F.克莱因（德）著

高观点下的初等数学

第二卷

几何

舒湘芹 陈义章 杨钦樑 译

余家荣 审

湖北教育出版社

第一版序

在这些讲义第一卷（算术、代数、分析）的出版序中，我曾表示怀疑，讨论几何学的第二卷是否能很快出版。但是由于海林格先生的勤奋工作，本卷终于完成了。

关于这一系列讲义成书之缘由，我在第一卷序中已经讲过，没有什么特别的话要补充了。但是对于这本第二卷所采取的新的形式，似乎又有必要作一番解释。

确实，这一卷的形式与第一卷太不同了。我曾下定决心，无论如何要对几何学领域作出一个综述，把我认为每一个高中数学教师应该具有的知识范围都包括进去。于是，关于几何教学的讨论就被推到每章结尾篇幅所允许的地方，前后连贯起来。

选择这种新的写作安排的一部分动机是想避免刻板的形式。但是还有更重要、更深一层的理由。几何学中没有与该学科总水平相对应的统一教材，不象在代数和分析方面那样有标准的法国教程。一个内容广的题目往往这里讲一点、那里讲一点，简直象是各个不同的研究工作者分头写的。相反，我追求的教学法目标和一般科研目标却是希望作一个比较统一的处理。

最后我希望《高观点下的初等数学》这两卷相互补充的书，会象席马克先生和我去年出版的"数学教学组织"那本讲义一

样，受到教育界的欢迎。

克莱因

1908年圣诞节于哥丁根

第 三 版 序

根据我在第一卷第三版序中讲的总计划，这一卷（第二卷）的正文及其处理未作修改，只是在细节上作了一些小的改动，并插入一些内容。原著中没有讲到的、涉及科学文献和教学法文献的两个附录，是赛费特先生和我一再讨论后编写的（中译本未收此附录——中译者）。赛费特先生又担负起了与出版有关的主要工作。海林格、弗迈米尔及瓦尔特先生帮助他看了校样。弗迈米尔先生编了两个索引。我十分感谢这几位先生，也对施普林格出版公司表示谢意，该公司始终如一地表现了协助出版的精神。

克莱因

1925年5月于哥丁根

英 译 者 序

克莱因著《高观点下的初等数学》三卷本第一卷英文译本出版以后，收到了读者的良好反应，所以我们翻译出版了本书，

即原著第二卷。纽约大学柯兰特教授在执教哥丁根大学时即已建议翻译出版克莱因的著作，他一直提供慷慨的协助，为在美国刊行第二卷铺平了道路。

目　录

第五部分　几何变换

第六部分　几何及其基础的系统讨论

前　言

先生们！我现在开始讲的课程是去冬课程的继续或补充。我现在的目的象那时一样，是要把你们在大学几年中学过的一切数学知识集中起来，只要对未来的教师有用就收集拢来，特别是要指出它们同中学教学的关系．在去年冬天的那一学期，我已经执行了这个计划，讲了算术、代数和分析．这一学期将把注意力投到去年放在一边的几何上来．在这次讲座中，课程内容是独立于上次课程的知识的．此外，我将在整体上采取有所不同的调子：先讲百科全书式的全面内容，向你们提供通盘几何知识介绍，你们可以把已经学过的一切零星知识都纳入一个严格的系统，要用的时候就可以拿来用．作了这番通盘介绍之后，我才强调与数学教学有关的内容，而我去年冬天的出发点始终就是数学教学．

我很高兴地要提一下1908年复活节假日期间在哥丁根这里所举办的数理教师假期讲座．在那个讲座中，我介绍了去年冬天讲座的内容．与此有关，也由于此地中学贝伦德逊教授所作的讲话，引起了一场有趣而富有启发性的讨论，涉及到了中学算术、代数、分析教学的重新组织问题，特别是谈到了把微积分引入中学的问题．参加讨论的人对这些问题表现出了极为令人欣慰的兴趣，并一般对我们使大学和中学发生紧密接触的努力表示兴趣。我希望这个讲座也会在这个方向发生一定的影

响．我们以往不断地听到中学里传来的、往往是正确的抱怨，说大学教育固然传授了许多专门内容，但对新教师以后真正会用到的许多重要的一般内容却没有讲，使新教师完全摸不清方向．但愿我这个讲座能起一定的作用，有助于消除这种由来已久的抱怨．

