普通高等工科院校基础课规划教材

概率论与数理统计学习指导

蒋国强　主　编
陈绚青　余维虹　副主编

机械工业出版社
China Machine Press

普通高等工科院校基础课规划教材

概率论与数理统计学习指导

主　编　蒋国强
副主编　陈绚青　余维虹
参　编　张兴龙　章山林
主　审　韦博成

机械工业出版社

本书共分九章，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及样本分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析，每章由主要内容、典型例题解析、同步练习等三个部分组成。

本书对学员把握课程重点、突破难点、启迪思维、提高分析问题和解决问题的能力，具有较好的指导作用。本书可供各类高等院校在校大学生学习概率论与数理统计课程时同步使用，也可供各种应考考生考前复习参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/蒋国强主编．—北京：机械工业出版社．2002.7

普通高等工科院校基础课规划教材

ISBN 7-111-10223-1

Ⅰ.概… Ⅱ.蒋… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第026686号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
责任编辑：郑 丹 汪光灿 版式设计：霍永明 责任校对：李秋荣
封面设计：陈 沛 责任印制：路 琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002年7月第1版·第1次印刷
1000mm×1400mm B5·5.875印张·194千字
0 001—6 000册
定价：13.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

普通高等工科院校基础课规划教材

编审委员会

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的21世纪。这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德，明确的历史责任感和社会使命感，较强的创新精神、创新能力和实践能力，宽广的知识面和扎实的基础。基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力，关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力。由于基础学科本身的特点，以及某些短期功利思想的影响，不少人对大学基础教育的认识相当偏颇，我们有必要在历史的回眸中求前车之鉴，在未来的展望中创革新之路。我们必须认真转变教育思想，坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导，以培养新世纪高素质人才为宗旨，以提高人才培养质量为主线，以转变教育思想观念为先导，以深化教学改革为动力，以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点，以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心，努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

基于上述考虑，中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅（原江苏省教委）和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会，组织编写了大学基础课程系列教材，作为加强教学基本建设的一种努力。

这套教材力求具有以下特点：

(1) 科学定位。本套教材主要用于应用性本科人才的培养。

(2) 综合考虑、整体优化，体现“适、宽、精、新、用”。

所谓“适”，就是要深浅适度；所谓“宽”，就是知识面要宽些；所谓“精”，就是要少而精；所谓“新”，就是要跟踪应用学科前沿，推陈出新，反映时代要求；所谓“用”，就是要理论联系实际，学以致用。

(3) 强调特色。就是要体现一般工科院校的特点，符合一般工科院校基础课教学的实际要求。

(4) 以学生为本。本套教材应尽量体现以学生为本，以学生为中心的教育思想，不为教而教。注重培养学生自学能力和扩展、发展知识能力，为学生今后持续创造性学习打好基础。

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于是一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善。

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢。

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任　殷翔文

2002 年 3 月

前　言

概率论与数理统计是理、工、农、医、商等高等院校普遍开设的一门重要课程，在工业、农业、医药、军事和科学技术中有着广泛的应用。由于概率统计思想方法的特殊性，初学者往往感到概念难于理解、问题难于分析、规律难于掌握。为了帮助学员把握课程重点、突破难点、启迪思维、提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这本学习指导书。

本书由蒋国强任主编，陈绚青、余维虹任副主编。参加编写工作的有张兴龙（第1章）、蒋国强（第2、6章）、陈绚青（第3、7章）、余维虹（第4、8章）、章山林（第5、9章）等。全书由主编蒋国强修改定稿。

本书承韦博成教授、刘应安博士审阅，他们提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，疏漏谬误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2002年2月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

主 要 内 容

1. 随机事件与样本空间

(1) 随机试验

具有下列特征的试验称为**简单随机试验**，简称为**随机试验**或**试验**，通常记为 T。

1) 可以在相同的条件下重复进行。

2) 试验的可能结果不止一个，但试验前能预知所有可能结果。

3) 试验前不能确定哪个结果会出现。

(2) 样本空间与样本点

一个随机试验 T 的所有可能出现的结果所组成的集合称为该随机试验的**样本空间**，通常记作 Ω。样本空间 Ω 的每个元素（即 T 的每个可能结果）称为**样本点**。

