

高等院校统编教材

近代物理实验

高铁军 朱俊孔 主编

JIN DAI

WU LI SHI YAN

山东大学出版社

高等院校统编教材

近代物理实验

高铁军 朱俊孔 主编



A1026461

山东大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

近代物理实验/高铁军, 朱俊孔主编. — 济南: 山东大学出版社,
2000.9 (2002.6 重印)
ISBN 7-5607-2172-9

I. 近…

II. ①高…②朱…

III. 物理-实验

IV. 04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 44809 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码: 250100)
山东省新华书店经销
莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷
787 × 1092 毫米 1/16 18 印张 416 千字
2000 年 9 月第 1 版 2002 年 6 月第 2 次印刷
印数: 3501 – 4800 册
定价: 28.00 元

《近代物理实验》编委会

主 编：高铁军 朱俊孔
副主编：孟祥省 李丽华 左云桥 曲世鸣
 李正平 唐贵德
编 委：董 键 国承山 潘成福
 任晓斌 滕树云 何 源
 薛玉章 严振庄

前 言

物理学是研究物质最普遍、最基本的运动规律的一门基础科学。物理规律是实验事实的总结和概括。物理理论的正确与否只能用实验来证明。因此，物理学是一门实验科学，物理实验在物理学的发展历史中起着举足轻重的作用。

“近代物理实验”是大学理科高年级学生开设的一门重要基础实验课程。与“普通物理实验”相比，它所涉及的物理知识面更广，实验方法和实验手段的综合性及技术性更强，实验设备也更为复杂。因此，如何结合这门课程的特点和要求实施教学，如何提高教学质量，是摆在每个从事近代物理实验教学工作者面前的一个重要的研究和探索课题。

1999 年秋，我们对山东省部分省属大学（特别是高师院校）的近代物理实验教学情况作了一些调查研究，很多教师反映，提高近代物理实验教学质量，教材建设是基础。由于不同学校的培养目标、教学计划和学生的实验基础存在着差异，所以，有些“近代物理实验”教材对重点大学的教学是非常适合的，而对普通大学来说，用起来就有不少困难，教学效果难以令人满意。另外，由于各校在实验内容的选择安排以及仪器设备的配备上也不完全一样，大多数“近代物理实验”教材在普适性和兼容性方面有一定差距。在 1999 年 12 月召开的山东省高师院校物理系主任年会上，针对目前各校“近代物理实验”教学的情况，一致认为编写一本有一定特色、适用于高师院校的“近代物理实验”教材是当前亟待解决的问题。随后，我们约请山东师范大学、曲阜师范大学、聊城师范学院、烟台师范学院、青岛大学师范学院、临沂师范学院、河北师范大学等高校中一些长期工作在“近代物理实验”教学第一线且有丰富经验的教师着手编写这本教材。

这本教材的实验选题，是参照原国家教委 1989 年制定的“近代物理实验”大纲，并结合山东省高师院校当前的实际情况而确定的。全书共有 36 个实验项目，分为 9 个单元。在保证传统的基础性实验题材的同时，明显地加重了应用性实验题材的分量。既注意选择近代物理研究中经常用到的实验技术，如光谱技术、X 射线技术、磁共振技术、微波技术和真空技术等，又尽量使读者接触到一些比较先进的现代化技术及应用，如多道脉冲分析器、锁相放大器、光子计数器、现代光学中的图像处理技术以及计算机在实验中的应用等。既充分吸收传统实验教材之精华，又集近年来各校实验之成果。

本书在编写时注意了突出实验的物理思想和测量方法，内容简明扼要，尽量避免繁琐的数学推导。本书注意到了不同学校使用的普适性和兼容性，有些实验项目尽可能列出了不同的实验方法，具体的操作步骤尽量简化，让读者在掌握实验原理和方法的基础上，根据实验要求和仪器情况，自行设计拟定。各校在使用本书时不但实验项目可以“各取所需”，而且对某一项目中的实验内容作适当取舍。

本书的编写原则是统一规划，集体创作。长期的教学实践告诉我们，实验教学是一项集体事业，从实验室的建设、教材的编写到每个实验项目的不断完善与改进，都与广大实验教师和实验技术人员辛勤劳动分不开。本书总结了许多从事实验教学老师多年来实验教学、科研成果及教学改革的经验，是在相互取长补短的基础上集体编写的。各位作者分别在所撰写的内容后面署名。全书由高铁军、朱俊孔副教授统编定稿。

