序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喩。

巴西華僑徐君銘信，身羈異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲。前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。駉經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋洂、李煥燊、南登岐、孫賡年（物理學總執筆人）、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鐘恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤概允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。玆値本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

---

* 該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄒篁序、湯元吉等九人。

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首冊中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專冊，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一冊，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之，其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜敎。

八•本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九•本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指敎，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第二十四册目錄

方程式論

方 程 式 論

本書中關於算術部門，幾乎每頁都有提及方程式的問題；但所討論者 415
大多限於一次與二次方程式。因此，現在我們也要提出問題來，**求解高次方程式**，即三次和四次以上的方程式。在有理整方程式中，我們亦稱其解法爲求**方程式的根**；換言之，由方程式求根的手續，謂之**解方程式**。

研讀下文時，讀者對于**有理整方程式**，**函數方程式**，以及**函數值**等定義的區別，應特別加以注意。參看第廿三册中之〔388〕節！

I. 求解有理整方程式之近似值

(a) 圖解法

例如：$x^3-3x+1=0$，這是有理整方程式的一種，它是叫我們尋出許多數來，倘以其中任何一數代替方程式左邊之 x，結果都要能使 x^3-3x+1 的和變爲零才行。因爲我們必須拿無限多的 x 值作爲試驗，才能斷定其是否具有此特性，故非借助于函數方程式：

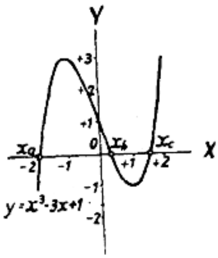
$$y=x^3-3x+1$$

以圖解法探索之不可。讀者依照第十七册中之〔169〕節所述，很容易證實這是一種連續函數，亦卽沒有“危險”性（意指不致爲零所除）的函數。我們試將 $y=x^3-3x+1$ 曲線上的若干點拿來計算一下：

x	-2	-1.9	-1.8	-1	0	$+0.3$	$+0.4$	$+1$	$+1.5$	$+1.6$	$+2$
y	-1	-0.159	$+0.568$	$+3$	$+1$	$+0.127$	-0.136	-1	-0.125	$+0.296$	$+3$

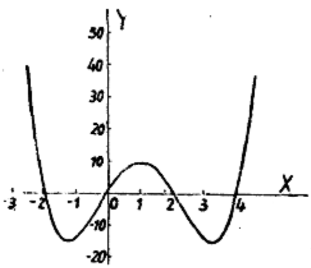
然後將各點連接起來，便會得到如〔415 a〕圖所示之曲線。因爲按照已知之**有理整方程式**，x^3-3x+1 之和應該等於零，故由**函數方程式** $y=x^3-3x+1$，卽可就曲線上所有 $y=0$ 之處（換言之，卽曲線與 X 軸相交之處）求得該有理整方程式之解。有

附註：屬於有理整方程式 $x^3-3x+1=0$ 的函數 $y=x^3-3x+1$ 叫做該方程式所屬之**誤差函數**，而這個函數的圖解就是屬於該有理整方程式之**誤差曲線**。此二名稱之意義不待言而自明。

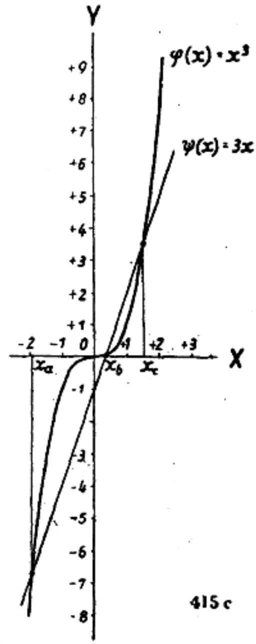


415 a

三個地點是如此，一在 x_a，據估計約在 -1.9 與 -1.8 之間；一在 x_b，約在 $+0.3$與 $+0.4$ 之間；一在x_c，約在 $+1.5$ 與$+1.6$ 之間。依此方式我們求得已知有理整方程式的三個實根，至少其值是近似的。就實際用途而言，只要把$x_a=-1.9$，$x_b=+0.35$ 及 $x_c=+1.5$ 這三個數字當作解答就行了。此外，這個方程式**只有**三個實根，亦不難從〔415 *a*〕圖中摸索而得。



