JIHE LUN DAOYIN

JIHELUNDAOYIN

JIHELUNDAOYIN

JIHELUNDAOYIN

集合论导引

耿素云 屈婉玲编

北京大学出版社

集合论导引

耿素云 屈婉玲 编

北京大学出版社

内 容 提 要

本书共分七章，前六章讨论朴素集合论体系，介绍集合的运算、二元关系、函数、自然数、基数和序数等．第七章简要地介绍公理集合论．书中有较多的例题并附有大量的习题．

本书前三章及第四、五章的部分内容可作为计算机专业本科生集合论课程的教材，其余部分可作为本科生高年级或研究生选修课的教材．本书也可以作为其他专业的学生、教师或科技人员的参考书和自学读物．

集 合 论 导 引

耿素云　屈婉玲　编

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　7.25印张　200千字

1990年2月第一版　　1990年2月第一次印刷

印数：0001—6,000册

ISBN 7-301-00334-X/O·059

定价：3.10元

前　言

十九世纪，卓越的德国数学家康托（Cantor）创立了一个崭新的数学分支——集合论．随后，许多数学家、哲学家从事集合论的研究工作，并取得了令人振奋的成就，逐步形成了朴素集合论体系．策墨罗（Zermelo）和弗朗克尔（Fraenkel）通过对康托朴素集合论的研究，提出了 ZF 公理系统，把集合论建立在一系列公理系统上，使朴素集合论发展成为公理集合论．它克服了康托朴素集合论引起的一些矛盾，推动了集合论的发展．直到今天，仍有许多数学家在从事关于集合论公理系统的研究工作．

集合论的飞速发展与它在现代科学中的作用是密切相关的，它不仅已成为现代数学的重要的理论基础，而且作为离散结构的一个有力的描述工具被广泛地应用到计算机科学、运筹学、信息科学及系统科学等各个现代科学领域中．目前，集合论已作为离散数学的重要内容被列入计算机系学生的必修课程之一．

当前关于集合论的书籍国内尚不多见，适于教学和科技工作者自学的教学参考书更少，为此，我们以北京大学计算机系的集合论讲义为基础，经过几年的教学实践，进行修改并作了一些补充写成了这本集合论引论，我们希望对需要集合论知识的学生、科技工作者和自学青年能有所帮助．

本书的绝大部分（前六章）讲述朴素集合论，包含了集合

论最基本的内容．它不需要高深的数学基础，而是从最基本的概念出发，由浅人深地引入了集合论的一系列的理论，并附有大量的例题和习题，适于教学或自学参考．在注重基本内容的基础上，我们对基数和序数理论作了较深入的介绍，对于想进一步学习、研究集合论的读者提供了必要的理论基础．考虑到集合论的发展和当前对集合论研究的趋势，我们在最后一章简要地介绍了公理集合论，使读者对公理集合论有一个大概的了解，为进一步学习现代集合论做一些准备．

本书的前三章及第四、第五章的部分内容可作为计算机专业学生集合论课程的教材，其余部分可选讲或阅读参考．本书也可供其他专业学生、教师和科技人员学习参考．

本书经耿素云与屈婉玲讨论，由耿素云执笔，屈婉玲选配了全部习题．由于我们学识浅薄，缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改正．

编　者

1985年2月于北京大学

目　录

预 备 知 识

在这一章，我们首先列表说明本书使用的一些符号，然后简单介绍一点数理逻辑的基础知识。

符 号 说 明

$\subseteq$：$A \subseteq B$，A 是 B 的子集

$\subset$：$A \subset B$，A 是 B 的真子集

$\varnothing$：空集

E：全集

$\cup$：$A \cup B$，A 和 B 的并集

$\bigcup$：$\bigcup \mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 的广义并集

$\cap$：$A \cap B$，A 和 B 的交集

$\bigcap$：$\bigcap \mathscr{A}$（$\mathscr{A} \neq \varnothing$），$\mathscr{A}$ 的广义交集