本书可作为高等师范院校、理工类高等院校本科和函授生的教材，也可供有关专业的教师和科技人员参考。

本书能够跟读者见面与各方面的支持密不可分。参编各校的物理系领导对本书的组织编写给予了足够的重视和关心；山东师范大学物理系的李义钟、国承山、程传福教授和张桂英、黄萍副教授审阅了部分初稿并提出了宝贵的建设性意见；参编各校的近代物理实验室的同志，也都直接或间接为本书作出了贡献。在出版过程中，山东大学出版社的领导和责任编辑也给予了热情帮助，使本书得以顺利出版。我们在此向所有支持者和有关单位热诚致谢。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中缺点错误在所难免，敬请有关专家和广大读者批评指正。

编 者

2000 年 7 月

目 录

实验误差与数据处理·····	1
第一单元 原子物理 ·····	17
1-1 光谱分析·····	17
1-1-1 乳剂特性曲线的制作·····	20
1-1-2 光谱定性分析·····	24
1-1-3 光谱定量分析·····	27
1-2 氢—氘原子光谱·····	31
1-3 钠原子光谱·····	33
1-4 夫兰克—赫兹实验·····	37
1-5 密里根油滴实验·····	41
1-6 塞曼效应·····	46
1-附 常用摄谱仪器及光谱观测仪器·····	51
第二单元 原子核物理 ·····	55
2-0 原子核物理实验基本知识·····	55
2-1 G—M 计数器·····	61
2-2 γ 闪烁能谱的测量·····	66
2-3 符合测量·····	73
第三单元 激光、全息和光信息处理 ·····	80
3-1 He—Ne 激光器模谱分析与测量·····	80
3-2 He—Ne 激光器特性与参数测量·····	86
3-3 菲涅耳全息·····	91
3-4 彩虹全息·····	97
3-5 相干光学图像识别·····	100
3-6 光拍频法测量光速·····	104
3-7 光电器件的光谱灵敏度·····	110

第四单元 真空技术	113
4-0 真空技术基础知识	113
4-1 真空的获得与测量	115
4-2 真空镀膜	121
第五单元 X 射线和电子衍射	125
5-0 X 射线技术基础知识	125
5-1 用劳厄法测定晶格取向	132
5-2 用 X 射线仪精确测定晶格常数	135
5-3 电子衍射	147
第六单元 微波技术	154
6-0 微波技术基础知识	154
6-1 微波的传输特性和基本测量	166
6-2 用微波方法测量介电常数和介电损耗角正切	172
6-3 微波分光实验	176
第七单元 磁共振技术	181
7-0 磁共振技术基础知识	181
7-1 电子自旋共振	184
7-2 核磁共振	191
7-3 铁磁共振	204
7-4 光磁共振实验	211
第八单元 固体物理与磁性材料的测量	220
8-1 半导体霍尔系数测量	220
8-2 弱磁性物质磁化率的测量	224
8-3 磁泡材料的静态特性参数测量	229
8-4 磁晶各向异性的实验观察	234
8-5 超导材料的电磁特性	238
第九单元 微弱信号检测技术和声学	244
9-0 微弱信号检测技术基本知识	244
9-1 光子计数系统	247
9-2 锁相放大器	254
9-3 噪声测量与声谱分析实验	265

附表.....	273
I 中华人民共和国法定计量单位	273
II 常用物理学常量表	275
III 里德伯项值表	276
参考文献.....	278

实验误差与数据处理

物理实验时要对一些物理量进行测量。各个物理量在一定条件下具有一个不以人的意志为转移的真实大小,称此值为被测量的真值。但是在测量中,通过实验方法来求被测量的真值时,由于对客观规律认识的局限性,测量仪器不准确,测量手段不完善,测量条件发生变化以及测量工作中的疏忽或错误等原因,都会使测量结果与真值不同,这个差别称为测量误差。

随着科学技术的发展和生产水平的提高,对减小测量误差提出了越来越高的要求。对很多测量来说,其价值完全取决于测量的准确程度。当测量误差超过一定限度时,测量结果不但没有意义,甚至会给工作带来危害。

