複變函數及其應用

Б. А. ФУКС, Б. В. ШАБАТ 著
趙 根 榕 譯

商 務 印 書 館

複變函數及其應用

Б. А. 福克斯 著
Б. В. 沙巴特
趙根榕 譯

商務印書館

本書係譯自蘇聯國家技術理論書籍出版社(Гостехиздат) 1949 年出版的福克斯(Б. А. Фукс)與沙巴特(Б. В. Шабат)合著的“複變函數及其應用”(Функции комплексного переменного и некоторые их приложения) 1949 年版譯出的。原書係“工程師物理數學叢書”之一。可供高等工業學校的學生和研究生用,並可供工程師之參考。

複變函數及其應用

趙根榕譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新華書店總經售
商務印書館北京廠印刷
(50014)

開本 850×1168—1/32　印張 10 11/16　字數 277,000
1955 年 2 月初版　印數 1—4,000　定價¥17,500

序

將複變函數論的方法廣泛應用於實用問題中的創始權是屬於莫斯科數學學派的，而且是與尼考拉伊·葉高洛維奇·儒考夫斯基 (Николай Егорович Жуковский) 的偉大的名字永遠聯系在一起的。

從那時候起，用這些方法，考勞索夫 (Г. В. Колосов)、夏普萊金 (С. А. Чаплыгин)、普里瓦洛夫 (И. И. Привалов)、高魯別夫 (В. В. Голубев)、穆斯海里什維奇 (Н. И. Мусхлишвич)、拉夫連切夫 (М. А. Лаврентьев)、克爾得什 (М. В. Келдыш) 及許多其他學者們得到了重要的結果。最近，函數論的方法經常成功地用在工業計算中。

本書預定供高等工業學校的學生及研究生與想提高自己的科學理論水平的工程師之用。

本書係以作者們給莫斯科榮膺列寧勳章莫洛托夫動力學院的學生及研究生，以及給全蘇函授動力學院進修班的學員所作講演的講義爲基礎而寫成的。給講義的材料補充了使非動力工程專業人員也感到興趣的一系列理論問題與解實用問題的例子。

本書的使命使它的文字帶有敍述性質。同時作者們認爲，如將一整系列的證明去掉，可將本書變爲一個手册。所以在其中給複變函數論的基本概念以極大的注意。當省略某一個定理的證明時，作者們就力求以例子說明它的假設與論斷的意義。

作者們認爲，將本書所說方法作具體應用的技能的發展也具有重大意義。所以在課文中包括了許多問題，而在各章之末並有習題。每題都有答案，而且有些題還有提示。作者們强調：獨立解這些題❶對於眞正掌握函數論的方法是十分必要的。

❶ 標誌有小星號具有隨意選擇性質的那些題除外。

研究這本書，需要讀者知道普通數學解析教程的基礎。必要的引證係來自別爾曼（А. Ф. Бермант）教授所著的"高等工業學校用數學解析教程"（第 I, II 卷，第三版，蘇聯國家技術理論書籍出版社1948年版）（有張理京同志等的中譯本，重工業出版社 1953 年出版——譯註）。引證時，將其簡寫爲"別爾曼I"與"別爾曼 II"（本書譯文以下引證該書譯本，而簡稱爲"別-張上"與"別-張下"——譯註）。

對於不能全面地研究本書的讀者，作者們特爲其製訂分部研究它的三個方案：

第一個方案（給出初等函數論導論）包括引論、第一章（無第九節）、第二章（無第 17 節）、第三章的第 24—25 與 29—31 節、第五章的第 46—53 節、第六章的第 58—61、64—67、69 節以及隨意從第四與七章中選些個別的例題。

第二個方案（適用於只對解析理論感興趣的人，例如，想將來研究運算微積的人）。這兒可以略掉第二章的第 18—23 節，由第三章中只取初等函數的定義（第 29—31 節的開始），由第四章中取第 34—37 節，在第五章中略去第 55—57 節，在第六章中略去第 70 節，第七章必須全面研究，第八章可以省略。

