系统工程 理論与应用

第二卷

编著　　喻学恒

SYSTEMS ENGINEERING

THEORY & APPLICATIONS

武 汉 大 学 出 版 社

系统工程理论与应用
编著 喻学恒

武汉大学出版社出版
中国科学院武汉分院"数学物理丛书"编辑部发行
江西省瑞昌县印刷厂印刷

开本787×1092 16K　16又 1/4 印张
1983年11月第一版　1985年4月第一次印刷
印数1—5000册
统一书号：13279.12　单价 3.62元

第二卷　目　　录

第六章　分布参数系统动力学

§ 6.1　**引论**……………………………………………………………（239）
§ 6.2　**半群理论**…………………………………………………………（240）
（一）基本概念………………………………………………………（240）
（二）对偶半群………………………………………………………（248）
（三）非齐次微分方程………………………………………………（250）
（四）解析半群………………………………………………………（252）
（五）摄动理论………………………………………………………（254）
（六）抽象演化（发展）方程………………………………………（258）
（七）例题……………………………………………………………（259）
§ 6.3　**可控性、可观测性与稳定性**……………………………………（261）
（一）可控性、可观测性……………………………………………（261）
（二）稳定性…………………………………………………………（270）
§ 6.4　**时变系统**…………………………………………………………（273）
（一）软演化算子的摄动理论………………………………………（273）
（二）抽像演化（发展）方程………………………………………（281）

第二篇　确定性最佳系统

第一章　线性规划

§ 1.1　**极值问题概念**……………………………………………………（283）
（一）约束……………………………………………………………（283）
（二）极值……………………………………………………………（284）
（三）凸集和凸函数…………………………………………………（287）
（四）凸包与凸锥……………………………………………………（289）
（五）分离定理与凸组合定理………………………………………（290）
§ 1.2　**线性规划**…………………………………………………………（293）
（一）概论……………………………………………………………（293）
（二）单纯形法………………………………………………………（297）
（三）对偶单纯形法…………………………………………………（316）
§ 1.3　**整数线性规划**……………………………………………………（319）
（一）分枝定界法……………………………………………………（320）

（二）割面法……（326）

第二章　非线性规划

§2.1　**无约束极值**……（329）
（一）概论……（329）
（二）一维搜索……（337）
（三）梯度法——最速下降法……（348）
（四）牛顿法……（353）
（五）共轭方向法和共轭梯度法……（362）
（六）直接法……（369）
（七）拟牛顿法……（380）
§2.2　**等式约束极值**……（395）
§2.3　**不等式约束极值**……（411）
（一）Kuhn—Tucker方法……（411）
（二）惩罚函数法……（421）
§2.4　**多性能指标最优化问题**（史兆印）……（429）
（一）基本概念……（430）
（二）多性能指标最优化问题的算法……（431）
（三）人机对话法……（431）

第三章　非线性静态大系统

§3.1　**三种分块计算方法**……（439）
（一）性能指标函数协调法——“非可行解法”……（440）
（二）模型协调法——“可行解法”……（445）
（三）混合法……（445）
（四）对比……（446）
（五）稳定性分析……（448）
§3.2　**三种分块计算方法的推广**……（448）
（一）子系统之间的相互联系是非线性的……（448）
（二）不可分离的性能指标函数……（449）
（三）不等式约束条件……（450）

第四章　低阶最佳动态系统理论

§4.1　**终端时间t_f固定**……（457）
（一）终端$x(t_f)$自由……（457）
（二）终端$x(t_f)$有限制……（461）
§4.2　**终端时间t_f自由**……（468）

（一）终端 $x(t_f)$自由……………………………………………………（468）
（二）终端 $x(t_f)$有限制…………………………………………………（470）
§4.3 低阶最佳动态离散系统…………………………………………（476）
§4.4 动态规划……………………………………………………………（477）
（一）什么是动态规划——最佳原理……………………………………（477）
（二）离散动态规划………………………………………………………（432）
（三）连续动态规划………………………………………………………（488）
（第四章未完，接下卷）

第六章　分布参数系统动力学

§6.1 引　论

以偏微分方程描述的系统称为分布参数系统，其状态向量是无限维的；与之相对应，前几章用常微分方程描述的系统称为集中参数系统，其状态向量是有限维的。这种区别已在§1.1中介绍过了，那里列举了一个分布参数系统的例子。下面我们再举几个例子，它们都属于线性系统。

例61.1：用一个可调节速度的运输机器将一材料均匀连续、又窄又薄的带钢通过加热炉，则带钢的温度分布情况可用下述方程描述

$$x_t(z,t)=\mu x_{zz}(z,t)+\nu(t)x_z(z,t)+\sigma\{x(z,t)-u(z,t)\} \qquad (1)$$

$$x_z(0,t)=0=x_z(1,t)$$

式中：x～带钢的温度分布　　　μ～传播系数

σ～与材料表面传导率成正比的常数　　　ν～带钢运动速度

u～带钢的外部温度分布

我们要求：控制温度分布u使得带钢的出口温度$x(1,t)$达到某一指定温度$\theta(t)$。要正确达到这个指定的温度$\theta(t)$是不可能的，我们只力求接近它，因此引入性能指标函数：

$$J=\int_0^{t_1}\{x(1,t)-\theta(t)\}^2dt \qquad (2)$$

这样问题便变成：控制温度分布u，满足(1)，使得由(2)定义的J达到最小。通常假定u是有限制的，比如说$|u(t)|\leqslant 1$。

例61.2：炼钢时，需要依据测量到的钢板表面某几点的温度来估计整个钢板的温度分布，这种温度分布的一个可能的数学模型是：

$$\rho C_1x_t(z,t)=kx_{zz}(z,t)-\alpha[x(z,t)-x_0(z,t)]+\xi(z,t);\quad 0<z<1 \qquad (3)$$

$$x_z(0,t)=0=x_z(1,t)$$

式中：ρ,C_1,k～钢板的密度，热容，热传导系数　　　α～热传导参数

x_0～平均冷却温度　　　$\xi(y,t)$～白噪音形式的干扰

要解决的问题是：根据n个点的测量结果

$$y_i(t)=x(z_i,t)+\eta_i(t),\qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (4)$$

来估算钢板的温度分布：$x(z,t)$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$t>0$

例61.3：一个国家的人口演变过程可以用下述双曲线型线性偏微分方程来描述：

$$\partial p(t,r)/\partial t+\partial p(t,r)/\partial r=-\mu(t,r)p(t,r) \qquad (5)$$

$$p(0,r)=p_0(r),\quad 0\leqslant r\leqslant 1;\quad p(t,0)=u(t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_1$$

式中：$p(t,r)$～时刻t、年龄为r的人的人口密度。　　　$p_0(r)$～给定的初始年龄分布

$\mu(t,r)$～死亡率函数　　　$u(t)$～出生率

选定出生率$u(t)$作为控制变量。人口控制问题要解决的问题是：确定一个最佳的$u(t)$使得在终端时刻t_1达到指定的人口年龄分布$q(r)$，即在数学上使得性能指标函数

$$J(u)=\int_0^1\{p(t_1,r)-q(r)\}^2dr+\int_0^{t_1}\lambda u^2(s)ds \qquad (6)$$

达到最小。$J(u)$中的第二项考虑了社会对出生率的影响，如政策的鼓励或限制等；λ是可以变化的。

例61.4：一根非均匀的紧拉的弦线，其运动可用下述方程描述

$$\left.\begin{array}{ll}\rho(z)x_{tt}(z,t)-(\alpha(z)x_z(z,t))_z=v(z,t) & \\ x(0,t)=0 \qquad\qquad x(1,t)=u(t) & \end{array}\right\} \tag{7}$$