$\sim$：$\sim A$，A 的绝对补集

$-$：$A-B$，B 对 A 的相对补集

$\oplus$：$A \oplus B$，A 和 B 的对称差集

$P(A)$：A 的幂集

I：整数集合

I_+：正整数集合

ω：自然数集合（包含 0）

R：实数集合

$\langle x, y\rangle$：有序对

$A \times B$：A和B的卡氏积

$\mathrm{dom}\, R$：R的定义域

$\mathrm{ran}\, R$：R的值域

$\mathrm{fld}\, R$：R的域

$F \upharpoonright A$：F在A上的限制

$F[A]$：A在F下的象

$F \circ G$：F与G的合成

$\mathrm{r}(R)$：R的自反闭包

$\mathrm{s}(R)$：R的对称闭包

$\mathrm{t}(R)$：R的传递闭包

$[x]_R$：x关于R的等价类

A/R：R的商集

R_π：π诱导的等价关系

$\preccurlyeq$：偏序符号

$\prec$：拟序符号

$\preccurlyeq_A$：$\preccurlyeq$是A上的偏序

$\preccurlyeq\cdot$：$A \preccurlyeq\cdot B$，B优势于A

$\prec\cdot$：$A \prec\cdot B$，B绝对优势于A

$\approx$：$A \approx B$，A与B等势

$\cong$：$\langle A, \preccurlyeq_A\rangle \cong \langle B, \preccurlyeq_B\rangle$，$\langle A, \preccurlyeq_A\rangle$与$\langle B, \preccurlyeq_B\rangle$同构

$f: A \to B$：f是A到B的函数

${}^A B$：A到B的全体函数的集合

$\lfloor x\rfloor$：不大于x的最大整数

$\lceil x\rceil$：不小于x的最小整数

χ_A：A的特征函数

I_A: A 上的恒等函数

A^+: $A^+ = A \cup \{A\}$

card A: A 的基数

$\aleph_0$: 可数集的基数(读作阿列夫零)

$\aleph$: 连续统的基数(读作阿列夫)

数理逻辑基础知识

为了书写方便，本书将使用以下几种逻辑符号:

一、五种真值联结词

设 P, Q 为二命题,它们的合取、析取、蕴涵和等价以及命题 P 的否定记法如下:

$P \wedge Q$ (P 且 Q);

$P \vee Q$ (P 或 Q);

$P \rightarrow Q$ (如果 P,则 Q);

$P \leftrightarrow Q$ (P 当且仅当 Q);

$\neg Q$ (非 Q).

以上诸符号中要特别注意 $P \rightarrow Q$，它的含义为“非 P 或 Q”,即当 P 为假或 Q 为真时,$P \rightarrow Q$ 为真,只有当 P 为真且 Q 为假时，$P \rightarrow Q$ 为假. 而 $P \leftrightarrow Q$ 等价于 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$. 为明确起见,我们给出 $P \rightarrow Q$ 和 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表如下:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \longleftrightarrow Q$
f	f	t	t
f	t	t	f
t	f	f	f
t	t	t	t

表中 t 表示真，f 表示假.

当 $P \to Q$ 为恒真时(不出现 P 真 Q 假的情况)，称 $P \to Q$ 为重言式，记为 $P \Rightarrow Q$. 当 $P \leftrightarrow Q$ 为恒真时 (P，Q 同时为真或同时为假)，称 $P \leftrightarrow Q$ 为重言式，记为 $P \Leftrightarrow Q$.

二、全称量词和存在量词

"对于每个 x"的全称量词记为 $(\forall x)$. "存在某个 x"的存在量词记为$(\exists x)$. "恰有一个 x"的唯一存在量词记为$(\exists ! x)$. 于是 $(\forall x) P$，$(\exists x) P$，$(\exists ! x) P$ 的逻辑含义分别为：对每个 x 命题 P 为真，存在某个 x 使命题 P 为真，恰有一个 x 使命题 P 为真. 为了弄清这些符号的意义，我们列举下面几例.

