财经类专科试用教材

经济数学基础

线性代数

张政修　曹承宾　王尚文　编

高等教育出版社

财经类专科试用教材

经济数学基础

线性代数

张政修　曹承宾　王尚文　编

高等教育出版社

内 容 提 要

为适应财经类专科经济数学教学的需要，我们将陆续出版一套《财经类专科经济数学基础教材》，这本线性代数即为其中之一。

本书内容简捷明了，着重基本概念的阐述. 最后一章讲线性代数在经济上的应用。

内容包括：行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的相似对角形和投入产出数学模型。

本书适用于财经类专科学生及职业大学、管理干部学院的有关专业学生作为教材，并可作为参加经济类自学考试的学生及经济工作者的参考书。

财经类专科试用教材

经济数学基础

线 性 代 数

张政修　曹承宾　王尚文　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 二 厂 印 装

*

开本850×1168　1/32　印张4.625　字数110 000

1988年9月第1版　1988年9月　第1次印刷

印数 0 001－ 8 410

ISBN 7-04-001092-5/O·669

定价1.30元

出版说明

近年来，各种形式的财经类专科学校、职业大学的财经专业、管理干部学院等发展很快，迫切需要经济数学基础教材，为了适应这一要求，我们计划出版一套"经济数学基础"教材，其中包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《线性规划》、《运筹学》等书，可供财经类专科学校、职业大学、管理干部学院选作试用教材或教学参考书。由于时间紧促，书中肯定会有不少缺点、错误，衷心欢迎读者批评指正。

目　录

第一章　行　列　式

在初等代数中我们学习过解二元线性方程组和三元线性方程组. 在求解时，需要二阶行列式和三阶行列式. 人们当然希望能解一般的 n 元线性方程组，这就需要高阶行列式. 在这章中我们将介绍 n 阶行列式的定义，行列式的性质，行列式的展开，并讨论一些行列式的计算. 关于解线性方程组的问题将在第四章中讨论.

§1-1　行列式的概念

我们回忆在中学学过的解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

的方法. 当二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

时，方程组(1.1.1)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中　$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

类似地，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的解可用三阶行列式表示，

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

对于三阶行列式 D，我们曾引用对角线法则进行计算，即在下面有六条对角线的表中，

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

在实对角线上三个数乘积取"＋"号，在虚对角线上三个数乘积取"－"号，然后加起来就是三阶行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

为了定义 n 阶行列式，我们先来研究三阶行列式的构造．首先它是六项的代数和，其中每一项都是不同行不同列上三个数的乘积．其次，我们看每一项的符号怎样决定．我们称数 a_{ij} 为行列式的第 i 行、第 j 列元素，它的第一个足标 i 称为行标，第二个足标 j 称为列标．把每一项的三个元素依行标由小到大的顺序排列起来而观察列标排列的特点．在一个排列中如果大数 t 在小数 r

的前面，则我们称此排列有一个逆序．在上述各项的列标的排列中，如排列 2 3 1，2 在 1 前面，有 1 个逆序；3 在 1 前面，又有一个逆序，因此排列 2 3 1 总共有 2 个逆序，即逆序数是2．排列 1 2 3 没有逆序，或者说逆序数是零（没有大数字排在小数字的前面）．又排列 3 2 1 与 2 1 3 的逆序数分别为 3 与 1．列标排列的逆序数为偶数时，该项取"＋"号，为奇数时，取"－"号．因此 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$ 的符号为"＋"；$a_{13}a_{22}a_{31}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$ 的符号为"－"．

基于上述情况，我们可以定义 n 阶行列式如下：

设有 n^2 个数 a_{ij}，i、$j=1,2,\cdots,n$，把它们排成 n 行 n 列，记成：

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.1.2}$$

叫做 n 阶行列式，它表示所有这样乘积的代数和，每个乘积中含有 n 个数，它们取自不同的行和列，于是这些乘积都可以写成下面的形式：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某种排列．当它的逆序数为偶数时，这项取"＋"号；而当其逆序数为奇数时，这项取"－"号，用式子表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1.3}$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数．和式是对 1，