415 b



415 c

習 題：

1) 試按同一方法求下式的實根
$$x^4-4x^3-4x^2+16x+1=0$$

在〔415 *b*〕圖中，我們係將相應的函數方程式表示於直角坐標系中；但對 X 軸的量度單位却選用了十倍於 Y 軸的量度單位。這是為了什麼？（由此可見，二坐標軸的分割是用不着採用相同的量度單位的。）

在許多情形下，如將此種圖解法略加修改則更爲有益；再以求解上述的三次方程式 x^3-3x+1 爲例：在相應的函數方程式 $y=x^3-3x+1$ 中，假如 $x^3=3x-1$，則其縱標 $y=x^3-(3x-1)=0$。我們如用曲線板與三角板將曲線 $\varphi(x)=x^3$ 及直線 $\psi(x)=3x-1$ 畫在同一坐標系之內，並進而求此二線相交各點之橫標，則結果所求得者仍然是上面那三個 x 值（即 $x_a=-1.9$，$x_b=+0.35$，$x_c=+1.5$）。

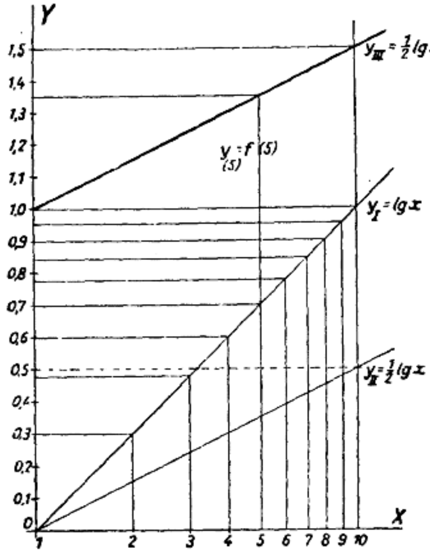
習　題：

2）試依照類似方法解有理整方程式 $\sin x-\frac{x}{2}=0$

利用坐標軸之合適分割簡化曲線之作圖法 416

玆設我們需要知道函數方程式 $y=0.5\cdot lg\,x+1$ 的許多值，並且要在所畫的一條曲線上把這些數值讀出來。也許各位會建議，將此曲線畫在二軸有相同分割的直角坐標系中；但各位果眞把這個建議付諸實施時，一定會證實這種作圖法如欲求其相當準確，實在是一件困難而耗費時間之事。各位有此經驗之後，可能改變主意，對於 Y 軸選用比 X 軸較大的度量單位，使到畫出來的曲線不像以前的平坦，而且因此能以較高的精度讀出 y 值的大小。

除此以外，還有一種更爲簡單的作圖方法，如〔416 *a*〕圖所示：Y 軸的分割是等距的；屬於縱標 1.0 的縱標線段，其長好比是 5 *cm*；屬於橫標單位的線段其長雖然也是 5 *cm*，但並不是以 1.0 却以 10（即以眞數 10，而其對數則等於 1.0）表示出來；其長爲 $0.301\cdot 5cm\approx 1.5cm$ 之橫標，係以 2（即以眞數 2，而其對數則等於 0.301）表示出來，如此類推。假如各位將〔416 *a*〕圖放大兩倍半，則 X 軸的分割便和對數計算尺上半部之分割完全相同。各位如就 X 軸的分割點 2 引繪縱標線段 0.301（乘軸單位），再就分割點 3 引繪縱標線段 0.477，餘類推；然後注意這些線段的上端時，即可看出這些端點都是位於一條直線上，而