例 1 对任意 x 存在一个 y，使得 $x < y$. 可用逻辑符号表示为:

$$(\forall x)(\exists y)(x < y).$$

例 2 对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 y，若 $|x - y| < \delta$，则 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 可用逻辑符号表示为:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall y)(|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

例 3 对于任意的 x，恰存在一个 y，使得 $x + y = 0$. 可用逻辑符号表示为:

$$(\forall x)(\exists ! y)(x + y = 0).$$

一个给定的逻辑符号可能对应几种不同的读法. 如$(\forall x)$可以读作"对所有的 x"或"对每个 x"或"对任意的 x"等.

联结词的相对优先次序可用括号来区别，但若预先规定好它们的优先级将大大减少括号的数量. 我们约定 $\neg$ 优先于 $\wedge$，$\vee$；$\wedge$，$\vee$ 优先于 $\to$，$\leftrightarrow$；并规定所用的括号全部为圆括号. 例如，$(x < y \wedge y < z) \to x < z$ 可以写成 $x < y \wedge y < z \to$

$x < x$.

对量词还需要说明的是作用域、约束变元和自由变元的概念. 量词的作用域是量词本身及跟在其后的最小公式，最小公式由括号指明. 在公式$(\exists x)(x < y) \vee y = 0$中，量词"$\exists x$"的作用域为"$(\exists x)(x < y)$".

一个公式中，变元的出现是约束的当且仅当它出现在使用该变元的作用域中. 一个公式中的变元的出现，若不是约束的出现,它就是自由的出现. 前者称为约束变元,后者称为自由变元. 例如,在公式$(\forall x)(\exists y)(x < y)$中，$x$ 和 y 都是约束的出现，是约束变元；而在公式 $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ 中,x,y, z 都是自由的出现,是自由变元.

本书在所给出的定义中，尽量用以上所介绍的逻辑符号和量词. 在定理和例题的论证中,有的采用逻辑符号书写,有的采用非形式化的语言书写，也有的是二者兼而有之.

我们即将介绍的集合运算规律是以命题演算中的某些恒真命题为基础的，为此我们在这里先介绍一些有关的恒真命题,也称为公式或定律. 设 P,Q,R 为命题,T 为恒真命题,F 为恒假命题.

1° 幂等律

$$P \vee P \Leftrightarrow P, \quad P \wedge P \Leftrightarrow P;$$

2° 结合律

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R),$$
$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R);$$

3° 交换律

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P,$$
$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P;$$

4° 分配律

$$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R),$$

$$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R);$$

5° 同一律

$$P\vee F\Leftrightarrow P,\quad P\wedge T\Leftrightarrow P;$$

6° $P\vee T\Leftrightarrow T$， $P\wedge F\Leftrightarrow F$；

7° 排中律 $P\vee \neg P\Leftrightarrow T$；

8° 矛盾律 $P\wedge \neg P\Leftrightarrow F$；

9° 吸收律

$$P\vee(P\wedge R)\Leftrightarrow P,\quad P\wedge(P\vee R)\Leftrightarrow P;$$

10° 德·摩根律

$$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q,\quad \neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q;$$

11° 余补律

$$\neg F\Leftrightarrow T,\quad \neg T\Leftrightarrow F;$$

12° 双重否定律 $\neg\neg P\Leftrightarrow P$.

以上介绍的12个命题逻辑公式在集合代数中起着很大的作用。

第一章 基本概念

§1 集合的概念及表示法

一、关于集合的定义

什么是集合，这似乎是不言自明的，但究竟应如何给集合下定义，这个问题至今还未解决. Cantor 曾给集合下过定义，大体上是说：一条性质决定一个集合，所有满足此性质的个体称为该集合的元素. 在此基础上，Cantor 建立了集合论体系，即朴素的集合论体系. 对于 Cantor 集合论体系，在 1902 年 Russell 发现了悖论，即著名的 Russell 悖论①. 为了避免悖论和推动集合论的发展，人们逐渐地建立起公理集合论体系. 本书前六章的内容属于朴素集合论体系，第七章简单介绍公理集合论.