误差理论和数据处理知识,是物理实验的重要内容之一,也是实验工作者应该具备的基本素质之一。我们研究误差的目的,一是根据误差的规律,在一定条件下尽力设法减小误差,保证实验课题的质量。二是根据误差理论合理地设计和组织实验,正确地选用测量方法和测量仪器。三是根据误差理论确切地评价测量结果中所包含误差的大小,以便更好地应用测量数据。

误差问题在普通物理实验课程中已经讲过一些。与普通物理实验相比,近代物理实验的实验技术和手段更加综合,实验仪器更加复杂,测量对象本身的统计涨落现象更加明显,因而对实验人员的误差知识提出了更高的要求。在这一部分中我们将对实验误差和数据处理的常用知识作一回顾和简单介绍,希望读者能在统计概率的基础上理解它。

一、误差的基本概念

(一)误差的定义与表示

测量误差定义为测量值 x 与真值 x_0 之差。即

$$\Delta x = x - x_0 \quad (0-1)$$

上面定义的误差是绝对误差。绝对误差 Δx 是一个代数值,当 $x \geq x_0$ 时, $\Delta x \geq 0$; 当 $x \leq x_0$ 时, $\Delta x \leq 0$; 它表示了测量值偏离真值的程度和方向。

有些问题用相对误差表示则更有意义。相对误差是指绝对误差与真值之比,常用百分数表示。即:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% \quad (0-2)$$

相对误差表示了测量结果的准确程度。

(二)测量误差的分类

按照测量误差的来源和性质,通常可把误差分为系统误差和随机误差两大类。

1. 系统误差

在相同条件下多次测量同一物理量时,误差的绝对值和符号保持恒定或按某一确定规律变化的,这种误差称为系统误差。

产生系统误差的原因主要有以下几个方面:仪器误差(测量设备的缺陷、测量仪器不准、测量仪表安装放置和使用不当所引起的误差);实验条件误差(测量环境变化,如温度、湿度、电源电压、周围电磁场的影响等所带来的误差);理论与方法误差(测量时使用的方法不完善,所依据的理论不严密或采用了某些近似公式等造成的误差);人身误差(测量人员感觉器官的不完善、生理上最小分辨能力的限制、一些不正确的测量习惯等造成的误差)。系统误差的特点是具有确定性和规律性,因此可以根据系统误差产生的原因,采取一定的措施,设法消除或减弱它。

2. 随机误差

在相同条件下多次测量同一物理量时,尽管系统误差已经消除或不存在,但每次测量结果也并不是完全相同。这种不同表明测量值与真值之间的误差,其符号时正时负,其绝对值时大时小,不可预知也不可控制,这种带有随机性或偶然性的误差称为随机误差,亦称为偶然误差。

随机误差是由那些对测量结果影响很微小、且互不相关的多种因素共同作用造成的。例如周围环境的无规起伏、仪器性能的微小波动、实验测量人员感觉器官无规律的微小变化以及一些尚未发现的因素等。随机误差对每次测量来说没有必然的规律性,好像纯属偶然,但进行多次重复测量时会呈现出统计规律性。因此可以用统计方法来处理随机误差。

除了上述两类误差之外,还有一类误差称为粗大误差。超出在一定条件下预期的误差叫粗大误差。也就是说,在一定的测量条件下,测量结果明显地偏离了真值。它主要是由于读错数、记错数或环境条件发生了突然跃变等原因造成的。由于粗大误差明显地歪曲了测量结果,因此含有粗大误差的测量结果称为坏值,应该剔除不用。

(三)测量结果的评价

在相同条件下对同一物理量进行多次测量时,测量结果中不可避免地同时包含有系统误差和随机误差。我们通常用精密度、正确度和精确度这三个指标来衡量测量结果的优劣。

精密度:反映随机误差的大小。精密度高说明多次测量值的重复性好,测量数据比较集中。

正确度:正确度亦称准确度,反映系统误差的大小。正确度高说明多次测量的平均值接近真值的程度好。

精确度:反映随机误差和系统误差的综合结果。精确度高说明多次测量值不仅重复性好,而且平均值又接近真值,即测量值集中分布在真值附近。

(四)测量结果的不确定度

在误差理论中,与误差联系紧密而又不完全相同的另一重要概念是不确定度。由于测量误差不可避免,以致真值无法求得。而真值不知道,也就无法确定误差的大小。因此,实验数据处理只能求出实验的最佳估计值及其不确定度。把实验结果表示为