$2,\cdots,n$ 的一切排列求和，由于 n 个数字的所有排列共有 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n=n!$ 个，所以 n 阶行列式共有 $n!$ 项。

例 1.1 证明对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & b_{1n} \\ & & b_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ b_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_{1n}b_{2,n-1}\cdots b_{n1}.$$

证明 第一式中除了所有对角线上数的乘积可能不等于零外，其它任一项都包含对角线以外的数，从而必等于零，因此第一式只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 显然它的符号是"+"，因为列标排列的逆序数为零.

同理，第二式除了乘积 $b_{1n}b_{2,n-1}\cdots b_{n1}$ 外，其它的项全为零，这一项列标排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数可以计算如下：n 后面每一个数字都比它小，所以排列中有 $n-1$ 个逆序；同样，$n-1$ 后面有 $n-2$ 个数字比它小，因此有 $n-2$ 个逆序．依次类推，直至 2 后面是 1，所以有一个逆序．这样列标排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$，证毕.

例 1.2 证明三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdot^{\cdot} & & \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明 我们来考查第一式中可以不为零的项有哪些. 取一般项

$$\pm a_{1p_1}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{np_n},$$

因为行列式的第 n 行除 a_{nn} 外，其它各个数都是零，所以只能是 $p_n=n$；再因为第 $n-1$ 行除 $a_{n-1,n-1}$, $a_{n-1,n}$ 外，其它的数都是零，而对第 n 列已有 $a_{np_n}(p_n=n)$，故不能再取 $p_{n-1}=n$，只能是 $p_{n-1}=n-1$，即 $a_{n-1,p_{n-1}}=a_{n-1,n-1}$. 一般地，$p_i$ 只能取 i，即 $a_{ip_i}=a_{ii}$。因此行列式的非零项显然是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 它的符号显然是"+".

同理可证第二式.

例 1.3 计算行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由于行列式的项都是取自于不同行与不同列的四个数的乘积，因此这个行列式的不为零的项只能是

$4\cdot(-2)\cdot1\cdot3$, $4\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)$, $3\cdot1\cdot1\cdot3$, $3\cdot1\cdot(-2)\cdot(-1)$，注意到这些项的列标排列分别是 4 3 2 1，4 3 1 2，3 4 2 1，

3 4 1 2它们的逆序数分别是$3+2+1=6$，$3+2=5$，$2+2+1=5$，$2+2=4$，因此，

$$
\begin{aligned}
A&=(-1)^6\cdot 4\cdot(-2)\cdot 1\cdot 3+(-1)^5\cdot 4\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)\\
&\quad+(-1)^5\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3+(-1)^4\cdot 3\cdot 1\cdot(-2)\cdot(-1)\\
&=-24+16-9+6=-11.
\end{aligned}
$$

§ 1-2 行列式的性质

性质 1 行列式的任一行中各元素的公因子k可以提到行列式外面，即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}\cdots\cdots a_{1n}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
ka_{i1}\cdots\cdots ka_{in}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
=k
\begin{vmatrix}
a_{11}\cdots\cdots a_{1n}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{i1}\cdots\cdots a_{in}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

证明

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}\cdots\cdots a_{1n}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
ka_{i1}\cdots\cdots ka_{in}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}
$$

$$
=k\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}
$$

$$
=k\begin{vmatrix}
a_{11}\cdots\cdots a_{1n}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{i1}\cdots\cdots a_{in}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n1}\cdots\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