式中：$x(z,t)$～在z处弦沿x方向的平移，　　$\rho(z)$～弦的密度分布

$\alpha(z)$ ～抗拉比例系数，　　u、v～末端控制和分布控制

我们希望选择u、v将弦控制到恢复状态，因此可选定性能指标函数为：

$$J(u)=\int_0^{t_1}\int_0^1\left[x^2(z,t)+\lambda_1 v^2(z,t)\right]dzdt+\lambda_2\int_0^{t_1}u^2(t)dt \tag{8}$$

其物理意义就是：于$[0,t_1]\times[0,1]$上，应用微小的控制，尽可能使弦紧靠零位

例61.5：Kalecki于1935年（见Econometrica, 3, 1935: a macrodynamic theory of business cycles）提出的资本股票$K(t)$涨落数学模型为：

$$dK(t)/dt=aK(t)+bK(t-h)+cu(t) \tag{9}$$

式中：a、b是常数；h为确定资本投入时刻和资本设备交付时刻的时间滞后；$u(t)$为控制函数我们希望在某时刻t_1将股票保持在某一要求的水平K_d之上或于时间区间$[t_1,t+h]$保持在此水平K_d之上。因而我们可以构成一个反馈控制$u(t)$来调节系统，使得性能指标函数

$$J(u)=\int_0^{t_1}\{[K(t)-K_d]^2+\lambda u^2(t)\}dt \tag{10}$$

达到最小。∎

下面我们将应用半群理论来分析和研究分布参数系统，半群理论是研究分布参数系统的一个重要工具，利用这一工具可以统一研究很广泛一类线性系统，包括集中参数、分布参数和时间滞后系统，其状态变量是有限维的或无限维的。

§6.2 半群理论

（一）

设$\mathbf{x}_0$是Banach空间X上的动力学系统在时刻$t_0=0$时的状态，而时刻t的状态为$\mathbf{x}(t)$。如果该动力学系统是线性自治系统，则对任意时刻t可定义线性算子

$$\mathbf{T}_t: X\to X \quad \mathbf{T}_0=\mathbf{E}\mathbf{x}(t)=\mathbf{T}_t\mathbf{x}_0 \tag{1}$$

此处$\mathbf{E}_0$为X上的恒等算子。假定所研究的动力学系统的状态还满足Hadamard适定条件（well—posed conditions）即：　（1）解唯一　（2）解连续地依赖于初始状态

若设$\mathbf{x}(t+s)$和$\mathbf{x}(s)$是从同一初始位置$\mathbf{x}_0\in X$出发分别经过时间$t+s$和s达到的状态，则由$\mathbf{x}(s)$出发的轨线经过时刻t后，由适定条件（1），必达到同一$\mathbf{x}(t+s)$即

$$\mathbf{x}(t+s)=\mathbf{T}_{t+s}\mathbf{x}_0=\mathbf{T}_t\mathbf{x}(s)=\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s\mathbf{x}_0\Rightarrow\mathbf{T}_{t+s}=\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s \tag{2}$$

由适定条件（2）可知$\mathbf{T}_t$是X上的有界算子。最后我们还假定轨线$\mathbf{x}(t)$具有所需要的光滑性，且对所有$\mathbf{x}_0\in X$ 当$t\to0^+$时，$\mathbf{x}(t)\to\mathbf{x}_0$，即：$\|\mathbf{T}_t\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0\|\to0$，$t\to0^+$

定义62.1：强连续半群乃是满足下述条件（3）的算子$\mathbf{T}_t: R_+\to\mathscr{L}(X)$（$\mathbf{T}_t$就是状态转移矩阵）

$$\mathbf{T}_{t+s}=\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s,\ 0\leqslant s\leqslant t;\ \mathbf{T}_0=\mathbf{E};\ \|\mathbf{T}_t\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_0\|\to0,\ t\to0^+,\ \forall\mathbf{x}_0\in X \tag{3}$$

例62.1：令$\mathbf{A}\in\mathscr{L}(X)$，且：$\exp\mathbf{A}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$　(4)

显然(4)式右边在一致拓扑下收敛，满足条件(3)，因此$\exp At$是一个强连续半群。

例62.2：令X是$[0,\infty)$上连续有界函数的全体用sup—模装配的Banach空间，考虑平移算子：

$$(T_t x)(z)=x(z+t) \qquad x\in X \qquad z\geqslant 0 \tag{5}$$

显然它满足(3)之一、二两式，至于对第三式，则有：

$$\|T_t x_0 - x_0\| = \sup_{z>0}|x_0(z+t)-x_0(z)|\to 0,\ t\to 0^+$$

例62.3：设$\{\phi_n\}(n=1,2,\cdots)$是可分Hilbert空间的最大正交基，$\{\lambda_n\}(n=1,2,\cdots)$是复数列，则

$$T_t x=\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\lambda_n t)\phi_n\langle\phi_n,x\rangle \tag{6}$$

是有界线性算子的充要条件是$\{\exp\lambda_n t\}$是有界列亦即$\sup_n Re\{\lambda_n\}<\infty$

在上述假设下我们将有：

$$T_{t+s}x=\sum_{n=1}^{\infty}\{\exp\lambda_n(t+s)\}\phi_n\langle\phi_n,x\rangle$$

而

$$\begin{aligned}T_tT_sx&=\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\lambda_n t)\phi_n\langle\phi_n,T_sx\rangle\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\lambda_n t)\phi_n\langle\phi_n,\sum_{m=1}^{\infty}(\exp\lambda_m s)\phi_m\langle\phi_m,x\rangle\rangle\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\lambda_n t)(\exp\lambda_n s)\phi_n\langle\phi_n,x\rangle=T_{t+s}x\end{aligned}$$

故　(3)第一式满足；第二式显然满足。又对某个k

$$\begin{aligned}\|T_tx-x\|^2&=\sum_{n=1}^{\infty}|(\exp\lambda_n t)-1|^2|\langle\phi_n,x\rangle|^2\\&=\sum_{n=1}^{N}|(\exp\lambda_n t)-1|^2|\langle\phi_n,x\rangle|^2+\sum_{n>N}|(\exp\lambda_n t)-1|^2|\langle\phi_n,x\rangle|^2\\&\leqslant\sup_{n=1,\dots,N}|\exp\lambda_n t-1|^2\sum_{n=1}^{N}|\langle\phi_n,x\rangle|^2+k\sum_{n>N}|\langle\phi_n,x\rangle|^2\end{aligned}$$

而对充分大的N和任一$\varepsilon>0$，$\sum_{n>N}|\langle\phi_n,x\rangle|^2<\varepsilon$，(3)第三式成立；所以$T_t$是一个强连续半群。∎　下述定理包含了半群的若干性质。

定理62.1：设T_t是Banach空间上的强连续半群，则

1) $\|T_t\|$在$[0,\infty)$的每一个子区间上有界
2) $\forall x\in X$，T_tx强连续
3) 若$\omega_0=\inf_{t>0}(t^{-1}\log\|T_t\|)$，则$\omega_0=\lim_{t\to\infty}(t^{-1}\log\|T_t\|)<\infty$
4) $\forall\omega>\omega_0$，存在一个常数M_ω使得$\forall t\geqslant 0$，$\|T_t\|\leqslant M_\omega e^{\omega t}$

证明〉：1) 先证$\|T_t\|$在原点的某个邻域中有界，即存在$\delta>0$和依赖于δ的M使得：

$$\|T_t\|\leqslant M,\ t\in[0,\delta]$$

用反证法，设若不然，则必存在序列$\{t_n\}\subset[0,\delta]$，当$t_n\to 0^+$时，$\|T_{t_n}\|\geqslant n$，由一致有界定理，存在一个x，使得$\{\|T_{t_n}x\|\}$无界，这与在原点的强连续性相矛盾。

