞赛，是在数学学科中展开的智力竞赛活动，是通过数学内容进行的教育活动。数学竞赛只是手段而不是目的。通过数学竞赛选手的选拔、培训和开展比赛，可以达到激发学生学习兴趣，发现和培养优秀人才，促进教育改革等多方面的目的。

竞赛数学，是在数学竞赛的试题和培训内容中，数学竞赛所利用到的数学知识、方法和技巧中，提炼出来的精华部分。竞赛数学既带有教育的功能，又具备研究的特征，是正在形成之中的数学，是教育数学的新分支。

本章将对数学竞赛和竞赛数学的概况作简单介绍。

§ 1 数学竞赛活动

数学研究数量和图形。数学科学是人类研究大自然的客观规律逐步认识和掌握的真理。人类在数学研究中，通常会提出大量问题。其他学科的研究，人类的生活，也会给数学带来许多问题。从某种意义上来说，数学的历史，就是解题的历史。解题



活动贯穿着数学的发展史，解题活动中的无意识竞争到有意识比赛由来已久。一些著名数学难题，如费尔马大定理，四色猜想，三大几何作图问题，哥德巴赫猜想，黎曼猜想，……或至今未获解决，或在求解过程中发展出许多理论和方法，获得精彩的结果。历史上的难题悬赏、征解，其实就是一种特别的数学竞赛。

具有现代意义的数学竞赛活动源于匈牙利（1894年起在全国举办中学数学竞赛），逐步伸延到东欧，蓬勃发展于苏联，再扩展到欧美，乃至亚、非、拉，……开始是高中学生，逐步发展到大学生、初中生甚至小学生；开始是纯数学题材，逐步发展到应用数学（数学建模），并向其他学科和计算机活动、智力活动扩展；开始是很小范围的“尖子”参赛，逐步发展到大范围、不同程度的学生也参加活动；开始是单一国家，逐步发展到跨国、洲际乃至国际比赛；开始只有竞赛活动和试题解答，逐步发展到出版有关书刊，举办训练机构，乃至学校师生、数学家甚至公众人物都参与的大规模活动。

特别值得指出的是IMO（国际数学奥林匹克）的诞生和发展，体现着现代数学竞赛活动的巨大影响和空前成功。第一届IMO于1959年7月在罗马尼亚古都布拉索举行，以后每年举行一届（仅1980年因故停办），到2001年7月已举行了42届。前5届只有苏联等几个东欧国家，从20世纪60年代中期英、法等西欧、北欧许多国家参加，70年代中期到80年代初美国、德国和欧亚、拉丁美洲约20多个国家加入。具有标志性的是中国从1985年非正式参赛，1986年正式参赛，并随后带动着一大批第三世界国家和地区参赛。现在每届参赛国家已近百个，参赛学生每国6名，每年轮流在一个国家举办。参赛学生参加历时两天（每天4.5小时考3道题）共考6道题的比赛



(用本国语言文字作答). 试题内容是与中学教学教材较为接近的代数、几何和其他问题(主要是初等数论和初等组合学), 但用到的知识、方法、技巧和思维深度都远超中学教材的要求. 由国际数学教育委员会 IMO 分委员会领导和协调, 主办国的主试委员会组织、命题和评卷, 按成绩高下评出一、二、三等奖(一般称为金、银、铜牌), 不奖励团体. 但人们一般按照各个国家参赛学生总分排定团体名次, 体现国家水平. IMO 已成为国际上最重要的、水平最高的学科竞赛.

IMO 历史上的强国有苏联、中国、匈牙利、罗马尼亚、美国、德国、俄罗斯、伊朗等. 中国自 1986 年正式参赛到 2001 年, 共参加了 16 次赛事中的 15 次, 获得 9 次团体第 1 名(其中 1 次与俄罗斯并列), 3 次第 2 名(其中 1 次与罗马尼亚并列)和第 4、6、8 名各一次, 是参赛国家中成绩最突出的. 中国自 1985 年非正式参赛到 2001 年, 参赛选手共 92 人次, 其中 90 人次获奖, 获金牌 66 枚, 其中满分 20 人, 银牌 19 枚, 铜牌 5 枚, 是参赛国家的选手中成绩最好的. 中国国家队参赛选手分布于 19 个省、市、自治区, 人数较多的省份是湖北、北京、上海、湖南、广东和江苏等, 参赛成绩按学校排名是北京大学附中、湖北武钢三中、湖北黄冈中学和华南师大附中等. 中国香港、中国澳门和中华台北也分别组队参赛. 1990 年第 31 届 IMO 在中国北京举行, 1994 年第 35 届 IMO 在中国香港举行, 1998 年第 39 届 IMO 在中国台北举行(这一届中国队没参赛).