现在来讲讲这个讲座的内容。象以前那个讲座一样，为了强调对整体内容的一般介绍，我不时需要假定你们从已经学过的一切数学知识中掌握了一些重要的定理．不错，我会始终努力作些简短的说明，以促使你们回想起学过的内容，使你们能够轻而易举地摸清文献．另一方面，我要把注意力更多地吸引到几何学科的历史发展以及伟大先驱者的成就上来，不象我在第一卷里通常做的那样．我希望，通过这类讨论，提高我常爱说的你们的一般数学素养，因为除了专门课程提供的详尽知识以外，还应当抓住主题内容及历史关系．

请允许我最后再泛泛地讲几句话，以免由于把这一部分几何同第一部分算术作了名义的划分而产生误解．尽管作了这种划分，但我在这里象在那种一般的讲座中一样，始终如一地最喜欢用“算术和几何的融合”这个说法来表示我的主张．我的意思是：算术这个领域不仅包含整数理论，而且包括整个代数和分析．德国中学里一般就是如此．某些人、特别是在意大利，喜欢用“融合”这个词，但仅限于指几何方面的努力．其实，无论是在大学里或在中学里，都早已形成惯例，先学平面几何，然后完全与平面几何分开来再学空间几何．因此，空间几何不幸往往遭到轻视，使我们最先具有的卓越的空间感知能力不能得到发展。与此相反，“融合派”希望同时处理平面与空间几何，使我们的思维不致于人为地受到二维的限制．这种努力也得到我的赞同，但我同时想到的是更深入、广泛的融合．上个

学期，我始终努力想使算术、代数及分析的抽象讨论生动活泼起来，利用图示和作图方法使内容更易为个人所接受，并第一次向学生说明为什么应当对这种讨论发生兴趣．同样，现在一开始就要伴以空间观念，这种空间观念与解析公式一起当然应占首要地位，促进对几何材料的高度精确的概括．

下面我立即讨论我们的问题，首先考虑一系列简单的几何基本形式，你们就能最容易地理解我讲的意思．

第四部分

最简单的几何流形

第 十 章

作为相对量的线段、面积与体积

看了本章的标题，你们就会了解，我准备同时考虑在直线、平面和空间里的对应变量．然而，为了分析表述，将考虑统一的原则，立即利用直角坐标系．

设有一线段，设想其位于x轴上．如其端点的横坐标为x_1和x_2，则其长度为x_1-x_2，可以将这个差写成行列式形式：

$$(1,\ 2)=x_1-x_2=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

类似地，由坐标为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，的三个点1、2、3形成的xy平面上的三角形的面积为：

$$(1,2,3)=\frac{1}{1\cdot 2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

最后，由坐标为(x_1,y_1,z_1)，…，(x_4,y_4,z_4)的四点形成的四

面体体积的公式为：

$$(1,2,3,4)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

我们通常所说的线段长度或相应情况下的面积与体积，是这几个量的绝对值，而实际上，我们的公式所提供的，远远不止这些，还给出了依赖于所取各点顺序的一个确定的符号．在几何学中，将始终考虑这些解析式子所提供的符号，以此作为基本规则，因而必须要问包含在这些行列式内的符号的几何意义．

因此，如何选择直角坐标系，就成了一件重要的事．所以请一开始就建立一个约定，这虽然是任意的，但必须在一切情况下皆有约束力．在一维情形下，我们将认为 x 轴的正向总是指向右方．在平面上，x轴的正向指向右方，而y轴的正向指向上方（图10.1）．如果使 y 轴朝下，则必有一个本质不同的坐

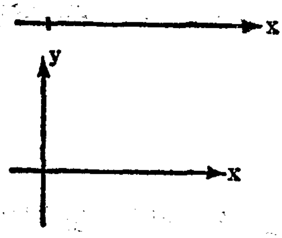

图10·1

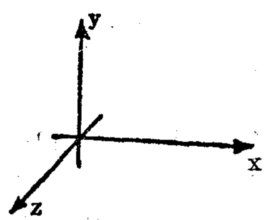

图10·2

标系，它是前者的反射，如果不进入空间仅通过在平面内的移动，是不可能使它们相互重合的．最后，通过对平面坐标系加上一个正向指向前方的z轴，将得到空间坐标系（图10.2）．选取z轴正向指向后方，同样会得到一个本质不同的坐标系，不可