第三個方案（適用於只對共形寫象及其應用感興趣的人）。這兒可以略去第五章的第 54—57 節，第六章的第 66—68 節與第七章全章。

現在來談談我們的敍述法的一些特點❶。

本書引論中論述複數運算的概略。作者們未採取中學裏所採取的那種複數理論的敍述法，因爲這種敍述法使學生產生一種見解，認爲複數是虛的，不眞實存在的東西。本書將複數定義爲平面上的向量或點，在它們上施行某些運算。作者們知道這種定義複數的方法的不完備性，但他們認爲這最適合於本書的目的，因爲將複數看成具有某些確定性質的抽象代數域的元素而引入是需要讀者過度努力的。

❶ 這些話，首先是講給那些想把本書介紹給他們的學生的教師們的。

第一章敍述複變函數的解析的基本概念。爲了力圖使讀者獲得具體的概念，與函數概念同時，作者們還研究了與它對應的寫象。別的概念也緊跟着就用幾何方法來加以解釋。在敍述中，特別强調複變球面上有限點與無限遠點的同等性。

共形寫象的概念，因爲非常重要，特闢了一章（第二章）來講。這兒，在基本定義與定理之後，詳細地來研究分式線性寫象。熟悉這些寫象的性質應當對讀者讀本章最後一節有幫助，這一節講共形寫象論的一般原理。

第三章討論最重要的初等函數。作者們在這兒曾力圖用幾何方法說明分出多值函數的正則(單值)分支的過程。但只是就着具體的函數來說的，因爲多值解析函數及其正則（單值）分支的一般概念在第六章纔講。本章（及其後所選的習題）的另一個重要目的，是使讀者獲得挑選作已知域的共形寫象的初等函數的技能。

第四章講平面向量場的複勢以及複變函數論的最簡單的方法對這種場的應用。在第四章以前，實用性的問題幾乎沒有講。作者們認爲在討論它們之前先叫讀者具備一些理論知識是合宜的。此外，把複勢的初步知識聯合成爲一個整體可使讀者容易應用函數論的方法於技術問題。這一章以後，將應用問題平常放在數學方法的敍述之後作爲實例來考察。

在第五、六兩章中講正則函數論的基本工具——在第五章中建立積分學，而在第六章中討論級數展開。在第六章中引入解析函數的一般概念，它以討論原正則函數的所有可能的解析延拓爲基礎。

第七，八章中講理論的應用：第七章講解析應用，而第八章講幾何應用。第七章主要是利用留數理論。這兒考察了許多積分的一般計算法的例子。作者們認爲，應當引用一些引理，作爲計算各別類型的積分的根據(像在某些教程中所作的一樣)，而且建議，每次都要用一般方法。在第七章中也舉了幾個用環路積分表示函數的例子，它們應當使

讀者易於過渡到運算微積的研究。

在原稿的準備到付印的過程中，作者們曾接受莫斯科動力學院的同事列文(В. И. Левин)與羅蒙諾索夫 (В. Ю. Ломоносов) 教授及格洛思別爾格 (Ю. И. Гросберг) 講師的寶貴意見。本書的計劃與其一部分內容曾經莫斯科大學解析函數論習明納爾討論過；馬爾庫什維奇 (А. И. Маркушевич)教授及習明納爾的其他參加者曾提出一系列有益的建議。作者們謹藉此機會向以上所有提到的人們，致以眞誠的謝忱。

作者們特別向別爾曼教授表示謝意，他曾仔細地校讀原稿並提出意見，使本書很多地方的敍述方法得到修改。

目　錄

引　論

1. 複數　複數的概念，讀者早在初等代數學教程中就已經熟悉了。在初等教程中常考察方程 $x^2+1=0$ 時，平常就得到複數。最初，人們發現：沒有實數能滿足這個方程。於是導入新的、“虛的”數 $i=\sqrt{-1}$，因而所考察的方程變成可解的，而它的根等於 $+i$ 與 $-i$。