116 a

此直線乃相當於方程式 $y=lg\,x$ 。所以我們用直線來表示函數 $y=lg\,x$ 者，乃由 X 軸的對數分劃所促成。

至此，我們對於函數 $y=0.5\cdot lg\,x$ 及 $y=0.5\cdot lg\,x+1$ 的圖解法，已可思過半矣。

一般文具店中常有這種（更爲精細的）分劃紙，即：

對 數 方 格 紙

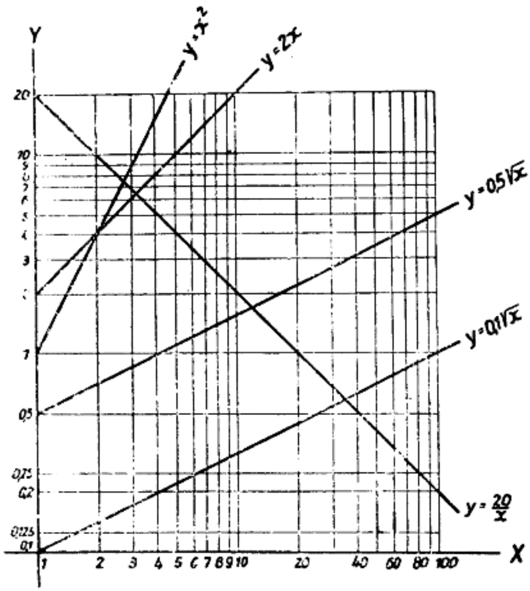
出售，各位從事繪圖工作時如果加以採用，當可得到不少便利。

習 題：

1） 試求函數 $y=1-lg\,x$ 的圖解？

在〔416 *b*〕圖中，我們對於 X 軸和 Y 軸的分劃都是以對數爲依據的。各位當能證實，我們利用這種輔助方法亦可將拋物線與雙曲線函數畫成直線。如用市面上出售之分劃更爲精細的雙倍

對數方格紙，還能繪製比較準確的圖形，而令人讀取更屬可靠的數值。各位如能設法延長 XY 二軸，而註上適當的對數分劃時，當能求出更多的函數，用同樣方法把它們表示出來。



416 b

習　題：

2) 試問在〔416 *b*〕圖中，Y 軸上的分劃點 0.5 與 1 的距離，又分劃點 2 與 1 的距離，為什麼彼此是相等的？

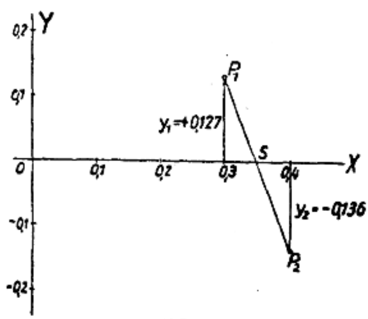
(*b*) 計 算 法 417

我們借助於上節所述之**圖解法**，只能在作圖所允許的精度範圍內求得有理整方程式之實根。假如我們對於作圖的比例尺不要加大或不能加大時，則依此方法最後求得之結果，其精準程度勢

必無法求其再高。因此，我們對於一種圖形所估計的最後結果，乃包括在彼此不能繼續接近的兩個極限之內：$x_1<x_a<x_2$；這是圖解法的缺點。但計算法則不然，它可使此二極限的接近**任意繼續下去**，是爲其優點。