IMO 试题和每年各参赛国提供的“预选题”大多数已成为竞赛数学的主要研究内容和核心组成部分. 这些试题不少来源于前沿数学最新研究成果的简化, 许多体现着精深的数学内容、独到的数学思想和方法、精美巧妙的构思和趣味盎然的表



述. 带点夸张地说, 这些试题是人类智慧的结晶, 它们带给数学爱好者和广大青少年学生精神上的愉悦, 思维层次的享受.

现代数学竞赛活动在 IMO 的大纛下开展得声势浩大, 琳琅满目. 多国、洲际赛事日益增多, 各国自身的各级各类数学竞赛更如雨后春笋, 欣欣向荣. 许多国家都建立了“一条龙”机制, 以中、俄、美为例:

中: 省、市预赛 (9 月前) → 全国高中联赛 (10 月) → 中国数学奥林匹克 (冬令营考试, 即国家集训队选拔考试, 次年 1 月) → 国家代表队选拔考试 (5 月前) → IMO (7 月).

俄: 校内竞赛 (7 月前) → 地市竞赛 (7~8 月间) → 省级竞赛 (约 12 月) → 全俄数学竞赛 (次年 4 月) → IMO (7 月).

美: 高中数学竞赛 (2 月) → 数学邀请赛 (3 月) → 美国数学奥林匹克 (5 月) → 西点军校训练 (6 月) → IMO (7 月).

大学生数学竞赛也在稳步发展, 逐渐扩大影响力. 著名的美国普特南大学生数学竞赛自 1938 年创办至 2001 年已举办 62 届, 世界级学术刊物《美国数学月刊》每年刊登试题解答. 苏联、俄罗斯等国家的著名大学也已开展了几十年的大学生数学竞赛活动. 中国大学生数学夏令营自 1987 年以来, 聚集着全国最好的一二十所大学的数学尖子进行数学竞赛. 全国各地学校校内的大学生数学竞赛则更如满天繁星, 美不胜收.

自 20 世纪末以来, 应用数学 (数学建模) 竞赛活动从美国兴起 (1985 年), 很快风靡全球. 值得一赞的是中国一点也不落后, 中国大学生数学建模竞赛自 1992 年起举行后, 迅猛扩展为大规模、高水平赛事, 2000 年有 517 所高校共 3 210 队



(每队 3 人) 参赛. 1991 年起上海市、1993 年起北京市等地举行了中学生数学知识应用竞赛, 受到热烈欢迎. 应用数学(数学建模) 竞赛活动为百岁高龄的数学竞赛活动吹来新鲜空气, 增强了活力, 适应了时代发展的需要.

中国古代的田忌赛马故事脍炙人口, 其实是对策论(数学的一个分支) 的巧妙运用. 近代中国有过数学竞赛的零星活动. 中国大陆现代意义下的数学竞赛活动源于 1956 年, 在老一辈数学家华罗庚、苏步青等亲力亲为的倡导和扶持下, 北京、天津、上海、武汉四城市试办了高中数学竞赛, 以后每年举办, 逐步发展到许多大中城市. 当时国内不多的中级数学杂志如北京的《数学通报》、武汉的《数学通讯》、广州的《中学数学》(《中学数学研究》前身)、上海的《数学教学》等经常刊登数学竞赛试题解答, 起着很好的影响和推动作用. 但 1965 年起, 因“文革”而中断了整整 13 年!

“文革”后迎来“科学的春天”, 1978 年国务院批准全国和京、沪、津、陕、皖、川、辽、粤八省市举办中学数学竞赛, 中国科学院副院长、中国数学会理事长、世界著名数学家华罗庚教授担任全国数学竞赛委员会主任. 八省市预赛后选拔 350 名代表参加全国决赛. 中国中学生在 10 多年不知道还有这种活动、还有这种数学内容之后, 终于有机会与竞赛数学结缘了.

1979 年, 大陆 29 个省、市、自治区都组织了中学数学竞赛, 但过热的(积蓄已久而一旦放开的) 能量似乎影响了正常的学习秩序.

1980 年起, 不再由“官方”举办全国性的数学竞赛. 同年中国数学会普及工作委员会成立. 这个“民间机构”对数学在中国大陆的普及、对数学竞赛活动的推动, 功不可没!