令：　$t=m\delta+\tau,\quad 0\leqslant\tau<\delta$

则：　$\|T_t\|\leqslant\|T_\delta\|^m\|T_\tau\|\leqslant M^{1+m}\leqslant MM^{t/\delta}=Me^{\omega t}$，　$\omega=\delta^{-1}\log M$

2) 对固定的$t>0$、$s\geqslant 0$：$\|T_{t+s}x-T_tx\|\leqslant\|T_t\|\|T_sx-x\|\leqslant Me^{\omega t}\|T_sx-x\|$

所以，当$s\to 0^+$时　$\lim\|T_{t+s}x-T_tx\|=0$　而对充份小的$t>s\geqslant 0$：$\|T_{t-s}x-T_tx\|\leqslant\|T_{t-s}\|\|x-T_sx\|$　所以当$s\to 0^-$时，　$\lim\|T_{t+s}x-x\|=0$，从而T_tx是连续的。

3) 设$t_0>0$固定，则对每一个$t\geqslant t_0$，在$\inf_{t>0}t^{-1}\log\|T_t\|>-\infty$时，存在自然数

$n=1,2,\cdots$，使得$nt_0\leqslant t\leqslant(n+1)t_0$；

于是：　$t^{-1}\log\|T_t\|=t^{-1}\log\|T_{t_0}^n T_{t-nt_0}\|\leqslant t^{-1}n\log\|T_{t_0}\|+t^{-1}\log\|T_{t-nt_0}\|$

$$\leqslant t_0^{-1}\log\|T_{t_0}\|+t^{-1}\log\|T_{t-nt_0}\|$$

注意到t_0的任意性，则　$\overline{\lim}_{t\to\infty}\ t^{-1}\log\|T_t\|\leqslant\inf_{t>0}t^{-1}\log\|T_t\|\leqslant\underline{\lim}_{t\to\infty}t^{-1}\log\|T_t\|$

对$\inf_{t>0}t^{-1}\log\|T_t\|=-\infty$的情形可同样证明

4）若$\omega>\omega_0$，则存在$t_\omega>0$，使得：$t_\omega^{-1}\log\|T_{t_\omega}\|\leqslant\omega$，由3）的证明过程可知，$\forall t>0$，均有

$$t^{-1}\log\|T_t\|\leqslant t_\omega^{-1}\log\|T_{t_\omega}\|+t^{-1}\log\sup_{0<s<t_\omega}\|T_s\|\leqslant\omega+t^{-1}\log\sup_{0<s<t_\omega}\|T_s\|$$

故　$\|T_t\|\leqslant M_\omega e^{\omega t}$，$M_\omega=\log\sup_{0<s<t_\omega}\|T_s\|$

例62.4：不难证明：$\exp\|A\|t$，1，$\exp(\sup\mathrm{Re}\lambda_n t)$是$\|T_t\|$相应于例62.1，62.2，及62.3的半群的界。▌

以上只假定$T_t x$连续，这还不够，为了以后的需要，我们引入无穷小生成元的概念。

定义62.2：Banach空间X上，强连续半群的无穷小生成元A由下式定义

$$Ax=\lim_{t\to0+}t^{-1}(T_t-E)x \qquad (7)$$

只要这个极限存在，A的值域$D(A)$是X中上述极限存在的元素的集合。

例62.5：例62.1的半群的无穷小生成元是$A\in\mathscr{L}(X)$；例62.2的半群的无穷小生成元是$A=d/dz$，其值域为$D(A)=\{x:(dx/dz)\in X\}$；例62.3的半群的无穷小生成元是

$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\phi_n\langle\phi_n,x\rangle$，其值域为$D(A)=\{x:\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n\langle\phi_n,x\rangle|^2<\infty\}$。

定理62.2：设T_t是Banach空间X上的强连续半群，其无穷小生成元为A，则

1）若$x_0\in D(A)$，则$T_t x_0\in D(A)$，$\forall t\geqslant0$；

2）$d(T_t x_0)/dt=AT_t x_0=T_t Ax_0$，对$x_0\in D(A)$，$t>0$；

3）$d^n(T_t x_0)/dt^n=A^nT_t x_0=T_tA^n x_0$，对$x_0\in D(A^n)$，$t>0$；

4）$T_t x_0-x_0=\int_0^t T_s Ax_0 ds$，$x_0\in D(A)$；

5）A是一个闭线性算子；$D(A)$在X上稠密；

6）$\bigcap_n D(A^n)$在X上稠密。

证明〉：设$s>0$，考虑：$s^{-1}(T_{t+s}x_0-T_t x_0)=T_t s^{-1}(T_s-E)x_0=s^{-1}(T_s-E)T_t x_0$

如果$x_0\in D(A)$，当$s\to0$时，则上式中间一项极限存在，故其他两项的极限也存在。特殊情况下，$T_t x_0\in D(A)$，$T_t x_0$的强右导数等于$AT_t x_0=T_t Ax_0$。

对$t>0$和s充份小：　$(-s)^{-1}[T_{t-s}x_0-T_t x_0]=T_{t-s}s^{-1}(T_s-E)x_0$

所以强左导数存在且为$T_t Ax_0$。由归纳法可得出3）。

对4）：设X^*为X的对偶，取任意$x^*\in X^*$，则　$\langle x^*,T_t x_0-x_0\rangle=\int_0^t\frac{d}{du}\langle x^*,T_u x_0\rangle du$

此处〈·,·〉表示X和X^*之间的对偶积，因此：

$$\langle x^*,T_t x_0-x_0\rangle=\int_0^t\langle x^*,T_uAx_0\rangle du=\langle x^*,\int_0^t T_uAx_0du\rangle,\quad x_0\in D(A)$$

由Hahn-Banach泛函延拓定理即得结论4）。

现在：$\frac{T_s-E}{s}\int_0^t T_u x du=\frac{1}{s}\int_0^t T_{s+u}xdu-\frac{1}{s}\int_0^t T_u xdu$

〈令$\rho=s+u$〉　$=\frac{1}{s}\int_s^{t+s}T_\rho xd\rho-\frac{1}{s}\int_0^t T_u xdu=\frac{1}{s}\left[-\int_0^s T_\rho xd\rho+\int_t^{t+s}T_\rho xd\rho\right]$

$$=\frac{1}{s}\left[\int_0^t (\mathbf{T}_{t+u}-\mathbf{T}_u)\mathbf{x}du\right]=\frac{1}{s}\int_0^t \mathbf{T}_u(\mathbf{T}_t-\mathbf{E})\mathbf{x}du$$

当$s\to 0^+$，上式右端趋向于$(\mathbf{T}_t-\mathbf{E})\mathbf{x}$，因为$\mathbf{T}_t\mathbf{x}$是强连续的。于是：

$$\int_0^t \mathbf{T}_u\mathbf{x}du\in D(\mathbf{A}) \tag{8}$$

但当$t\to 0^+$时，$\frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{T}_u\mathbf{x}du\to\mathbf{x}$，所以对任意$\mathbf{x}\in X$，$D(\mathbf{A})$上存在一个趋向于$\mathbf{x}$的序列，这就证明了$\overline{D(\mathbf{A})}=X$

下面证明$\mathbf{A}$是闭的，设$\{\mathbf{x}_n\}$是$D(\mathbf{A})$中收敛于$\mathbf{x}$、并使$\mathbf{A}\mathbf{x}_n$收敛于$\mathbf{y}$的序列，则$\|\mathbf{T}_s\mathbf{A}\mathbf{x}_n-\mathbf{T}_s\mathbf{y}\|\leqslant Me^{\omega t}\|\mathbf{A}\mathbf{x}_n-\mathbf{y}\|$，因而在$[0,t]$上$\mathbf{T}_s\mathbf{A}\mathbf{x}_n$一致收敛于$\mathbf{T}_s\mathbf{y}$。因为$\mathbf{x}_n\in D(\mathbf{A})$，我们有：

$$\mathbf{T}_t\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_n=\int_0^t \mathbf{T}_s\mathbf{A}\mathbf{x}_n ds$$