以後又導入“複”數 $x+iy$ 作爲實數 x 與“虛”數 iy 的和。這些新數的運算法則是：對它們施行運算與對實數一樣，只須在最後的結果中把 i^2 換成 -1 就行了。導入這些新數後，所有的二次方程 x^2+px+ $+q=0$，而且，一般說，所有具有任意係數的方程 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+$ $+\cdots+pn=0$ 就都變成可解的了。

上述導入複數的方法是不能令人滿意的，因爲它使人產生一種見解，以爲複數是現實不存在的，簡直是“虛”的東西。這種見解使得現在還有許多工程師懼怕複數，並且懷疑它們在實際計算中的應用。

所以我們要用另外的方法來對待複數。

玆討論某一個平面上的自由向量系。我們記得，有下列相等概念的向量，叫做自由向量；即如果用平移法能使兩個向量相互重合，就認爲它們是相等的。在下面幾節（第 2，3 與 4 節）中我們將要導入某些關於自由向量系中的向量運算。這些運算分爲兩羣。

第一羣運算包括加法、減法與乘上實數（數量）的乘法——這些運算的施行與平常的向量代數學中的一樣（見第 2 節）。反之，第二羣的

運算將這兒所考察的向量代數學與平常的向量代數學在本質上區別開來，平常的向量代數學中有兩種不同的乘法——數量乘法與向量乘法，但是它們都不完全滿足實數的乘法定律。例如這兩種運算都不是可逆的：既沒有數量除法也沒有向量除法。但是，讀者在以下各節中就要見到，對於平面向量系能導入乘法與除法（第 3 節）、乘冪與開方（第 4 節）等運算，它們保持着實數算術的所有基本定律。這些運算就組成了上面所說的第二羣。以上所說的這些使我們有理由把具有上述兩羣運算的平面向量系看成一種新數系，這種新數便叫做複數。

這樣，就將能夠按第 2, 3 與 4 節所說的規則施行運算的平面自由向量系理解爲複數集合。

所說的這種導入複數的方法就沒有本節開頭時所說的那些缺點了。在各種實用問題中要常常用到向量，這種情況也說明了複數的現實性。讀者（在第 9 節與第四章中以及本書別的地方）就要看見，這兒所導入的複數運算在這些問題中有其用處。

被考察的向量所在的平面叫複數平面。在這個平面上選取某一個點 O。因爲我們的向量是自由向量，所以能把所有向量的起點都移到這個點上。這時任意的一個向量（複數）z 都唯一地由它的終點 P 的位置所確定；反之，平面上任意一個點 P 也唯一地由某一個向量（複數）$z=\overline{OP}$ 所確定。這樣，就建立了複數與平面上點之間的完全對應關係❶。

這給了我們一個根據，使我們除了能將複數表示爲向量外，還可以將複數表示爲平面上點。今後我們說“點 z”的時候並不比說“向量 z”的時候少。

2. 最簡單的運算 定義 兩個複數 z_1 與 z_2 的和與差是在 z_1 與 z_2 上（即在向量上）所作的平行四邊形的對角線（圖 1）。

換句話說，和 z_1+z_2 等於由向量 z_1 與 z_2 所組成的兩節折線的封閉

❶ 同時點 O 本身對應於零向量（複數 0）。

線，而差 z_1-z_2 等於由點 z_2 到 z_1 的向量（參看圖 1）。和的概念顯然可以推廣到任意多個被加項的情形。

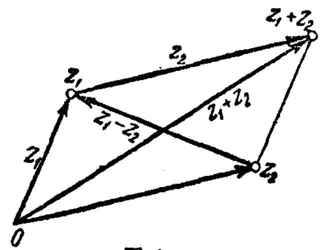

圖 1.