a) **誤差規則**（拉丁文稱爲 *regula falsi*）

在上面〔415〕節所舉之例中，方程式 $x^3-3x+1=0$ 的根 x_b 係位於 $x_1=+0.3$ 與 $x_2=+0.4$ 之間（看〔415 a〕圖）。在〔417 a〕圖中，我們對曲線 $y=x^3-3x+1$，曾將其橫標 $x_1=0.3$，$x_2=0.4$，以及所屬（由計算求得的）縱標 $y_1=+0.127$ 和 $y_2=-0.136$ 儘可能非常準確地描繪出來。所求之根 x_b 應該位於**曲線**與 X 軸相交之處，亦即位於叫做 S_x 的一點（但此點目前仍屬未知數）。——至於**曲線**段 P_1P_2（其二端點之位置乃決定於已知坐標 $\{x_1, y_1\}$ 與 $\{x_2, y_2\}$），我們並不擬把它畫出來，毋寧以 $\overline{P_1P_2}$ **弦**來代替它（此弦與 X 軸相交於 S）。此交點也許不會與所求之交點 S_x 重合爲一（此 S_x 即**曲線**與 X 軸相交之點）。但 S 點的橫標將爲 x_b 的一個有用之近似值，假如縱標 y_1 與 y_2 比較非常接近，以致曲線段 P_1P_2 與弦長 $\overline{P_1P_2}$ 相差並不十分大的話。



417 a

因此，我們可以這樣來計算 S 點的橫標 x_S：

因爲直線 P_1P_2 係從 P_1 點（其坐標爲 $x_1=+0.3$，$y_1=+0.127$）及 P_2 點（其坐標爲 $x_2=+0.4$，$y_2=-0.136$）經過，故按照第十七册中之〔206〕節，其方程式爲：$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$

習　題：

1）試將一定坐標 $x_1=0.3$ 等等代入上式，而將該式化爲標準形式 $y=mx+b$，以便證實〔417 *a*〕圖是否至少接近於準確！

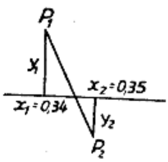
爲了要能計算交點 S 的橫標（其縱標 $y=0$）起見，上式的算出實無必要；各位只須將一般縱標 y 代以一定值 $y=0$，便可形成含有一個未知數 (x) 的方程式：$0-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$；按 $x=x_s$ 解之，卽得：

$$\boxed{x_s=x_1-y_1\cdot\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}}$$

習　題：

2）試按上式計算所求之 x_s！

3）試用求得之 x_s 值作驗算！——求得之值與原來所求之值 0 相差是如此之微，所以就實際計算而言，$x_s=+0.35$ 在大多數情形下，便是這一有理整方程式的有用之根。但我們還可以繼續使此根包括於更爲狹窄的極限之內。按照習題（3）計算的結果，屬於 $x=0.35$ 者是一條負的縱標。因曲線在此處是下降的，故所求之 x_b 值應位於 $x=0.35$ 的左邊；這是各位由不按比例尺所畫之〔417 *b*〕略圖上立卽可以看出來的。因此，我們可以假定 x_b 的位置乃介於 0.34 與 0.35 之間。



417 b

習　題：

4）試以 $x=0.34$ 作驗算！——驗算的結果（$x^3-3x+1=+0.019304$）告訴我們，準確的得數確實是在 0.34 與 0.35 之間。我們只要應用這兩個新值 x_1 及 x_2 從頭到尾實施誤差規則的計算步驟，還可以求得 $x_1=0.34$ 與 $x_2=0.35$ 中間的一個更接近於準確答

案的數值（x_S）。

習　題：

5)　試求此 x_S 值！

這種方法之所以叫做誤差規則，蓋由於爲了要求得眞值或比較接近的眞值起見，必須從近似值（亦卽含有誤差之值）出發計算的緣故。但各位運用這個規則時，不要忽略 y_1 及 y_2 二值（x 之近似值，須於此二值間求之）之前號一定要一正一負才行；各位只要一望〔417 a〕及〔417 b〕二圖，便可看出必須滿足這個條件的理由所在。

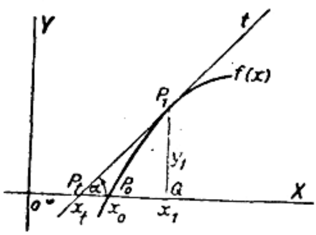
此外要注意的是，在研究範圍以內的誤差曲線一定是具有連續性的。

習　題：

6)　試按誤差規則計算 $\sqrt[3]{10}$，以算至小數點以下二位爲準！

418　3)　**牛頓近似規則**

在〔418 a〕圖中，曲線 $y=f(x)$ 與 X 軸相交於 $P_0(x_0;y_0=0)$；因此，橫標 x_0 就是方程式 $f(x)=0$ 的一個準確的根*)。