应用Lebesgue控制收敛定理：　$\mathbf{T}_t\mathbf{x}-\mathbf{x}=\int_0^t \mathbf{T}_s\mathbf{y}ds$

故　$\mathbf{x}\in D(\mathbf{A})$，$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}$；于是证明了$\mathbf{A}$是闭的。

下证定理的第6部份：记$C_0^\infty(R_+)$是R_+上具有所有各阶连续导数和紧支集的全体实函数的集合，若$\phi\in C_0^\infty(R_+)$，则$\phi(u)\mathbf{T}_u\mathbf{x}$是$R_+\to X$的连续向量函数。设$X_0$是所有形如

$$\mathbf{g}=\int_0^\infty \phi(u)\mathbf{T}_u\mathbf{x}du,\quad \mathbf{x}\in X,\quad \phi\in C_0^\infty(R_+) \tag{9}$$

的元素的集合。我们将证明$X_0\subset D(\mathbf{A}^r)$，$\forall r=1,2,\cdots$，且$X_0$在$X$上稠密。对充份小的$s$

$$\frac{\mathbf{T}_s-\mathbf{E}}{s}\mathbf{g}=\frac{1}{s}\int_0^\infty \phi(u)[\mathbf{T}_{u+s}\mathbf{x}-\mathbf{T}_u\mathbf{x}]du=\frac{1}{s}\int_0^\infty \{\phi(u-s)-\phi(u)\}\mathbf{T}_u\mathbf{x}du$$

但当$s\to 0^+$时，$s^{-1}[\phi(u-s)-\phi(u)]$对$u$一致收敛于$-\phi'$，所以

$$\mathbf{A}\mathbf{g}=-\int_0^\infty \phi'(u)\mathbf{T}_u\mathbf{x}du$$

故$\mathbf{g}\in D(\mathbf{A})$，重复上面的论证，可证：$\mathbf{g}\in D(\mathbf{A}^r)$，$\forall r>0$

且
$$\mathbf{A}^r\mathbf{g}=(-1)^r\int_0^\infty \phi^{r}(u)\mathbf{T}_u\mathbf{x}du$$

从而证明了$X_0\subset\bigcap_{r=1}^\infty D(\mathbf{A}^r)$。现设$X_0$的闭包不是$X$，则存在$\mathbf{x}_0\in X$，且由Hahn-Banach定理$X$上存在一个有界的线性函数$\mathbf{x}_0^*$，使得：　$\langle\mathbf{x}_0^*,\mathbf{g}\rangle=0$，$\forall\mathbf{g}\in X_0$，$\langle\mathbf{x}_0^*,\mathbf{x}_0\rangle=1$

$$\therefore\ \langle\mathbf{x}_0^*,\int_0^\infty \phi(u)\mathbf{T}_u\mathbf{x}du\rangle=\int_0^\infty \phi(u)\langle\mathbf{x}_0^*,\mathbf{T}_u\mathbf{x}\rangle du=0,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(R_+),\ \mathbf{x}\in X$$

但$\langle\mathbf{x}_0^*,\mathbf{T}_u\mathbf{x}_0\rangle$连续且$\langle\mathbf{x}_0^*,\mathbf{x}_0\rangle=1$，故存在$\phi\in C_0^\infty(R_+)$使得：

$$\int_0^\infty \phi(u)\langle\mathbf{x}_0^*,\mathbf{T}_u\mathbf{z}_0\rangle du\neq 0,$$

得出矛盾，故有$\overline{X}_0=X$ ▮

上述定理说明，半群在确定抽象演化方程：　$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$，$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$

的解时起着重要的作用；特别是$\mathbf{A}$是强连续半群的生成元、且$\mathbf{x}_0\in D(\mathbf{A})$的情况下，$\mathbf{x}(t)=\mathbf{T}_t\mathbf{x}_0$就是它的解。所以得出强连续半群生成元的特性是很重要的。为此我们介绍

定理62.3（Hille-Yosida定理）：值域在Banach空间X上稠密的闭线性算子$\mathbf{A}$是某个强连续半群之生成元的充要条件是：存在实数M、ω，使对所有的实数$\lambda>\omega$、$\lambda\in\rho(\mathbf{A})$，$\rho(\mathbf{A})$为$\mathbf{A}$的预解集，$\mathbf{A}$的所有预解式$\mathbf{R}(\lambda,\mathbf{A})=(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$满足关系：

$$\|\mathbf{R}(\lambda,\mathbf{A})^r\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-r},\quad r=1,2,\cdots \tag{10}$$

此时：
$$\|T_t\| \leqslant M e^{\omega t} \tag{11}$$
我们先证下面的引理。

引理62.1：设T_t为强连续半群，它的无穷小生成元为A，且（11）成立；若$Re\lambda>\omega$ 则
$$\lambda\in\rho(A),\quad 且\qquad R(\lambda,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x dt \tag{12}$$
证明〉：设
$$R_\lambda x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x dt,\qquad x\in X,\qquad Re\lambda>\omega \tag{12a}$$
这个算子是确定的，因为：$\|e^{-\lambda t}T_t x\|\leqslant Me^{(\omega-\sigma)t}\|x\|$，$\sigma=Re\{\lambda\}$

此外，由于被积函数强连续，因而强可测，所以积分是确定的Bochner积分。我们有：
$$\|R_\lambda\|\leqslant M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\omega)t}dt=\frac{M}{\sigma-\omega}$$
故R_λ是有界的。

下面我们证明：$\qquad R_\lambda x\in D(A)$及$(\lambda E-A)R_\lambda x=x,\ \forall x\in X$

∵
$$s^{-1}(T_s-E)R_\lambda x=s^{-1}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T_{s+t}-T_t]x dt\ (\text{(12a)代入})$$
$$=s^{-1}(e^{\lambda s}-1)\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x dt-s^{-1}\int_0^s e^{-\lambda t}T_t x dt$$
∴
$$AR_\lambda x=\lim_{s\to0^+}[s^{-1}(T_s-E)]R_\lambda x=\lambda R_\lambda x-x,\quad \forall x\in X\ (\text{因A是无穷小生成元})$$
又：
$$R_\lambda Ax=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t Ax dt=A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x dt=AR_\lambda x,\qquad \forall x\in D(A)$$
故：
$$\left.\begin{aligned}&R_\lambda(\lambda E-A)x=x,\quad x\in D(A)\\&(\lambda E-A)R_\lambda x=x,\quad x\in X\end{aligned}\right\}\Rightarrow R(\lambda,A)=R_\lambda \quad ▮$$
下面证明定理62.3：

1）必要性：由引理62.1之（12）式
$$\frac{d^{(r-1)}R(\lambda,A)x}{d\lambda^{(r-1)}}=R^{(r-1)}(\lambda,A)x=\int_0^\infty(-t)^{r-1}e^{-\lambda t}T_t x dt,\qquad r=1,2,\cdots$$
∴
$$\|R^{(r-1)}(\lambda,A)\|\leqslant M\int_0^\infty t^{r-1}e^{-(\sigma-\omega)t}dt=M(r-1)!(\sigma-\omega)^{-r}$$
但于$\lambda\in\rho(A)$，预解式是解析的，故
$$R^{(r-1)}(\lambda,A)=(-1)^{r-1}(r-1)![R(\lambda,A)]^r\Rightarrow\|R(\lambda,A)^r\|\leqslant M(\sigma-\omega)^{-r}$$
2）充分性：令$A_\lambda=\lambda^2R(\lambda,A)-\lambda E$，$\lambda>\omega$，则$A_\lambda\in\mathscr{L}(X)$。我们可以构造一个半群
$$T_t^\lambda=\exp A_\lambda t=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^\infty\frac{(\lambda^2t)^n}{n!}(\lambda E-A)^{-n}$$
我们将证明，当$\lambda\to\infty$时，T_t^λ的强极限存在且是我们需要的半群T_t。

