222

高等工科院校数学改革系列教材

线 性 代 数

（第 二 版）

刘长安　邢铁骅　主编

中国标准出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘长安主编. —2版. —北京:中国标准出版社,2002.9
高等工科院校数学改革系列教材
ISBN 7-5066-2874-0

Ⅰ.线… Ⅱ.刘… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第055072号

中国标准出版社出版
北京复兴门外三里河北街16号
邮政编码:100045
电　话:68522112
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32　印张 8 1/8　字数 175 千字
1997年1月第一版　2002年8月第二版第四次印刷

印数 15 501—18 500　定价 13.60 元
网址 www.bzcbs.com

编 者 的 话

《高等工科院校数学改革系列教材》，是北京信息工程学院等十几所首都高等学校，在国家教委工科处、北京市教委高教处、国家教委工科数学课委会的关怀和支持下，共同立项后决定编写的（见国家教委教高司[1996]96号文件、北京1996年普通高等学校第一批教改立项）。它总结了北京部分高等学校多年来教改的经验，汇集了教师们献身教育的智慧和心血，各科的内容覆盖了数学课委会制定的各项基本要求。

1996年，国家教委公布了面向21世纪高等工程教育教学内容和课程体系的改革计划。根据这个计划，我们制定了这套系列教材的编写指导思想和改革的目标，积极稳妥地进行高等数学与工程数学教学内容和课程体系改革的理论研究与实践。我们将计算机引进课堂，实行计算机辅助教学（即CAI），改变传统的教学模式，开设数学实验课；加强数学应用于工程实践的教学环节，减少繁琐推导和过份强调技巧的部分，增加数值计算、数学建模及数学发展史的历史背景资料；吸取了国外许多新教材的优点，注意保持新教材体系的科学性与系统性。

社会的日益数学化与计算机网络化，为数学课程的革新提供了广阔的空间和研究方向。我们这套系列教材的最大特点是实现了课堂教学与数学实验课的有机结

合，这有利于提高大学生的数学素质，培养他们的工程实践能力、进行科学研究的能力以及解决实际问题的能力，使我们培养的人才适应21世纪信息社会的需要。根据教委的改革计划，我们下一阶段教材的改革目标是在课程体系与结构方面做较大的变动，并编出电子、音像教材。

最后，我们特别感谢〈北京数学会〉和〈北京高等学校数学教学研究会〉对我们的指导和帮助，感谢中国标准出版社对教学改革的积极支持，才使这套教材如期面世。科教兴国、任重道远，让我们为提高教学质量共同努力！

参加编写的学校有：

北京信息工程学院； 北方工业大学；

北京轻工业学院； 北京首钢工学院；

北京电子科技学院； 北京印刷学院；

北京石油化工学院； 北京联大电子自动化工程学院；

北京联大机械工程学院； 北京联大化学工程学院；

北京联大纺织工程学院。

序

线性代数是高等工科院校的一门重要的基础课程，学生学好这门课对以后的各门课的学习将起着重要作用。但是，由于代数的抽象概念较多且在通用的教材中这些抽象概念出现较早，加上中学课程与大学课程的衔接问题，使学生在学习这门课程时经常发生一些困难，如何能使学生顺利地学好线性代数的核心内容，是数学教学改革的一个重要课题。本书编者们根据各自的教学经验并发挥集体智慧，在刘长安教授主持下编写了这本有一定特色的线性代数教材：全书以矩阵作为主要工具，一开始就引入矩阵的概念，并以矩阵方法作为主要线索联系全部内容，这样就可以使一些问题处理起来比较简单明了，便于学生掌握。本书注意与中学内容的衔接，并且只介绍具体的 n 维向量空间 $\boldsymbol{F}^n$，学生熟悉了这个具体的空间，可以较容易地进入一般 n 维向量空间中去。在理论联系实际问题方面，本书也作出一些努力，在各章中尽量配置一些应用的问题作为例题，尽可能与相邻学科加强联系，解决实际问题。可以认为：本书是一本较好的线性代数教材，它的出版将对数学的教学改革起到良好作用。