$$\text{测量值} = \text{最佳估计值} \pm \text{不确定度} \quad (0-3)$$

通常取算术平均值作为测量值的最佳估计值;用平均值的标准偏差来表示不确定度。真值以一定的概率处在上式所给定的量值范围之内。

二、处理系统误差的一般方法

系统误差是在相同条件下多次测量某一物理量时,绝对值和符号保持恒定或在测量条件改变时按某种确定规律而变化的误差。其中在某些条件改变时仍保持不变的称为恒值系差;随测量条件而变化的叫变值系差。可以看出,系统误差具有固定性和规律性,不具有抵偿性。通常不能用处理随机误差的方法来处理。我们在讨论随机误差时是以测量数据中不包含系统误差为前提的。可是系统误差与随机误差往往同时存在于测量数据中,有时系统误差对测量结果的影响比随机误差还要严重。因此我们应该采取措施来限制、减弱或消除系统误差。对待系统误差,很难说有什么通用的处理方法,主要取决于实验工作者的经验、学识和技巧,这里我们只对处理系统误差的思路和方法作概要的介绍。

对系统误差的处理,一般包括以下几方面的内容:第一,设法检验系统误差是否存在。第二,分析产生系统误差的原因,并在测量之前尽量消除。第三,在测量过程中采取某些技术措施,来减弱它的影响。第四,估计出残存的系统误差的大小。对已知大小和方向的系统误差予以修正,对不能确切知道大小和方向的系统误差,要尽可能估计出大体范围,以便掌握它对测量结果的影响。

(一)系统误差的发现

在讨论误差的基本概念时曾经指出,产生系统误差的可能原因在于仪器、环境、方法和人身等方面。但通过什么途径和方法可以判断系统误差的存在及其大小呢?

对比检验是判断系统误差最常用的方法。所谓对比,包括把要判断的实验结果跟标准值、理论值相比较;或者是跟用精确度较高的仪器得到的测量值相比较;还可以跟采用不同方法测得的结果相比较。应该注意的是,由于随机误差不可避免,在系统误差与随机误差同时存在的情况下,应进行多次测量以减小随机误差的影响,才能更有效地判断系统误差的存在。在多次测量中,分析测量数据随条件变化的规律(特别是偏差 $v_i = x_i - \bar{x}$ 的变化),往往会有助于发现线性变化的系统误差(即累进性系差)和周期变化的系统误差(周期性系差)。

直接分析实验原理、方法以及实验条件的变化,也是判断系统误差的一种有效方法。如果实验方案本身就存在着不完备性,比如说计算公式是近似的,测量方法受到某种副效应或某种干扰的影响,则这个实验必然存在着系统误差。另外,有些实验所研究的物理现

象存在着统计涨落,测量仪器产生零点漂移,控制的实验条件随时间而明显变化等,这些因素都会带来系统误差。对实验本身的分析研究,常常会使我们直接找出系统误差,并可估计其大小。

分析测量数据的变化是判断系统误差的一种重要方法。当实验中的随机误差较大时,变值系统误差很难发现。常用下面两个判据来发现系统误差:

(1)马利科夫判据 马利科夫判据是用来判别累进性系统误差的常用方法。在使用这种方法时,把 N 次等精度测量的残差 $v_i = x_i - \bar{x}$ 按测量条件变化的顺序(例如按时间的先后次序)排列为 $v_1, v_2, \dots, v_N$, 然后把 N 个残差分成两部分并求其差值。

即当 N 为偶数时求

$$M = \sum_{i=1}^{N/2} v_i - \sum_{i=N/2+1}^N v_i \quad (0-4)$$

当 N 为奇数时求

$$M = \sum_{i=1}^{(N-1)/2} v_i - \sum_{i=(N+3)/2}^N v_i \quad (0-5)$$

若测量中含有累进性系统误差,则前后两部分残差明显不同,因而 M 明显地异于零。通常 M 的绝对值不小于最大残差的绝对值时,则可以认为有累进性系统误差。

(2)阿卑—赫梅特判据 阿卑—赫梅特判据常用来判别周期性系统误差。在使用这种判据时先按顺序把残差两两相乘,然后取和的绝对值,并求出测量数据的方差估计值,若

$$\left| \sum_{i=1}^{N-1} v_i v_{i+1} \right| \geq \sqrt{N-1} \sigma^2(x) \quad (0-6)$$