性质 2 假如行列式的第i行中各元素都可以写成两项的

和：$a_{ij}=b_j+c_j, j=1,2,\cdots,n$. 那末这个行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的第 i 行，一个是 $b_1,\cdots,b_n$；另一个是 $c_1,\cdots,c_n$. 其它各行都一样. 即

$$(i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2\cdots\cdots b_n+c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = (i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ c_1 & c_2\cdots\cdots c_n \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$(i)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2\cdots\quad b_n+c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{j_i}+c_{j_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{(j_1\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots \\ b_1\ \ b_2\ \cdots & b_n \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots \\ c_1\ \ c_2\ \cdots & c_n \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在例1.3我们看到4 3 2 1的逆序数是偶数，但3 4 2 1的逆序数却是奇数，这就是说，把4 3 2 1的4与3互换而成为3 4 2 1，它们逆序数的奇偶性就变了．一般情况也是这样，把排列中任意两个数互换，排列逆序数的奇偶性就改变，这是逆序数的一个重要性质，其证明较繁，这里省略．

引用这个性质根据定义我们容易证明

性质 3 对调行列式的任意两行，行列式改变符号．

证明 为了简便，我们仅就对调一、二行的情况证明．

设行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

对调其一、二两行后，得行列式

$$B=\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

注意B中第一行元素是A的第二行元素，B中第二行元素是A的第一行元素，而其余各行元素则完全一样．在A中任取一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} \qquad (*)$$

其中$\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)$是列标排列的逆序数．对应于这$n$个元素，它们在$B$中的相应项是

$$(-1)^{\tau(j_2j_1j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}a_{1j_1}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} \qquad (**)$$

由于从排列$j_1j_2j_3\cdots j_n$到排列$j_2j_1j_3\cdots j_n$是对调文字j_1与j_2而成，根据前述性质，这两个排列的逆序数$\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)$与$\tau(j_2j_1j_3\cdots j_n)$的奇偶性不同．因此(*)与(**)式仅差一个符号．

这说明对 A 中任一项是 B 中某一项的相反数，反过来也一样．而 A、B 所含项数一样多，因此必然有 $B=-A$。

一般情况也可以同样证明．

例如，行列式 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-11$（例 1.3），对调它的一、三两行后得行列式 $D_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，

由性质 3 可知 $D_2=-D_1=11$．读者试根据定义加以验证．

性质 4 行列式中若有两行对应的元素成比例，则行列式的值为零．

证明 利用性质 3 和性质 1 可以算得

$$D=\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ b_1\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ kb_1\cdots kb_n \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{matrix}=-\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ kb_1\cdots kb_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_1\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-k\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ b_1\cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_1\cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \end{matrix}=-\begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ b_1\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ kb_1\cdots kb_n \\ \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}=-D.$$

所以 $D=0$。

推论 行列式中若有两行相等，行列式的值为零．

性质 5 将行列式的任一行的 k 倍加到另一行上，行列式的

值不变.

利用性质 2 和性质 4 可以很容易地证得.

下面给出一个重要概念.

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行都变为列，不改变前后顺序所得到的新行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 D 的转置行列式. 元素 a_{ij} 在 D 中位于第 i 行第 j 列，则在 D^T 中它位于第 j 行第 i 列.

例如，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-11.$$

直接算得它的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-11,$$

这就是说 D 与 D^T 相等，一般也是如此. 因此我们有

性质 6 行列式与它的转置行列式相等.

我们可以引用前面给出的“互换排列中任意两数其逆序数的

奇偶性改变”这性质来证明，但叙述较繁，只好从略．读者不妨取三阶行列式来验证．

利用性质 6 不难知道在行列式中，行与列所处的地位是相同的，因此性质 1 至性质 5 对行列式的列也相应地成立．计算行列式时，利用上面性质有时可以简化计算，举例如下：

例 2.1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

解 用 $-a_1, -a_2, -a_3$ 乘以第 1 行分别加到第 2、3、4 各行上，就构成三角形行列式，再由上节例 1.2 即得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ 0 & 0 & a-a_2 & a_3-a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a-a_3 \end{vmatrix}=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3).$$

例 2.2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 这行列式的特点是各行 4 个数的和是 11，我们把第 2，3，4 各列都加到第 1 列，提出公因子 11，然后从第 2，3，4 各列都减去第 1 列的 2 倍，就得到下面的结果：

$$D=\begin{vmatrix} 11 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 5 & 2 \\ 11 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}=11\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$