先证当$\lambda\to\infty$时，$\qquad \|A_\lambda x-Ax\|\to0,\ x\in D(A)$

当$x\in D(A)$时，有：$\qquad \|\lambda(\lambda E-A)^{-1}x-x\|=\|(\lambda E-A)^{-1}Ax\|\leqslant M\|Ax\|(\lambda-\omega)^{-1}$

对充分大的λ：$\qquad \|\lambda(\lambda E-A)^{-1}\|\leqslant\lambda M(\lambda-\omega)^{-1}<2M$

利用Banach-Steinhaus定理，将得到：$\lambda\to\infty$，对所有$x\in X$，有$\lambda(\lambda E-A)^{-1}x\to x$

今$A_\lambda x=\lambda(\lambda E-A)^{-1}Ax$，故当$\lambda\to\infty$时，对$x\in D(A)$，$A_\lambda x\to Ax$

注意：
$$\|T_t^\lambda\|\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^\infty\frac{(\lambda^2t)^n}{n!}\frac{M}{(\lambda-\omega)^n}=M\exp\left(\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}\right)t$$
又：
$$(\lambda E-A)^{-1}(\mu E-A)^{-1}=(\mu E-A)^{-1}(\lambda E-A)^{-1}$$
∴
$$A_\lambda A_\mu=A_\mu A_\lambda,\qquad 及A_\lambda T_t^\mu=T_t^\mu A_\mu。$$

因而　若$\mathbf{x}\in D(\mathbf{A})$，则：

$$\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{x}-\mathbf{T}_t^{\mu}\mathbf{x}=\int_0^t\frac{d}{ds}(\mathbf{T}_{t-s}^{\mu}-\mathbf{T}_s^{\lambda})\mathbf{x}ds=\int_0^t\mathbf{T}_{t-s}^{\mu}(\mathbf{A}_\lambda-\mathbf{A}_\mu)\mathbf{T}_s^{\lambda}\mathbf{x}ds$$

$$=\int_0^t\mathbf{T}_{t-s}^{\mu}\mathbf{T}_s^{\lambda}(\mathbf{A}_\lambda-\mathbf{A}_\mu)\mathbf{x}ds$$

于是：$\|\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{x}-\mathbf{T}_t^{\mu}\mathbf{x}\|\leqslant\left\{M^2\exp\frac{\mu\omega}{\mu-\omega}t\right\}\|(\mathbf{A}_\lambda-\mathbf{A}_\mu)\mathbf{x}\|\int_0^t\exp\frac{-(\lambda-\mu)\omega^2 s}{(\mu-\omega)(\lambda-\omega)}ds$

选$\lambda>\mu$，将有：　$\|\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{x}-\mathbf{T}_t^{\mu}\mathbf{x}\|\leqslant\left\{M^2\exp\frac{\mu\omega}{\mu-\omega}t\right\}\|(\mathbf{A}_\lambda-\mathbf{A}_\mu)\mathbf{x}\|t$

但当λ、$\mu\to\infty$时，$\|(\mathbf{A}_\lambda-\mathbf{A}_\mu)\mathbf{x}\|\to 0$，因$\lambda\to\infty$时，$\mathbf{A}_\lambda\mathbf{x}\to\mathbf{A}\mathbf{x}$。所以$\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{x}$在紧区域中一致收敛于一个极限，将它记作$\mathbf{T}_t\mathbf{x}$。今$D(\mathbf{A})$在$X$上稠密，因而可以应用 Banach-Steinhaus 定理，将收敛性延拓到每一个$\mathbf{x}\in X$。

剩下要证明的是：$\mathbf{T}_t$是以$\mathbf{A}$为生成元的强连续半群。

我们有　$\mathbf{T}_{t+s}\mathbf{x}=\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{T}_{t+s}^{\lambda}\mathbf{x}=\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{T}_s^{\lambda}\mathbf{x}=\mathbf{T}_t\mathbf{T}_s\mathbf{x},\ \forall\mathbf{x}\in X$

又，$\mathbf{T}_0=\mathbf{E}$；而强连续性是紧区域上一致收敛性的直接推论。

$\because$　$\|\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{x}-\mathbf{T}_t\mathbf{A}\mathbf{x}\|\leqslant\|\mathbf{T}_t^{\lambda}\|\|\mathbf{A}_\lambda\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|+\|(\mathbf{T}_t^{\lambda}-\mathbf{T}_t)\mathbf{A}\mathbf{x}\|$

故当$\lambda\to\infty$时，对$\mathbf{x}\in D(A)$，$\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{x}$在紧区域上一致收敛于$\mathbf{T}_t\mathbf{A}\mathbf{x}$，因此我们可以应用Lebesgue控制收敛定理于：　$\mathbf{T}_t^{\lambda}\mathbf{x}-\mathbf{x}=\int_0^t\mathbf{T}_s^{\lambda}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{x}ds$

从而得到：　$\mathbf{T}_t\mathbf{x}-\mathbf{x}=\int_0^t\mathbf{T}_s\mathbf{A}\mathbf{x}ds,\quad \mathbf{x}\in D(\mathbf{A})$

于是$\mathbf{T}_t$的生成元$\widetilde{\mathbf{A}}$是$\mathbf{A}$的一个延拓，因为

$$\widetilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}=\lim_{t\to 0^+}(\mathbf{T}_t\mathbf{x}-\mathbf{x})t^{-1}=\mathbf{A}\mathbf{x},\quad 对\mathbf{x}\in D(\mathbf{A})$$

由假定和引理62.1，如果$\lambda>\omega$，则$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})$和$(\lambda\mathbf{E}-\widetilde{\mathbf{A}})$分别一对一地映$D(\mathbf{A})$和$D(\widetilde{\mathbf{A}})$到$X$上；　又：$\mathbf{A}D(\mathbf{A})=\widetilde{\mathbf{A}}D(\mathbf{A})$，所以$D(\mathbf{A})=D(\widetilde{\mathbf{A}})$，即$\mathbf{A}=\widetilde{\mathbf{A}}$。从前面证明过程知，(11)显然成立。证毕。∎

例62.3中，我们在可分Hilbert空间上定义了半群，并在例62.5中给出了它们的生成元。下面通过证明收敛性来说明Hille-Yosida定理的一个应用。

例62.6：设$\{\lambda_n\}$是一个复数列，$\{\phi_n\}$是可分Hilbert空间H上的最大正交基，我们在H上定义算子

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\phi_n\langle\phi_n,\mathbf{x}\rangle \tag{13}$$

其值域　$$D(\mathbf{A})=\left\{\mathbf{x}\,|:\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n\langle\phi_n,\mathbf{x}\rangle|^2<\infty\right\} \tag{14}$$

则$\mathbf{A}$是闭稠定算子，此时$(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})$可逆的充要条件是：$\inf_n|\lambda-\lambda_n|>0$

进而，若$\sup_n Re\{\lambda_n\}<\infty$，则$\mathbf{A}$是强连续半群的生成元。

证明〉：显然，当n充分大时，满足$\langle\phi_n,\mathbf{x}_p\rangle=0$的所有序列$\{\mathbf{x}_p\}$属于$D(\mathbf{A})$，且在H上构成一个稠密集。

设$\{\mathbf{x}_p\}$是$D(\mathbf{A})$上的序列且当$p\to\infty$时，有$\mathbf{x}_p\to\mathbf{x}_0$和$\mathbf{A}\mathbf{x}\to\mathbf{y}_0$。因为序列$\{\mathbf{A}\mathbf{x}_p\}$有界，我们有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n\langle\phi_n,\mathbf{x}_p\rangle|^2\leqslant M,\qquad p=1,2,\cdots$$