418 a

假設 x_1 是由實驗所求得的近似值。（在我們所畫的〔418 a〕圖中，特別選定 x_1 不與 x_0 十分接近者，爲的是要保持圖畫之一目了然）。有許多場合由於下面的作圖和計算，可使我們獲得較佳之近似值：就 P_1 點引切線 t 切於曲線 $y=f(x)$；此切線與 X 軸相交於 P_t 點；此點之橫標 x_t 就是我們所求的近似值：

---

*）爲使各位確實了解這句話起見，我們特擧一個實例將其內容重複一遍：曲線 $y=f(x)=\sqrt{x-2}$（請各位畫一略圖！）與 X 軸相交於 $P_0(x_0=+2;\ y_0=0)$；所以橫標 $x_0=+2$ 卽爲該方程式 $f(x)=\sqrt{x-2}=0$ 的一根。

根據三角形 P_1P_tQ 我們可以讀出：$tg\,\alpha=\dfrac{y_1}{x_1-x_t}$；因爲 $tg\,\alpha=f'(x_1)$（看第十五册中之〔72〕節），故得：$f'(x_1)=\dfrac{y_1}{x_1-x_t}$；

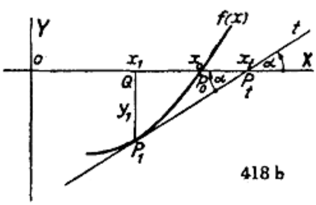
由於簡單的變形，便可寫成：

$$\boxed{x_t=x_1-\frac{y_1}{f'(x_1)}}$$

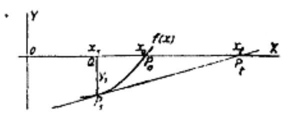
舉例：對三次方程式 $x^3-3x+1=0$ 而言，我們在〔415〕節中好比已求得近似值 $x_1=+1.5$，及其所屬的 $y_1=-0.125$。函數 $y=x^3-3x+1$ 的微分係數 $f'(x)$ 是 $3x^2-3$，其特殊值是 $f'(1.5)=3\cdot1.5^2-3=3.75$；我們將此值代入上面的公式：

$x_t=1.5-\dfrac{-0.125}{3.75}\approx1.53$，這是一個比較準確的數值。

對於 x_t 所求得的公式也適用於〔418 *b*〕圖所示的情形。在此 y_1 是負號，而 x_t 係位於 x_1 的右邊。我們讀出：$tg\,\alpha=\dfrac{-y_1}{x_t-x_1}=\dfrac{y_1}{x_1-x_t}=f'(x_1)$，由此式可以導引與前相同之公式。



418 b



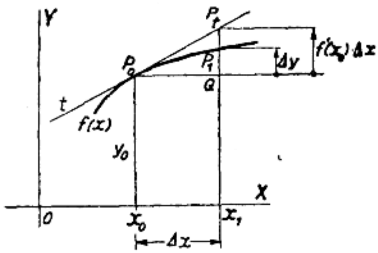
418 c

〔418 *c*〕圖顯示時常出現的一種特殊情形，在此情形下切線與 X 軸的交點距離精確值 x_0 要比距離最初假定的近似值 x_1 來得遠些。（如作一次驗算，即可在特別情形中獲得證明。）於此，利用牛頓的方法是不能求得較佳之近似值的，故須首先應用上述的誤差規則，始克有濟。