定義　複數 z 乘上實數 k 的積爲向量（複數）kz，它的長等於 z 的長乘上 $|k|$，果如 $k>0$，它的方向與 z 的方向相同；如果 $k<0$，則它的方向與 z 的方向相反（參觀圖 2，其中表出了數 $z, 2z, \frac{1}{2}z$ 與 $-z$）。

在任何一本向量代數學的教科書中都證明了：這兒所導入的運算具有平常的算術性質。

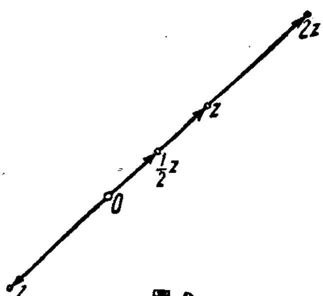

圖 2.

茲在複數平面上作一個坐標原點與 O 點（見第一節）相重的直角笛氏坐標系 xOy，並用 1 與 i 表示坐標軸 Ox 與 Oy 上的單位向量。那麼用我們的定義，並按照向量代數學的平常方法，就能將射影爲 x 與 y 的任意向量（複數）z 化爲形式[1]

$$z=x\cdot 1+y\cdot i=x+iy \tag{1}$$

（圖 3）。式（1）以後叫做複數 z 的笛氏形狀。單位向量 1 與 i 叫做實單位與虛[2]單位，而且與此相應地把軸 Ox 與 Oy 叫做實軸與虛軸。射影 x 與 y 叫做複數 z 的實部與虛部，並用記號

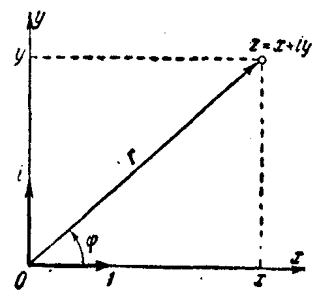

圖 3

---

[1] 像式(1)所表示的，Ox 軸的單位向量的記號省略了。

[2] 這兒以及以後“虛”字是按習慣來用的，它並沒有任何虛的與不存在的意思。

$$x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z \tag{2}$$

來表示。

如果（起點在 0）向量 z 的終點在實軸上，那麼我們就認爲，複數 $z=x+0i$ 與確定向量 z 的終點位置的實數 x 相同。這樣，複數的集合包含着所有實數。如果 z 的終點在虛軸上，那麼我們就把複數 $z=0+yi=yi$ 叫做虛數。

對應向量相等，就認爲複數相等(見第一節)。容易用坐標寫出相等的條件——當且只當

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2 \tag{3}$$

時，兩個複數 $z_1=x_1+iy_1$ 與 $z_2=x_2+iy_2$ 才相等。

這樣，複數間的一個等式就代爲實數間的兩個等式。

我們也用複數的共軛概念：如果

$$x_2=x_1, \quad y_2=-y_1, \tag{4}$$

則 $z_2=x_2+iy_2$ 叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 的共軛複數。

這時，我們寫 $z_2=\bar{z}_1$。與 z 關於 Ox 軸對稱的點爲 $\bar{z}$ 的表象。

進一步，複數的加法(減法)可以化爲它們的實部與實部，虛部與虛部的加法(減法)：如果 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 則

$$z=z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2). \tag{5}$$

當複數 $z=x+iy$ 乘上實數 k 的時候，z 的實部與虛部同乘上 k:

$$z_1=kz=kx+iky. \tag{6}$$

除用笛氏坐標將複數化爲形式 (1) 外，在許多情形，爲方便計也用它的極坐標表示法。使極軸與 Ox 軸重合並將極點放在 O 點。那麼，如用 r 與 φ 表示點 $z=x+iy$ 的極坐標(見圖 3)，則有