故： $$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n\langle\phi_n,x_0\rangle|^2\leqslant M$$

所以$Ax_0=y_0$，这就证明了A是闭的。

考虑方程： $$\lambda x-Ax=y;\quad x\in D(A),\quad y\in H \tag{15}$$

若令： $$y=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\langle\phi_n,y\rangle$$

则（15）等价于： $(\lambda-\lambda_n)\langle\phi_n,x\rangle=\langle\phi_n,y\rangle$，$n=1,2,\cdots$

故： $$\langle\phi_n,x\rangle=\langle\phi_n,y\rangle(\lambda-\lambda_n)^{-1},\quad \lambda\neq\lambda_n$$

又： $$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\langle\phi_n,x\rangle=x\in H\iff \inf_n|\lambda-\lambda_n|>0$$

因此，若这个条件成立，则$(\lambda E-A)$是可逆的，且$\lambda\in\rho(A)$。

由Hille-Yosida定理可知，若存在常数M、ω，使得：

$$\|R(\lambda,A)^r\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-r};\ r=1,2,\cdots,\ \forall 实\lambda>\omega$$

则A是半群生成元。

令 $$R(\lambda,A)^r y=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\langle\phi_n,y\rangle(\lambda-\lambda_n)^{-r}$$

故 $$\|R(\lambda,A)^r\|\leqslant\sup|\lambda-\lambda_n|^{-r}=\{\sup_n|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}^r$$

因此需要证明的是，存在M、ω使得： $$\{\sup_n(\lambda-\omega)|\lambda-\lambda_n|^{-1}\}^k\leqslant M \tag{16}$$

而若$Re\{\lambda_n\}\leqslant\omega$，则有： $$(\lambda-\omega)|\lambda-\lambda_n|^{-1}\leqslant 1$$

故（16）成立。显然A生成的正是例62.2中的半群。∎

一般地说，检验Hille-Yosida定理的条件是困难的，于是提出了一些比较容易验证的条件，其中之一是由对偶算子来刻划的。

定义62.3（对偶算子）：设A是Banach空间X上值域为$D(A)$的闭稠定线性算子。A的对偶算子A^*乃是X的对偶空间X^*上的一种变换，A^*的值域为$D(A^*)$，对任一$x^*\in D(A^*)$，存在$g^*\in X^*$，使得： $\langle g^*,x\rangle=\langle x^*,Ax\rangle$，$\forall x\in D(A)$ 此处 $A^*x=g^*$

定理62.4：设A是Banach空间X上的闭稠定线性算子，则于X上、A生成对所有$t\geqslant 0$满足$\|T_t\|\leqslant e^{\omega t}$的半群$T_t$的充要条件是：对所有$\lambda>\omega$，

$$\|(\lambda E-A)x\|_X\geqslant(\lambda-\omega)\|x\|_X,\quad x\in D(A) \tag{17}$$

$$\|(\lambda E-A^*)x^*\|_{X^*}\geqslant(\lambda-\omega)\|x^*\|_{X^*},\quad x^*\in D(A^*) \tag{18}$$

证明〉：1）充分性。先证$(\lambda E-A)$在X上是一对一的上射。用反证法，若结论不成立，则对$x\in D(A)$，我们有$\lambda x-Ax=0$。但从(17)可由此推出$x=0$，所以$(\lambda E-A)$是可逆的。它的值域是X的闭子空间，因为如果令$y_n=\lambda x_n-Ax_n$，$x_n\in D(A)$，且当$n\to\infty$时，$y_n\to y$，则：

$$\|y_n-y_m\|_X=\|\lambda(x_n-x_m)-A(x_n-x_m)\|\geqslant(\lambda-\omega)\|x_n-x_m\|$$

所以x_n是Cauchy列，从而当$n\to\infty$时，$x_n\to x_0$。

此外，因$(\lambda E-A)$是闭的，所以$x_0\in D(A)$，$y=Ax_0$。若$(\lambda E-A)$的值域不是整个空间，则存在一点$x^*\in X^*$、$x^*\neq 0$，使得：

$$\langle x^*,\ (\lambda E-A)x\rangle=0,\quad \forall x\in D(A)$$

此时，$\lambda\langle x^*,x\rangle=\langle x^*,Ax\rangle$，故$x^*\in D(A^*)$，且$A^*x^*=\lambda x^*$。

但从（18）： $$\|(\lambda E-A^*)x^*\|_{X^*}\geqslant(\lambda-\omega)\|x^*\|_{X^*}$$

所以 $x^*=0$，得出矛盾，从而$\lambda E-A$是X的上射。

又由（17）： $$\|(\lambda E-A)^{-1}\|\leqslant(\lambda-\omega)^{-1}$$

故：　　　　　$\|(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-r}\|\leqslant(\lambda-\omega)^{-r}$　　　$r=1,2,\cdots$

应用Hille-Yosida定理可知，$\mathbf{A}$生成一个强连续半群。

2）必要性：若$\mathbf{A}$生成一个$\|\mathbf{T}_t\|\leqslant e^{\omega t}$的强连续半群$\mathbf{T}_t$，则根据Hille-Yosida 定理：

$$\|\mathbf{R}(\lambda,\mathbf{A})\|\leqslant(\lambda-\omega)^{-1},\qquad \text{对}\lambda>\omega$$

或即：　$$\|\lambda\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x}\|\geqslant(\lambda-\omega)\|\mathbf{x}\|,\qquad \text{对}\mathbf{x}\in D(\mathbf{A})$$

下证(18)式：如果$\mathbf{x}^*\in D(\mathbf{A}^*)$，则

$$\begin{aligned}\|\lambda\mathbf{x}^*-\mathbf{A}\mathbf{x}^*\|&=\sup_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1}|\langle(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}^*)\mathbf{x}^*,\ \mathbf{x}\rangle|\\&\geqslant\sup_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1,\mathbf{x}\in D(\mathbf{A})}|\langle\mathbf{x}^*,(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}\rangle|\\&=\sup_{\|\mathbf{R}(\lambda,\mathbf{A})\mathbf{y}\|\leqslant 1}|\langle\mathbf{x}^*,\mathbf{y}\rangle|\\&=\sup_{[\|\mathbf{y}\|(\lambda-\omega)^{-1}]\leqslant 1}|\langle\mathbf{x}^*,\mathbf{y}\rangle|=(\lambda-\omega)\|\mathbf{x}^*\|.\end{aligned}$$

当X是Hilbert 空间的特殊情况下，(17)(18)还可化成更简单的形式。事实上(17)与

$$\langle\lambda\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x},\ \lambda\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x}\rangle\geqslant(\lambda-\omega)^2\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle,\ \text{对}\lambda>\omega,\ \mathbf{x}\in D(\mathbf{A})$$

或　$$2\lambda(\omega\|\mathbf{x}\|^2-Re\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle)+\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x}\rangle-\omega^2\|\mathbf{x}\|^2\geqslant 0 \tag{18a}$$

等价；若存在一个β使得：　$$\beta\|\mathbf{x}\|^2\geqslant Re\{\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\},\qquad \mathbf{x}\in D(\mathbf{A}) \tag{18b}$$

则适当地选择ω（见本章末〈附注一〉），上述不等式(18a)成立。

同样，（18）成立，若：　$$\beta\|\mathbf{x}\|^2\geqslant Re\{\langle\mathbf{A}^*\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\},\qquad \mathbf{x}\in D(\mathbf{A}^*) \tag{18c}$$