習　題：

求得 $x_1=+0.3$ 之後，試按照牛頓方法對於方程式 $x^3-3x+1=0$ 求一較佳之近似值！

γ)　$\Delta\mathbf{y}\approx\mathbf{f}'(\mathbf{x}_1)\cdot\Delta\mathbf{x}$



419 a

茲設〔419 *a*〕圖中之 $f(x)$ 爲一在此處上升之函數曲線；又設就 P_0 點繪有一條切線 t 。如令函數 $y=f(x)$ 的橫標加大 Δx 一小段，則函數本身（即縱標之值）也會增加 $\Delta y=P_1Q$ 一小段。假若增量 Δx 比較不大，則增量 Δy 與線段 P_tQ 相差亦微。因此，

$$\frac{P_tQ}{P_0Q}=\frac{P_tQ}{\Delta x}=f'(x_0)\text{，亦即 } P_tQ=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

結果：

$$\boxed{\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x}$$

II. 求解有理整方程式之計算法

420 ## (*a*) 有關虛數的幾點說明

直到目前爲止，我們在本册中只討論了有理整方程式的實數解法，而還沒有談到虛數和複數的解法。現在就拿這兩種解法作爲我們的目標來研究：首先講虛數與複數的特性，然後說明此二數的圖解及計算方法。

好比由二次方程式 $x^2=(-4)$ 出發，我們立即就可看出虛數問題的要點，及其解法之困難與不困難情形：此式包含二次冪 x^2 及其所屬算出之值 (-4)。因此，依照第四册〔349〕節所講有關乘冪的說明，我們應構成一種乘法，其形式如下：

$$x\cdot x\cdot(+1)=(-4)$$

由此可見，在“原始數 1”之前有兩個因數 x，這兩個因數按照我們對於字母數的解釋應該假定它們是**一致的**，即其前號亦復如此

；結果 $(+2)\cdot(-2)=(-4)$ 的"解法"在此是講不通的。但因 $(+2)\cdot(+2)\cdot(+1)$ 或 $(-2)\cdot(-2)\cdot(+1)$ 的乘積都是等於 $(+4)$，故已知有理整方程式之解既非 $x=(+2)$，也不是 $x=(-2)$。現在我們要問：除了 $+2$ 及 -2 之外，還有那一個數的二次乘方乃與算出之值 (-4) 相等？

有各種不同的方法*)，可拿來解答這個困難問題。一種普通樂於採用而極其重要的方法（卽從幾何〔或稱圖解〕方面去着手的解決之道），將於下面〔422〕節中詳加論述。但我們事先擬用純粹的算術方式，來對虛數之特性作一分析；質言之，卽應用一種淺顯的方法，來克服上述的各種困難。

我們再重複說一遍，方程式 $x^2=(-4)$ 左邊之 x^2 是一種指示乘冪的記號；所以其右邊之 (-4) 應將其當作一種已經算出的乘方記號看待。但因剛才已經說過，按照以前對於乘冪所下的定義，我們決不能由 x 的自乘來得 (-4)，故下面的問題不待言而自明：

我們對於自乘的定義，可否如此加以修改，
使到虛數也可當作自乘的特殊情形看待？

---

*）有許多數學家以爲只要寫成 $(x=\sqrt{-4})$，不必把它算出來就可以了；他們把 $\sqrt{-4}$ 這一類數目稱爲虛數，並使之與實數立于相對地位。但我們卽使將其中一部份算出，如 $\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{(-1)}=\pm2\cdot\sqrt{(-1)}$，然而困難並未解決，因爲 $\sqrt{(-1)}$ 是無法算出來的。參看第六册中之〔585〕節！此外，例如以縮寫符號"i"來代替 $\sqrt{(-1)}$，雖不失爲一種好辦法；但對於問題本身的解答仍舊是毫無帮助的，因爲 $\sqrt{(-1)}$，與 i 只不過是一種符號，並不能用以說明一種事實眞相。又如寫成 $i^2=-1$，看去好像對於 i 下了定義似的，其實還是解決不了問題的，因爲它本身就是一個不能解決的問題：$x^2=(-1)$。

這些數學家所作"用虛數符號（如 $\sqrt{-1}$ 等）計算一如用實數符號計算，同樣可以求得正確結果"的此一暗示——以後可以證實的確是如此——雖極有助於實際的計算者，但對於有意深入研究虛數眞諦的讀者，仍舊是不能使其感到滿意的。