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \tag{7}$$

而公式(1)就取形式

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{8}$$

以後把式 (8) 叫做複數的三角形狀。量 r 與 φ 分別叫做 z 的模與

幅角，並用記號

$$r=|z|, \quad \varphi=\operatorname{Arg} z \tag{9}$$

來表示。

注意，雖然複數的笛氏坐標是被單值地確定的，但對於極坐標却有某一不定性。事實上，

$$r=|z|=+\sqrt{x^2+y^2} \tag{10}$$

是 x 與 y 的單值函數，但函數

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+2k\pi \tag{11}$$

是多值的，而且有無限多値，彼此相差 2π 的任意整倍數。此外，當 $z=0$ 時函數 $\operatorname{Arg} z$ 顯然是不確定的。

分出函數 $\operatorname{Arg} z$ 的一個單值分支常常是必要的。爲了這個目的，平常將這個函數的變化限制於區間 $(-\pi, \pi]$。所得到單值函數叫做幅角的主支（主要分支）並且用記號❶ $\arg z$ 來表示。這樣，對於幅角的主支，有

$$-\pi<\arg z \leqslant \pi. \tag{12}$$

注意，主支 $\arg z$ 在負半軸上不連續，因爲當 z 由上方趨近於負半軸的點時，$\arg z$ 趨近於 $+\pi$，而當 z 由下方趨近於該點時，却趨近於 $-\pi$。在平面上其餘的點（除 $z=0$ 外），這個函數是連續的❷。

如果利用讀者所周知的普通數學教程中的尤拉公式❸

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}, \tag{13}$$

表示式(8)可以寫成

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}. \tag{14}$$

式子(14)平常叫做複數的指數形狀。

指數形狀（或者三角形狀）的複數 $z_1=r_1 e^{i\varphi_1}$ 與 $z_2=r_2 e^{i\varphi_2}$ 相等的

❶ 有時不用這個記號，而預先特別說明，考察幅角的怎樣的分支。

❷ 關於這一點的更詳盡說明，請參閱第8節。

❸ 這個公式應當看成 e 的虛冪的定義，關於這一點的更詳盡說明，請參閱第9節。

條件容易用極坐標表示出來：

$$r_1=r_2, \quad \varphi_1=\varphi_2+2k\pi, \tag{15}$$

其中 k 是隨意的正負整數或零。複數共軛的條件可以用關係

$$|\bar{z}|=|z|, \arg\bar{z}=-\arg z \quad (\arg z\neq\pi) \tag{16}$$

來表示。

當作複數的加法與減法時，它們的極坐標並不像笛氏坐標那樣受着簡單規律性的限制。但是我們看出來，由圖 1 與三角形的初等性質，得到

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \quad |z_1-z_2|\geqslant\Big||z_1|-|z_2|\Big|, \tag{17}$$

如 $\arg z_1=\arg z_2$, 則上列不等式就都變成了等式。

茲用幾個例子來說明怎樣藉助於複數給出平面上點的幾何軌跡以結束這一節。

例 1. 容易寫出半徑爲 r, 而中心在平面上隨意點 a 的圓內，圓上，與圓外的點(而且只是這些點)所服從的關係：

$$|z-a|<r, \ |z-a|=r, \ |z-a|>r,$$

因此，可以認爲，這些關係就給出了所說的幾何軌跡。不等式

$$r\leqslant|z-a|<R$$

給出半徑各爲 r 與 R, 而中心在 a 點的圓環（環內包含着內圓周，而不包含外圓周)。

2. 方程

$$\arg z=\alpha$$

給出一根與實軸的交角爲 α 的射線，不等式

$$\alpha<\arg z<\beta$$

給出射線 $\arg z=\alpha$ 與 $\arg z=\beta$ 間所夾的無限扇形（射線本身不含在內)。

3. 方程

$$\mathrm{Re}\, z=\alpha, \quad \mathrm{Im}\, z=\beta$$