最后，请注意，假设"$\|\mathbf{T}_t\|\leqslant e^{\omega t}$"不是本质的限制，因为对给定的Banach空间$X$和$X$上满足关系$\|\mathbf{T}_t\|\leqslant Me^{\omega t}$的半群$\mathbf{T}_t$，总可以在$X$上引入一个等效的范数$\|\cdot\|_*$使得$\|\mathbf{T}_t\mathbf{x}\|_*\leqslant e^{\omega t}\|\mathbf{x}\|_*$；事实上，若我们令$\|\mathbf{x}\|_*=\sup e^{-\omega t}\|\mathbf{T}_t\mathbf{x}\|$，$t\geqslant 0$，不难验证这个范数就具有我们所需要的特性。但应注意，如果原来的空间是Hilbert空间，则相对新的范数$\|\cdot\|_*$，它就不再保持这个特性了。

例62.7：设　$\mathbf{A}\mathbf{x}=-d\mathbf{x}/d\xi$，$X\in L^2[0,1]$及$D(\mathbf{A})=\{\mathbf{x}\,|:\mathbf{x}\in H^1[0,1],\ \mathbf{x}(0)=0\}$

不难证明：$\mathbf{A}^*\mathbf{x}=d\mathbf{x}/d\xi$，　　　$D(\mathbf{A}^*)=\{\mathbf{x}\,|:\mathbf{x}\in H^1[0,1],\ \mathbf{x}(1)=0\}$

及　$\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2(1)\leqslant\beta\|\mathbf{x}\|^2$，　$\langle\mathbf{A}^*\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2(0)\leqslant\beta\|\mathbf{x}\|^2$

此处$\beta=0$。(18b)(18c)成立，所以$\mathbf{A}$在X上生成一个$\|\mathbf{T}_t\|\leqslant 1$的半群$\mathbf{T}_t$。

例62.8：研究系统

$$\ddot{\mathbf{x}}+\alpha'\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}\mathbf{x}=0,\ \ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\ \ \dot{\mathbf{x}}(0)=\mathbf{x}_1,\ \ \alpha'\geqslant 0$$

此处$\mathbf{A}$为实Hilbert空间H上的正自伴算子，其值域为$D(\mathbf{A})$，使得：

$$\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\geqslant k\|\mathbf{x}\|^2,\qquad \forall\mathbf{x}\in D(\mathbf{A}),\qquad k>0$$

令　　$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{y}$，则　$\dot{\mathbf{y}}=-\alpha'\mathbf{y}-\mathbf{A}\mathbf{x}$

将上述方程写成：　$$\dot{\mathbf{w}}=\mathscr{A}\mathbf{w},\qquad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\end{bmatrix},\ \mathscr{A}=\begin{bmatrix}0&\mathbf{E}\\-\mathbf{A}&-\alpha'\end{bmatrix}$$

引入 Hilbert 空间　　$\mathscr{H}=D(\mathbf{A}^{1/2})\times H$，内积为：

$$\langle\mathbf{w},\bar{\mathbf{w}}\rangle_{\mathscr{H}}=\langle\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{x},\mathbf{A}^{1/2}\bar{\mathbf{x}}\rangle_H+\langle\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}}\rangle_H\qquad \bar{\mathbf{w}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}\\\bar{\mathbf{y}}\end{bmatrix}$$

所以：　$$\langle\mathbf{w},\mathscr{A}\mathbf{w}\rangle_{\mathscr{H}}=\langle\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},-\mathbf{A}\mathbf{x}-\alpha'\mathbf{y}\rangle=-\alpha'\|\mathbf{y}\|^2$$

其中：　$$\mathbf{w}\in D(\mathscr{A})=D(\mathbf{A})\times D(\mathbf{A}^{1/2})$$

易证，$\mathscr{A}$的相对于Hilbert空间$\mathscr{H}$的共轭算子$\mathscr{A}^*$由下式决定：

$$\mathscr{A}^*\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -E\\A & -\alpha'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad D(\mathscr{A}^*)=D(\mathscr{A})$$

所以$\langle w,\mathscr{A}^*w\rangle=-\alpha'\|y\|^2$，因而可以应用定理62.4断定$\mathscr{A}$在$\mathscr{H}$上产生一个强连续半群。

（二）对 偶 半 群

首先我们抄录下述命题(见Yosida.K.,Functional Analysis,Springer-Verlag,1966)

命题62.1：设A是一个线性算子，值域$D(A)$在Banach 空间X上稠密。

1）对偶A^*是弱*闭线性算子；若A有界，则$A^*\in\mathscr{L}(X^*)$，$\|A^*\|=\|A\|$。

2）若A是闭的，则$D(A^*)$在X^*上弱*稠密；若X是自反空间，则$D(A^*)$在X^*上强稠密。▮

这个命题的一个直接的应用就是它和定义62.1、62.2一起得到下面的定理。

定理62.5：设T_t是 Banach 空间X上的强连续半群，则$\|T_t^*\|=\|T_t\|$，T_t^*是线性算子，且

1）$T_0^*=E^*$（X^*上的恒等算子）

2）$T_{t+s}^*=T_t^*T_s^*$，t、$s\geqslant 0$

3）弱$^*\lim_{t\to 0+}T_t^*x^*=x^*$，　　$\forall x^*\in X^*$。▮

通常T_t^*并不是强连续的，但我们的主要兴趣是自反 Banach 空间，在此种空间上弱和弱*拓扑是等效的，从而T_t^*将是弱连续的。

定理62.6：若T_t是 Banach 空间X上的弱连续半群，则它又是强连续的。

证明>：设$x(t)=T_tx_0$，则$\forall t\geqslant 0$，x是弱连续的，所以x强可测，而$\|x(t)\|$在紧区域中是有界的（见Dunford. N等，Linear Operator Interscience 1959，1963）；所以x是Bochner 可积。

现设：　$0\leqslant\alpha<\eta<\beta<\xi-\varepsilon<\xi$，$\varepsilon>0$

并令：　$x(\xi)=T_\xi x_0=T_\eta T_{\xi-\eta}x_0=T_\eta x(\xi-\eta)$

则：　$(\beta-\alpha)x(\xi)=\int_\alpha^\beta x(\xi)d\eta=\int_\alpha^\beta T_\eta x(\xi-\eta)d\eta$

所以：　$(\beta-\alpha)\{x(\xi\pm\varepsilon)-x(\xi)\}=\int_\alpha^\beta T_\eta\{x(\xi\pm\varepsilon-\eta)-x(\xi-\eta)\}d\eta$

而且：　$(\beta-\alpha)\|x(\xi\pm\varepsilon)-x(\xi)\|\leqslant\sup\|T_\eta\|\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|x(s\pm\varepsilon)-x(s)\|ds$

今：　$\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|x(s\pm\varepsilon)-x(s)\|ds\to 0$，　当$\varepsilon\to 0$时.