吴品三

1996 年 6 月

北京普通高校教育教学改革试点立项成果

高等工科院校数学改革系列教材

编　委　会

前　　言

线性代数是高等工科院校一门重要基础课，为了使学生学好线性代数，面向21世纪，编写一本好的线性代数教材是十分必要的。本着这个原则，按照国家教委印发的高等学校工科本科线性代数课程的基本要求，我们协作组中几所院校共同编写了这本线性代数教材。

全书分为六章，各章又以矩阵为主线联成一体，第一章至第四章引入矩阵和行列式，用矩阵的行初等变换阐述线性方程组和向量空间的理论。第五章和第六章引入矩阵特征值和特征向量，用矩阵相似、合同、正交变换阐述矩阵对角化和二次型等理论。本书最后编入两个附录：线性代数CAI软件简介和习题答案与提示，供教学时参考。

在编写本书时，主要参考《线性代数》（刘长安编著．北京：科学出版社，1992．国家教委第三届高等学校优秀教材初评入选）。本书保留了该书的特点，根据我们多年的教学经验，本着教材不断革新、不断前进，在本书中，我们注意加强线性代数在实际中的应用，各章中尽可能增加一些应用例题。我们特别尝试把计算机辅助教学引入线性代数课内，以期促使教学质量进一步提高；也希望这种尝试能够得到同行的评价与指正。在本书编写过程中，我们也参考了其它许多高等代数和线性代数有关书籍，我们就不一一列举了。

本书第一、二章由麦苗（北京信息工程学院）编写，第三章由孙激流（首钢工学院）编写，第四章由吴昌悫（北京信息工程学院）编写，第五章由邢铁骕（北京石油化工学院）编写，第六章由翁莉娟（北京轻工业学院）编写，附录（一）由吴昌悫、孙激流编写。

本书请吴品三教授审阅并作序，吴先生对本书提出许多宝贵意见，我们表示衷心的感谢。由于我们学识水平有限，错误与不当之处在所难免，诚恳希望广大教师和读者批评指正。

编　者

1996年6月

第二版前言

本书自1997年1月出版以来，先后在参编院校及其它院校共经过8轮教学实践。由于本书具有以矩阵为主线、注重实际应用、把计算机辅助教学引入线性代数课程内等特点，受到广大使用者充分肯定。为使本书在全国推进素质教育方面更好地发挥作用，在多年教学实践的基础上，我们几所院校的编者多次进行了深入研讨，于1998年5月及2000年5月作了两次修改，并在此基础上，于2002年6月对本书第一版进行了修订。

本次修订在保持原书风格的前提下，主要在以下几方面作了修改：

(1) 将原书有的内容作了适当调整，如第六章有的实际应用内容改为小字体，作为选学内容，解决了有的学校第一学期开设线性代数课程时由于学生高等数学基础不够而造成的困难；

(2) 在§3.4后面提出分块矩阵的初等变换的概念，并用来简化分块矩阵求逆运算；

(3) 改变§4.3中例3与例4求解形式，把原来用行向量组改为用列向量组；

(4) 在§6.2后增加了用配方法化二次型为标准形的两个例题；

(5) 将书中某些不妥及个别错误之处作了认真的纠正，并把每个习题的解答和提示作了仔细的验证；

(6) 在附录(一)中，将线性代数CAI软件"二"简介及使用说明，更换为最新版的《线性代数求解系统》的简介及使用说明。该软件是原国家教委高等工科教学课委会1996年立项项目，并通过专家组鉴定，它可完成线性代数各种数值运算，多年来配合教学，起到良好作用。

真诚感谢对本书提出修改意见的各位专家、学者，并欢迎使用本书的广大师生继续对本书提出宝贵意见，使其更加完善。感谢中国标准出版社的大力支持，才使第二版教材及时投入使用。

编　者

2002年6月

目　　录

第一章　线性方程组

线性方程组是线性代数的最基本内容，在数学各个分支及其它许多领域被广泛应用着．这部分内容是在我们熟悉的二元一次线性方程组和三元一次线性方程组的基础上，引入矩阵的概念，并以此作为工具，对 $m\times n$ 线性方程组作如下探讨：

(1) 一个线性方程组在什么情况下有解、什么情况下无解？

(2) 一个线性方程组在有解情况下什么时候有唯一解？什么情况下有无穷多解？

(3) 求出线性方程组的全部解.