(3) 基本事件与（随机）事件

由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**。

随机试验 T 的样本空间 Ω 的子集称为 T 的**随机事件**，简称为**事件**，通常用大写字母 A、B、C 等表示。

(4) 必然事件与不可能事件

样本空间 Ω 是自身的子集，它包含所有样本点，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**。空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**。

2. 事件之间的关系与运算

(1) 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A** 或称**事件 A 包含于事件 B**，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。

(2) 相等关系

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**，记作 $A = B$。

(3) 事件的和

“事件 A 和事件 B 至少有一个发生”这一事件称为**事件 A 与事件**

B 的和，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$。

类似地，“n 个事件 A_1、A_2，…，A_n 中至少有一个发生”这一事件称为**事件 A_1，A_2，…，A_n 的和**，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n$；

“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生”这一事件称为**可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和**，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

（4）事件的积

“事件 A 和事件 B 同时发生”这一事件称为**事件 A 与事件 B 的积**，记作 $A\cap B$ 或 AB。

类似地，“n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生”这一事件称为**事件 A_1，A_2，…，A_n 的积**，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$。

“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生”这一事件称为**可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的积**，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

（5）互不相容事件

若两个事件 A、B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 **A、B 为两个互不相容事件或互斥事件**。

（6）对立事件

若事件 A、B 有且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称 **A、B 为相互对立事件或互逆事件**，记为 $A=\bar{B}$ 或 $B=\bar{A}$。

（7）事件的差

“事件 A 发生且事件 B 不发生”这一事件称为**事件 A 与 B 的差**，记为 $A-B$。

显然 $A-B=A\bar{B}$，$\bar{A}=\Omega-A$。

（8）事件运算的运算规律

1）交换律：$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$。

2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(AB)C=A(BC)$。

3）分配律：$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$。

4）对偶律：$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$；$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$。

注： 分配律与对偶律可以推广到有限个或可列个事件的情形。

3. 概率的定义与基本性质

（1）概率的统计定义

在一组恒定不变的条件下，将某一试验重复进行 n 次，事件 A 发生的次数为 μ，如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$ 随着 n 的增大总在某一固定的数值 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)=p$。

(2) 古典概型的概率定义

若试验 T 具有下列特性：

1)（有限性）T 的样本空间 Ω 只含有有限个样本点。

2)（等可能性）每个基本事件发生的可能性相同。

则称试验 T 为**古典概型**（或**等可能概型**）。

在古典概型中，定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的样本点数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 包含的样本点总数}}$$

(3) 几何概型的概率定义

若试验 T 的样本空间 Ω 是一个几何区域（直线上的区间、平面上的区域或空间中的区域），并且每个样本点落在 Ω 中任意度量（长度、面积或体积）相同的子区域内是等可能的，则称试验 T 为**几何概型**。

在几何概型中，定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 的几何度量}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 的几何度量}}$$

(4) 概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 T 的样本空间，对于 T 的每一事件 A，赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1)（非负性）对于每一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$。

2)（规范性）$P(\Omega)=1$。

3)（可列可加性）若 A_1，A_2，…，A_n，…是两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**。

(5) 概率的基本性质

1) $P(\varnothing)=0$。

2)（有界性）任意 $A\subset\Omega$，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

3)（有限可加性）若 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

4) (单调性) 若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$。

4. 条件概率

设随机试验 T 的样本空间为 Ω，A、B 为随机试验 T 的事件，若 $P(B) \neq 0$，则称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为**事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率**。

5. 事件的独立性

(1) 相互独立与两两独立的定义

1) 对于事件 A 与 B，若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称 **A 与 B 相互独立**。

2) 对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，若满足对任意 k（$1 < k \leqslant n$），及任意 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 **A_1，A_2，…，A_n 相互独立**。

3) 对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，若满足

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)(i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称 **A_1，A_2，…，A_n 两两独立**。

注：若 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则 A_1，A_2，…，A_n 两两独立；反之不然。