这个结果对连续函数x肯定是成立的，而对x Bochner可积,存在一个连续函数$\bar{x}$，使得对任意的$\varepsilon'>0$，有

$$\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|x(s)-\bar{x}(s)\|ds\leqslant\varepsilon'$$

故：
$$\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\|x(s\pm\varepsilon)-x(s)\|ds\leqslant\int_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha}\Big[\|x(s\pm\varepsilon)-\bar{x}(s\pm\varepsilon)\|+\|\bar{x}(s\pm\varepsilon)-\bar{x}(s)\|+\|\bar{x}(s)-x(s)\|\Big]ds$$

这就证明了对$t>0$，$x(t)$是强连续的。

现设$t_n<1$是任意正有理数，考虑所有有限的线性组合$\Sigma\alpha_nT_{t_n}x_0$组成的可列集S，α_n为有理数。若S的强闭包记作$\bar{S}$，则$\bar{S}$是弱闭的，且因当$t_n\to 0$时 在弱拓扑意义下$T_{t_n}x_0\to x_0$，所

以$x_0\in \overline{S}$。对$t>0$，由T_t的半群性质，我们有$T_tT_{t_n}x_0=T_{t+t_n}x_0$，故

$$T_tT_{t_n}x_0\to T_0x_{t_n},\qquad 当t\to 0.$$

对任一$x_m\in S$，
$$x_m=\sum \alpha_n T_{t_n}x_0,$$

此处，"和"是有限的，故：
$$T_tx_m\to x_m,\qquad t\to 0$$

于是
$$\|T_tx_0-x_0\|\leqslant\|T_tx_m-x_m\|+\|x_m-x_0\|+\|T_t(x_0-x_m)\|$$
$$\leqslant\|T_tx_m-x_m\|+[\sup_{t\in[0,1]}\|T_t\|+1]\|x_m-x_0\|$$

但 $\inf_{x_m\in S}\|x_m-x_0\|=0$，又$T_tx_m\to x_m$ 当$t\to 0$；所以$T_tx_0\to x_0$ 当$t\to 0$；从而完成了本定理的证明。

定理62.7：强连续半群T_t的无穷小生成元A的对偶A^*是闭稠定线性算子，如果X是自反Banach空间。

且 1）若 $x^*\in D(A^*)$，则$T_t^*x^*\in D(A^*)$，

$$A^*T_t^*x^*=T_t^*A^*x^*,\qquad T_t^*x^*-x^*=\int_0^t T_u^*A^*x^*du;$$

2）元素$x^*\in X^*$属于$D(A^*)$的充要条件是当$s\to 0^+$时，$s^{-1}(T_s^*-E^*)x^*$在弱*拓扑意义下收敛，弱*极限为A^*x^*，

证明>：1）若$x^*\in D(A^*)$，则对每一个固定的$t\geqslant 0$和对所有$x\in D(A)$，

$$\langle T_t^*A^*x^*,x\rangle=\langle x^*,AT_tx\rangle=\langle x^*,T_tAx\rangle=\langle T_t^*x^*,Ax\rangle=\langle A^*T_t^*x^*,x\rangle$$

所以
$$T_t^*x^*\in D(A^*)及A^*T_t^*x^*=T_t^*A^*x^*,$$

又
$$\int_0^t\langle T_u^*A^*x^*,x\rangle du=\int_0^t\langle A^*x^*,T_ux\rangle du$$
$$=\langle A^*x^*,\int_0^t T_ux\,du\rangle=\langle x^*,A\int_0^t T_uxdu\rangle$$

在证明定理62.2时已证明过：

$$A\int_0^t T_uxdu=T_tx-x,\qquad \forall\ x\in X,$$

于是
$$\int_0^t\langle T_u^*A^*x^*,x\rangle du=\langle T_t^*x^*-x^*,x\rangle\qquad 从而证明了1).$$

2）设$x^*\in X^*$、当$s\to 0^+$使得$s^{-1}(T_s^*-E^*)x^*$在弱*拓扑意义下收敛于g^*，则$\forall\ x\in D(A)$

有
$$\langle g^*,x\rangle=\lim_{s\to 0+}\langle\frac{T_s^*-E^*}{s}x^*,x\rangle=\lim_{s\to 0+}\langle x^*,\frac{T_s-E}{s}x\rangle=\langle x^*,Ax\rangle$$

所以$x^*\in D(A^*)$及$A^*x^*=g^*$。反之，对任意固定的$x^*\in D(A^*)$，有

$$\frac{1}{s}\langle(T_s^*-E^*)x^*,x\rangle=\frac{1}{s}\int_0^s\langle T_u^*A^*x^*,x\rangle du=\frac{1}{s}\int_0^s\langle A^*x^*,T_ux\rangle du$$
$$=\langle A^*x^*,\frac{1}{s}\int_0^s T_uxdu\rangle$$

因为当$s\to 0^+$时，$\frac{1}{s}\int_0^s T_uxdu$在强拓扑意义下收敛到$x$，所以

$$\lim_{s\to 0+}\langle\frac{1}{s}(T_s^*-E^*)x,x\rangle=\langle A^*x^*,x\rangle,\qquad \forall\ x\in X$$ ▮

注意：对偶算子A^*是T_t^*的无穷小生成元。

(三)非齐次微分方程

我们业已看到，若A生成一个强连续半群T_t，则齐次方程$\dot{x}=Ax$，$x(0)=x_0\in D(A)$的解为$x(t)=T_tx_0$。现在让我们来研究非齐次方程：

$$\dot{x}=Ax+f,\qquad x(0)=x_0. \tag{19}$$

此处假定$f\in C(0,t_1;X)$。设x是方程(19)在区间$[0,t_1]$上的解，则

$$dT_{t-s}x(s)/ds=-AT_{t-s}x(s)+T_{t-s}[Ax(s)+f(s)]=T_{t-s}f(s)$$

于是
$$x(t)=T_tx_0+\int_0^t T_{t-s}f(s)ds \tag{20}$$

可能设想(20)总是(19)的解，但是在一般情况下这个设想却是不成立的。对此问题我们将有

定理62.8：若A在Banach空间X中生成一个强连续半群且

1) $f\in C^1(0,t_1;X)$；　　2) $x_0\in D(A)$

则(20)在区间$[0,t_1]$上连续可微且是方程(19)的解。

证明〉：显然，需要证明的只是$\int_0^t T_{t-s}f(s)ds$满足方程(19)

令
$$v(t)=\int_0^t T_{t-s}f(s)ds$$

则：
$$v(t)=\int_0^t T_{t-s}\left(f(0)+\int_0^s f'(\alpha)d\alpha\right)ds=\int_0^t T_{t-s}f(0)ds+\int_0^t\int_\alpha^t T_{t-s}f'(\alpha)ds\,d\alpha$$

今：
$$T_{t-\alpha}x-x=A\int_\alpha^t T_{t-s}xds,\ \text{对所有}\ x\in X$$

所以　$v\in D(A)$　及

$$Av(t)=(T_t-E)f(0)+\int_0^t(T_{t-\alpha}-E)f'(\alpha)d\alpha$$

今：
$$v(t)=\int_0^t T_sf(t-s)ds$$

故：
$$\frac{dv}{dt}=T_tf(0)+\int_0^t T_sf'(t-s)ds\Rightarrow\frac{dv}{dt}=Av(t)+f(t)$$ ∎

这个定理的条件对控制问题来说太强了，在控制问题中，通常不希望假设$f\in C^1(0,t_1;X)$。如果我们只要求几乎处处满足(19)的解，则可以减弱要求f的条件

引理62.2：若A在Banach空间X上生成一个连续半群T_t，且对几乎所有$t>s\in[0,t_1]$，$T_{t-s}f(s)\in D(A)$，$f\in L^1(0,t_1;X)$及$AT_{t-s}f(s)\in L^1(0,t;X)$，则(20)是(19)的唯一解.

证明〉：设$v(t)=\int_0^t T_{t-s}f(s)ds$，则因A是闭的，在上述假设条件下，$v(t)\in D(A)$及

$Av(t)=\int_0^t AT_{t-s}f(s)ds$，所以$Av(t)$是Bochner可积的，及

$$\int_0^\alpha Av(t)dt=\int_0^\alpha\int_0^t AT_{t-s}f(s)ds\,dt=\int_0^\alpha\int_s^\alpha AT_{t-s}f(s)dtds\quad\langle\text{根据Fubini定理}\rangle$$

$$=\int_0^\alpha[T_{\alpha-s}f(s)-f(s)]ds\quad\langle\text{根据定理62.2之4),因对}\ t-s>0,T_{t-s}f(s)\in D(A)\rangle$$

$$=v(\alpha)-\int_0^\alpha f(s)ds.$$

所以
$$v(\alpha)=\int_0^\alpha f(s)\,ds+\int_0^\alpha Av(s)ds$$