§1.1　线性方程组与矩阵

现在我们来讨论一般线性方程组. 所谓一般线性方程组是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

的方程组. 其中 m 是方程的个数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表 n 个未知量，$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为常数项，m 和 n 不一定相等. 称形如(1.1.1)的线性方程组为 $m\times n$ 线性方程组.

1.1.1 定义 如果方程组(1.1.1)中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 n 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代替后，每个方程都成为恒等式，那么有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为线性方程组(1.1.1)的一个解.

线性方程组(1.1.1)的全部解的集合，称为这个方程组的通解.

两个未知量个数相同的线性方程组如果它们的通解相同，则称它们是等价线性方程组.

不是所有的线性方程组都有解. 如线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

x_1, x_2 取任何值都不满足上述方程组. 所以此线性方程组无解，称它为矛盾方程组.

为了便于线性方程组的讨论，我们引入矩阵的概念.

1.1.2 定义 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1.2)$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，其中横的各排称为矩阵的行，纵的各排称为矩阵的列，a_{ij} 称为这个矩阵的第 i 行第 j 列元素. 通常用大写字母 $A, B, \cdots$ 表示矩阵. 这样(1.1.2)式可简记为

$$A$$

也可简记为

$$A=(a_{ij}) \text{ 或 } A=(a_{ij})_{m \times n}.$$

当 $m=n$ 时，A 称为 n 阶矩阵，或 n 阶方阵.

1.1.3 定义 $m\times n$ 线性方程组(1.1.1)中未知量的系数 a_{ij} 按原有位置排成的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为这个线性方程组的系数矩阵. 如果把常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 按它们在方程组(1.1.1)中的位置填写在(1.1.3)式中最后一列的右边,得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

称为这个线性方程组的增广矩阵.

这样由定义 1.1.3 就完全确定了线性方程组和增广矩阵之间的对应关系,即一个线性方程组可确定一个增广矩阵,一个增广矩阵也完全确定一个线性方程组.

例如,若矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

是线性方程组的增广矩阵,则由此增广矩阵所确定的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad = 3 \end{cases}$$

反之,对给定的线性方程组,也有唯一的增广矩阵与之对应. 因此,就可以用增广矩阵来代表线性方程组.

习 题（一）

1. 证明线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

与线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad\;\; - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

是等价的.

2. 证明线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

与线性方程组

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

不是等价的.

§1.2 矩阵的行初等变换

为了引进矩阵的行初等变换这一概念，先来回顾中学代数中，用消元法求解 3×3 线性方程组的方法.

例 解 3×3 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

解 将方程组中第一个方程分别乘以 −1 和 −2 后分别加到第二、第三个方程，得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ \qquad 3x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

再将方程组中第二个方程乘以$-\frac{3}{2}$加到第三个方程，方程组变为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ \qquad\qquad -x_3 = -3 \end{cases}$$

象这样的方程组称为阶梯形方程组.如果继续用消元法将上述方程组变形，就得到方程组最简单的形式：

$$\begin{cases} x_1 \qquad = -\frac{3}{2} \\ \quad x_2 \quad = 5 \\ \qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

这样，就得到方程组的解$(-\frac{3}{2},5,3)$.

从上面求解线性方程组的过程看出，用消元法求解线性方程组的过程，实际上是反复地对方程组进行三种基本变换：

1. 交换两个方程；
2. 用一个非零的常数乘一个方程；
3. 将一个方程的 k 倍加到另一个方程上去.

于是，我们引入

1.2.1 定义 变换 1,2,3 称为线性方程组的初等变换.

并得到

1.2.2 定理 初等变换将线性方程组变为一个与它等价线性方程组.

证明 设 $m\times n$ 线性方程组