我们不给集合下严格的定义，但这毫不影响人们对集合的理解，以致人们能毫不费劲地举出许许多多集合的例子来. 例如，全体自然数组成的集合，26 个英文字母组成的集合，北京大学全体学生组成的集合等等.

二、集合的表示法

定义 1.1 设 A 为一集合，用 $x\in A$ 表示 x 为 A 的元素，读作"x属于 A". 用 $x\notin A$ 表示 x 不是 A 的元素，读作"x 不

---

① 关于 Russell 悖论将在第七章介绍.

属于 A".

对于任意的 x，$x \in A$ 和 $x \notin A$ 二者必居其一且只居其一.

我们给出集合的两种表示法.

1.列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来.

设 A 是以 a，b，c，d 为元素的集合，可表示为 $A = \{a, b, c, d\}$. 设 ω 是全体自然数的集合，则 $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$. 注意 0 为自然数.

2.描述法：用集合中元素的性质表示集合.

例如我们用 A 表示中国人组成的集合，于是 A 中元素的性质为"中国人"，我们可将 A 表示为 $A = \{x | x$ 是中国人$\}$. 类似地，若 B 为全体汉字组成的集合，则 $B = \{y | y$ 是汉字$\}$. ω 是全体自然数的集合，则 $\omega = \{z | z$ 是自然数$\}$. 当我们用 C 表示由 1—5 这五个自然数组成的集合时，可表示为 $C = \{x | x \in \omega \wedge 1 \leqslant x \leqslant 5\}$. 一般情况下，设 $P(x)$ 为集合中元素的性质，则可用 $\{x | P(x)\}$ 表示这一集合.

关于集合的表示法要注意以下几点：

1）一个集合中的元素是各不相同的，因而集合 $\{a, b\}$ 中，$a \neq b$. 集合 $\{a, a, a\}$ 表示以 a 为元素的单元集 $\{a\}$.

2）集合中的元素不规定次序，因而 $\{a, b\} = \{b, a\}$.

3）两种表示法有时可以互相转化，例如全体自然数的集合有两种表示法，即 $\omega = \{x | x$ 是自然数$\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.

三、集合的包含和相等关系

定义 1.2 设 A，B 为二集合，如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 为 A 的子集，也称集合 A 包含集合 B 或 B

被 A 包含，用 $B\subseteq A$ 表示．将 $B\subseteq A$ 符号化即为：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in A).$$

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{a,b\}$，则 A，B，C 之间的包含关系有：$A\subseteq A$，$B\subseteq B$，$C\subseteq C$，$A\subseteq B$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$．除了这六种包含关系外，A，B，C 之间再无别的包含关系了．

从定义容易得出集合包含关系的一些简单性质．例如：

1）集合包含关系具有自反性．设 A 为一集合，则 $A\subseteq A$ 永远成立．这是因为 $(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in A)$ 为真，故 $A\subseteq A$ 为真．

2）集合包含关系具有传递性．设 A，B，C 为任意三个集合，若 $A\subseteq B\wedge B\subseteq C$ 时，则 $A\subseteq C$．这条性质的证明是简单的．对任意的 x，因为 $A\subseteq B$，所以若 $x\in A$，则 $x\in B$．又因为 $B\subseteq C$，从而 $x\in C$．于是 $(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in C)$ 为真，即 $A\subseteq C$ 成立．

定义 1.3 设 A，B 为二集合，若 A 包含 B，且 B 也包含 A，则称集合 A 与集合 B 是相等的，记作 $A=B$．符号化为：

$$A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A).$$

设 $A=\{2\}$，$B=\{x\mid x \text{ 为偶素数}\}$，则 $A=B$．

有了集合的包含和相等的概念，我们可以定义真子集或真包含的概念．

定义 1.4 设 A，B 为二集合，若 A 为 B 的子集且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集或称 B 真包含 A，用 $A\subset B$ 表示①．符号化为：

① 许多著者用 $A\subset B$ 表示 A 是 B 的子集，而用 $A\subsetneqq B$ 表示 A 是 B 的真子集．