1981年起，全国高中数学联合竞赛创办，以后逐年由各省、市、自治区轮流举办。

1985年起，我国首次派员参加国际数学奥林匹克。同年，全国初中数学联合竞赛创办，以后也是逐年由各省、市、自治区轮流举办（近年来又有了新变化）。

1986年起，全国中学生数学冬令营创办，以后逐年由几所知名大学等单位举办（从第6届起又名“中国数学奥林匹克”）。“冬令营”数学考试的参赛者是上一年国家代表队选手，当届全国高中数学联赛全国排名约100名内的选手，以及各省份第一名。选手们以个人身份参赛，同时各省份指定3人计算团体成绩（必需3个人）参加“陈省身杯”团体赛。北京、上海、湖北等代表队多次荣获“陈省身杯”第一名。“冬令营”数学考试同时又是国家集训队的选拔考试，试题模仿IMO形式。国家集训队自1986年起每年组成一次，大约有20多人参加。经月余时间的训练后，进行选拔考试。选定6人组成当年的国家代表队参加IMO。

1986年，确是中国数学竞赛发展史上的一个里程碑。除上述创办“冬令营”、组织国家集训队和首次正式参加IMO之外，还有“华罗庚金杯”少年数学邀请赛的诞生。“华杯赛”由中国少年报社、中国数学会等单位组织，每两年举行一届，邀请部分市（县）自愿参加，参赛对象是小学六年级和初一学生，从第5届起接受国外组队参赛。初赛试题由中央电视台播放，各参赛单位组织学生参赛。成绩优越者参加复赛，并从中选拔决赛选手（每队中、小学生各2名）。参加决赛的选手进行两轮笔试（小学、初中分别命题）后决出个人金、银、铜牌。团体总分取前十名，其中前四名的代表队再参加电视直播的现场口试，最后决出团体冠、亚、季军。“华杯赛”决赛试



题具有相当的难度，但比赛中高分选手不少。历届冠军以北京队猎获最多。1986年，我国数学家所命试题（常庚哲、齐东旭合拟）首次被IMO采用，同时我国首次申请举办IMO。同年，全国首批数学奥林匹克学校兴办。这些“奥校”对中国数学竞赛活动的发展和水平的提高，对青少年科学人才的发现和培养，起到不小的作用。

1988年，“中国数学奥林匹克等级教练员”制度开始实行，国内高水平的竞赛数学学术杂志《数学竞赛》创刊，中学数学普及杂志《中等数学》改版为竞赛数学普及杂志，各种有关数学竞赛的教材、参考读物开始出现。

1989年，首批“中国数学奥林匹克高级教练员”获聘。1989年，更为中国数学竞赛活动揭开史诗的新一页——中国数学奥林匹克代表队在西德举行的第30届IMO上，首次荣获团体冠军（也是亚洲队首次），为中国队接二连三频繁夺冠掀开帷幕。

1990年，中国首次举办IMO，并再获IMO团体冠军。举办水平之高，参赛队伍之众，均创IMO纪录。同年，“希望杯”全国数学邀请赛创办，这项一年一度的赛事邀请初一、初二、高一、高二学生参赛，后来有了很大的发展。同年，中国数学竞赛活动的最高权威机构——中国数学奥林匹克委员会成立。

1991年，“小学数学奥林匹克”创办。这项赛事后来变化较大。

1992年，通过“数学竞赛大纲”。大纲对全国高中、初中数学联赛的内容、难度和要求作出规定，对中国数学竞赛活动的健康发展起到良好作用。同年，中国队再获IMO团体冠军。

1993年，著名的数学竞赛活动家、数学家裘宗沪荣获国



家数学竞赛世界联盟颁发的厄尔多斯国家奖。同年，中国队再获 IMO 团体冠军。

1994 年，规定全国初中数学联赛分两试，第一试选择题 6 道 42 分，填空题 4 道 28 分，共 70 分；第二试解答题 3 道 70 分。两试总计 140 分。同年，中国香港首次举办 IMO。

1995 年，中国队再夺回 IMO 桂冠。同年，单墀主编的巨著《数学奥林匹克题典》问世。

1997 年，中国队再获 IMO 团体冠军。

1998 年，规定全国高中数学联赛分两试，第一试定名为“全国高中数学竞赛”，含选择题 6 道 36 分，填空题 6 道 54 分，解答题 3 道 60 分，共 120 分；第二试定名为“全国高中数学竞赛加试”，含解答题 3 道 150 分（其中有一道平面几何题），两试总计 270 分。同年，中国台北首次举办 IMO。