可是這種新的定義一定要能把我們所學過的一切自乘之特殊情形〔例如 $(+2)^2=(+4)$ 及 $(-2)^2=(+4)$ 全都包括在內才行〕。

我們首先把**學過的**東西拿來溫習與整理一下：

α) 我們在第一册中之第〔10〕節求得算術上關於正數和負數**互相對立***) 的這一概念之後，曾在第二册中〔113〕節提出這麼一個問題，即如何才能以**乘法**好比使 $(+3)$ 變爲 (-3)，當時的答復是：如在乘積之前裝上一個 RW（卽方向變換之符號），便可由 $1\times(+3)$ 求得 (-3)；又如在乘積之前裝上一個 RW，亦可由 $1\times(-3)$ 求得 $(+3)$。此外我們知道，異號二數相乘，其積是一負數，例如 $(-1)\times(+3)=(-3)$；同號二數相乘，其積是一正數，例如 $(-1)\times(-3)=(+3)$。

β) 我們要將熟習的四次冪 $(-2)^4$ 分成四個自乘步驟來講：這種自乘的出發位置和其他任何一種自乘一樣，都是 $(+1)$；在此"原始數 1"之前，我們放上四個乘數，故它要做四次相乘才行。假如在底數"2"之前暫不顧及其負號，則由一次至四次相乘形成之部分乘積，便可列如下表：

	一次相乘	二次相乘	三次相乘	四次相乘
部份乘積	2^1 $=2\cdot1=2$	2^2 $=2\cdot2=4$	2^3 $=2\cdot4=8$	2^4 $=2\cdot8=16$

但在有所指的自乘 $(-2)^4$ 中，底數 2 前面的負號則要求四次相乘中每一次自乘時都得要裝上一個 RW，因此又可得下列各部份乘積：

*) "**互相對立**"或"**方向變換**"$(=RW)$ 這個概念絕對不是一個幾何上的概念，雖然我們曾用幾何圖形以說明其意義（參看第二册中之〔113 *b*〕及〔113 *c*〕二圖）。這種情形可從下面的事實來判斷，即對於正負二數之對立，我們亦曾根據非幾何的例題用圖來表示過。

出發位置	1.	2.	3.	4. 有正負號之部分乘積
$(+1)$	$(-2)\cdot(+1)$ $=(-2)$	$(-2)\cdot(-2)$ $=(+4)$	$(-2)\cdot(+4)$ $=(-8)$	$(-2)\cdot(-8)$ $=(+16)$
	第1方向變換	第2方向變換	第3方向變換	第4方向變換

人們依此方式由“原始數 1”$(+1)$ 經過四次相乘而進到 $(+16)$ 時，一定得在**每次相乘時裝上一個** RW；換言之，即：

(4) 次方向變換之數 w 與 (4) 次相乘之數 m 之比，等於 $1:1$ 。

各位如將上表中第一列與最末一列作一比較，立即就可看出這種情形。

我們對於相同的（亦即不變的！）特徵亦可描寫如下：

由方向變換數 w 與相乘數 m 組成之商，自乘時如為負底數，總是一個常數，而且等於$1:1$。

習　題：

試問這種比例數 $w:m$ 在冪底為正數時究有多大？

總括言之：在所有我們學過的自乘中，w 與 m 之比恆為一常數；簡書則為：

$$w:m=c$$

直到目前為止，我們已經認識了此一普遍特徵的兩種特殊情形：

(1)　$w:m=0:m=0$，冪底為正數時的自乘

(2)　$w:m=1:1$，　冪底為負數時的自乘

請各位注意，我們在這一節中只不過把已經學過的東西拿來複習了一遍，以及把以前沒有講得十分明白的自乘特徵解釋得格外清楚些，使能符合目前之需要而已；其實這個特徵早已包含在以前述及的定義之內了。

以上是溫故，現在才算求新！我們還是將 $w:m=c$ 保留為