(2) 相互独立的性质

性质 1　当 $P(A) > 0$ 时，

$$A \text{ 与 } B \text{ 相互独立} \Longleftrightarrow P(B \mid A) = P(B)$$

当 $P(B) > 0$ 时，

$$A \text{ 与 } B \text{ 相互独立} \Longleftrightarrow P(A \mid B) = P(A)$$

性质 2　A 与 B 相互独立

$\Longleftrightarrow A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立

$\Longleftrightarrow \bar{A}$ 与 B 相互独立

$\Longleftrightarrow \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立

(3) n 重独立试验与 n 重贝努利试验

如果随机试验在相同的条件下重复进行 n 次，且各次试验的结果

相互独立，则称这样的试验为 **n 重独立试验**。

在 n 重独立试验中，如果每次试验的可能结果只有两个，即 A 发生与 $\overline{A}$ 发生，则称这样的 n 重独立试验为 **n 重贝努利试验**。

6. 概率的计算公式

(1) 逆事件的概率公式

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(2) 和事件的概率公式（加法公式）

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

一般地，

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

特别地，若 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 差事件的概率公式（减法公式）

$$P(A - B) = P(A) - P(AB)$$

特别地，若 $B \subset A$，则

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

(4) 积事件的概率公式（乘法公式）

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

一般地，

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别地，若 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

(5) 条件概率公式

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

注：关于概率的一些重要结论都适用于条件概率。

例如： $P(A \mid B) = 1 \quad P(\overline{A} \mid B)$

$$P((A_1 \cup A_2) \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1A_2 \mid B)$$

(6) 全概率公式与贝叶斯公式

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一**完备事件组**（即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，$P(A_i) > 0$，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$），则对任一事件 $B \subset \Omega$，有

1) $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)$

2) $P(A_j \mid B) = \dfrac{P(A_jB)}{P(B)} = \dfrac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$

(7) 二项概率公式

设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，则在 n 重贝努利试验中，事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

(8) n 个相互独立事件至少发生其一的概率公式

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)]\cdots[1 - P(A_n)]$$

典型例题解析

例 1-1 袋中装有 a 个白球和 b 个黑球，用下列 3 种方式从中任取 k 个球（$1 \leqslant k \leqslant a+b$），试求所取的 k 个球中恰有 m 个白球的概率（其中 $1 \leqslant m \leqslant \min\{k, a\}$）。

(1) 一次性抽取 k 个；

(2) 无放回地抽取 k 次，每次 1 个；

(3) 有放回地抽取 k 次，每次 1 个。

解 设 $A = \{$所取的 k 个球中恰有 m 个白球$\}$。

(1) 样本点总数为 C_{a+b}^k，A 所包含的样本点数为 $C_a^m C_b^{k-m}$，故所求概率为

$$P(A) = \frac{C_a^m C_b^{k-m}}{C_{a+b}^k}$$

(2) 样本点总数为 P_{a+b}^k，A 所包含的样本点数为 $C_a^m C_b^{k-m} k!$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{C_a^m C_b^{k-m} k!}{P_{a+b}^k}=\frac{C_a^m C_b^{k-m}}{C_{a+b}^k}$$

(3) 样本点总数为 $(a+b)^k$，A 所包含的样本点数为 $C_k^m a^m b^{k-m}$，故

$$P(A)=\frac{C_k^m a^m b^{k-m}}{(a+b)^k}$$

注： 由本例可知，“一次抽取 k 个”与“无放回地抽取 k 次，每次 1 个”，这两种抽取方法的效果完全相同。

例 1－2 袋中有 $m+n$ 个球，其中有 m 个白球，n 个黑球，将球一个一个地取出来，取后不放回，求第 k 次（$1\leqslant k\leqslant m+n$）取出的是白球的概率。

解法 1 将 $m+n$ 个球看作是全不相同的，按取出的先后次序，将球排在直线上的 $m+n$ 个位置上，每一种取法对应着 $m+n$ 个球在 $m+n$ 个位置上的一个排列，不同的排列总数为 $(m+n)!$，这就是样本点总数。令 $A=\{$第 k 次取出的是白球$\}$，则 A 发生，当且仅当在直线上第 k 个位置上放白球，而其余 $m+n-1$ 个位置上的球由剩余的 $m+n-1$ 个球作全排列，故 A 包含的样本点数为 $C_m^1(m+n-1)!$。因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_m^1(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{m}{m+n}$$