1999 年，中国队获 IMO 团体冠军（并列）。

2000 年，中国队再获 IMO 团体冠军，来自广东华南师大附中的李鑫蝉联金牌（高一、高二），成为中国队历届选手中继王崧（湖北黄冈中学，高二、高三）、罗炜（黑龙江哈尔滨师大附中，高二、高三，两次满分）、周宏（北京大学附中，高二、高三，一次满分）后的第四人。（李鑫还是以初三学生入选国家代表队的第一人，1998 年他入选后因中国队没参赛而无缘实战）

2001 年，中国队第 9 次荣获 IMO 团体冠军，继 1992 年、1993 年、1995 年、1997 年和 2000 年后，第 6 次全部参赛选手都荣获金牌。

中国数学竞赛活动与大多数数学竞赛高水平国家同步起跑，虽因“文革”陷入困境，却在改革开放中再生，现已步入佳境。总结几十年特别是近 20 年来的经验和教训，正如一位



竞赛数学研究专家所指出的，中国数学竞赛活动弘扬了数学奥林匹克的精神，在教育学、数学、人才学三个维度上自然地进行文化积淀，产生出三项主要学术成果：

(1) 诞生了一个数学教育的新分支——奥林匹克数学教育，它是较高层次的基础教育，开发智力的素质教育，生动活泼的课外教育，现代数学的普及教育。

(2) 形成了一个教育数学的新层面——竞赛数学，它的基本特征是位于“中间数学”，邻接研究数学，展示艺术数学，构成教育数学。

(3) 造就了一个数学奥林匹克的新学派，包括专业数学工作者，教育行政管理人员和中学教师，其中不乏一流数学家的参与，以历届国家集训队的教练为代表人物，他们实质上是“数学竞赛活动家”。

中国数学竞赛活动在新世纪到来之际，势将创造更辉煌的明天，为中华民族增光，为人类文明添色。

§ 2 竞赛数学

数学竞赛活动的兴盛，催生了竞赛数学。竞赛数学是怎样的数学？它具有什么特征？它的目的是什么？意义何在？它的主要内容又是怎样的呢？

一、竞赛数学的基本特征

竞赛数学诞生以来，个性鲜明，别具特色。总结竞赛数学的内容与方法，可发现它具有明显的知识性、趣味性和竞技性，归纳为四个基本特征：



1. 竞赛数学是一种“中间数学”.

竞赛数学介乎于中小学数学与大学数学之间. 它所涉及的内容, 形式上是中小学数学教材所包含的数学概念、性质、公式、定理和应用, 但往往用上不少大学数学的思想、方法、技巧和背景知识. 竞赛数学是高等数学的精深原理与初等数学的灵活技巧相结合的“中间数学”.

竞赛数学取材于学校数学, 但其方法和能力要求却接近于研究数学. 它常常将普通题材追根溯源, 深入研讨; 又常常将数学的新发现、新进展深入浅出, 介绍给使用者. 因此竞赛数学介乎于学校数学与研究数学之间.

竞赛数学还可称之为介乎于严肃数学与趣味数学之间. 它绝非板起脸孔, 一本正经. 相反却常常是游戏玩耍, 趣味盎然. 但正可谓“嬉笑怒骂, 皆成文章”. 竞赛数学将内容的现代性、陈述的趣味性、技巧的独创性和思想的深刻性有机结合, 使人们不仅感受到数学严肃、抽象、专门化的一面, 又领略到数学活泼、实用、艺术化的另一面.

2. 竞赛数学是“前沿数学”.

竞赛数学追求内容的新颖性, 它不断推陈出新, 时刻涌现着新问题、新方法和新结果. 一些“高等”成果经过若干特殊化、简单化处理后有了“初等”解法, 常常成为竞赛数学的“生力军”. 数学家在研究高深问题时, 有时也能用上初等方法解决其中环节的子问题, 这些成果也会成为竞赛数学的“畅销品”.

竞赛数学追求方法的创造性, 它代表着活的数学. 解竞赛题常无模式体例, 要求敏锐的数学直觉、驾驭整体的洞察力和独创性的构思. 对竞赛题的评论、研讨更是广泛的创造性工作.

竞赛数学追求问题的研究性, 它既为古老问题带来新生, 更为新鲜课题提供阵地. 不少竞赛题, 开辟了数学研究的新方