解法 2 将 m 个白球看作是无区别的，n 个黑球也看作是无区别的，设想按取出的先后次序，将球排放在直线的 $m+n$ 个位置上，每一种放法对应着 m 个白球在 $m+n$ 个位置上的一种放法，故样本点总数为 C_{m+n}^m。令 $A=\{$第 k 次取出的是白球$\}$，则 A 发生，当且仅当第 k 个位置上放白球，而其余 $m+n-1$ 个位置中选出 $m-1$ 个位置放白球，故 A 所包含的样本点数为 C_{m+n-1}^{m-1}。因此所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}=\frac{m}{m+n}$$

注： 值得注意的是，所求概率与次序 k 无关，这实际上就是“抽签”的理论依据，即“中签”与否与抽签的次序无关。

例 1－3 从 0 至 9 这 10 个数字中，不重复地任取 4 个，求

(1) 能排成一个 4 位奇数的概率；

(2) 能排成一个 4 位偶数的概率。

解 显然，样本空间中包含的样本点总数为 P_{10}^4，令 $A=\{$能排成

一个4位奇数}，$B=$ {能排成一个4位偶数}。

(1) 当4个数字能排成4位奇数时，末位数应为1，3，5，7，9中的一个，故末位数有 C_5^1 种取法，而首位数不能取0，故首位数有 C_8^1 种取法；首位与末位取定后，中间两位数可以从其余的8个数字中任取两个来排列，故有 P_8^2 种取法。因此，事件 A 包含的样本点数为 $C_5^1C_8^1P_8^2$，于是

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^1P_8^2}{P_{10}^4}=\frac{4}{9}$$

(2) 当4个数字能排成4位偶数时，末位数应为0，2，4，6，8中的一个。若末位不为0，则末位有 C_4^1 种取法，而首位有 C_8^1 种取法，中间两位有 P_8^2 种取法；若末位取0，则前3位有 P_9^3 种取法，故事件 B 包含的样本点总数为 $C_4^1C_8^1P_8^2+C_1^1P_9^3$。因此所求概率为

$$P(B)=\frac{C_4^1C_8^1P_8^2+C_1^1P_9^3}{P_{10}^4}=\frac{41}{90}$$

例 1-4 从区间 [0，1] 中任取两数，求

(1) 两数之和大于$\frac{1}{2}$的概率；

(2) 两数之积小于$\frac{1}{e}$的概率。

解 设从 [0，1] 中取出的两数分别为 x 与 y，则点 (x, y) 与正方形 $OABC$ 内的点一一对应，即样本空间 Ω 可看作正方形域 $OABC$。

(1) 由于事件 $\left\{x+y>\frac{1}{2}\right\}$ 对应于区域 D_1（见图 1-1a)，故

$$P\left\{x+y>\frac{1}{2}\right\}=\frac{\text{区域 } D_1 \text{ 的面积}}{\text{正方形 } OABC \text{ 的面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}=\frac{7}{8}$$

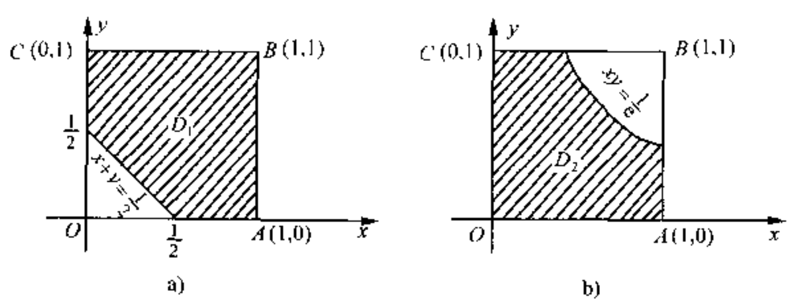

图 1-1