则可认为测量中存在着周期性的系统误差。

(二)消除产生系统误差的根源

针对产生系统误差的原因,在测量开始之前尽量发现和消除这些误差来源或防止测量受这些误差来源的影响,这是减弱或消除系统误差最好的方法。

在测量中,除从测量原理和方法上尽力作到正确、严格之外,还要对测量仪器定期检定和校准,注意仪器的使用条件和方法。例如仪器的放置位置、工作状态、使用频率范围、电源供给、接地方式、附件的使用与导线的连接都要注意符合规定并正确合理。

要注意周围环境对测量的影响。精密测量要注意恒温或采取散热、空气调节等措施。为避免周围电磁场及有害震动的影响,必要时可采取屏蔽或减震措施。加装稳压电源即可减小电源波动的影响。

对实验人员主观原因造成的系统误差,在提高业务水平和工作责任心的同时,还可以从改变设备方面尽力避免。例如用数字式仪表代替指针式仪表在很大程度上会减弱读数误差。用自动打印设备代替手抄数据则会避免抄错数据。必要时变换实验人员重新测量,也有利于避免测量人员因过度疲劳所导致的错误判断。

(三)采用典型测量技术限制和消除系统误差

虽然在实验之前注意分析和避免产生系统误差的来源,但仍然很难消除产生系统误

差的全部因素。因此在测量过程中,可以采用一些专门的测量技术和测量方法,来限制和消除系统误差。

(1)零示法 这种方法主要是为了消除指示仪表不准确而造成的误差。在测量中我们使被测量对指示仪表的作用与某个已知量对它的作用相互平衡以使指示仪表示零,这时被测量就等于已知的标准量,这种方法叫零示法。

在电阻测量中广泛使用的平衡电桥就是用零示法来进行测量的。在电桥中作为指示仪表的检流计应该灵敏,作为已知量的各臂元件值应该准确。

(2)代替法 代替法是在测量条件不变的情况下,用一个标准已知量去代替被测量,并调整标准量使仪器的指示值不变,在这种情况下,被测量就等于标准量的数值。由于在代替的过程中,仪器的状态和示值都不变,那么仪器的误差和其他造成系统误差的因素对测量结果基本上不产生什么影响。

在电桥中用代替法求未知电阻时,首先接入被测电阻,调节电桥臂使电桥平衡。然后用一个可变标准电阻代替被测电阻,调整这个可变标准电阻的阻值,使电桥达到原来的平衡状态。这时被测电阻的阻值就等于可变标准电阻的阻值。只要电桥中检流计灵敏度足够高,测量误差便主要取决于标准电阻的准确程度,而与各桥臂电阻以及检流计的准确度无关,电桥中的分布电容、分布电感等对测量也基本上没有什么影响。

(3)交换法 由于某些因素可能使测量结果产生单一方向的系统误差时,我们可以进行两次测量,利用交换被测量在测量系统中的位置或测量方向等办法,设法使两次测量中误差源对被测量的作用相反。对照两次测量值,可以检查出系统误差的存在。对两次测量值取平均值,会大大削弱系统误差的影响。例如用旋转度盘读数时,分别将度盘向右旋转和向左旋转两次读数,对读数取平均值,可以在一定程度上消除由传动系统的回差造成的系统误差。用电桥测电阻时,将被测电阻先后放在两个桥臂上进行测量,也有助于削弱系统误差的影响。

(四)修正系统误差

前面介绍的限制、减弱和消除系统误差的一些方法,是针对系统误差产生的根源采取的“治本”之法。但有时系统误差的变化规律过于复杂,采取了一些技术措施后仍然难于完全解决。这时应尽量找出系统误差的方向和数值,采用修正值(包括修正曲线或公式)的方法加以修正。例如可在不同温度时进行多次测量,找出温度对测量值影响的关系,然后在实际测量时,根据当时的温度对测量结果进行修正。

处理系统误差是一个复杂的问题,需要实验工作者具有坚实的理论基础和丰富的实践经验。希望读者在平日的实验训练中,结合具体实验的分析研究来提高这方面的能力。

三、概率统计的有关概念

在近代物理实验中,测量值的随机性除了有随机误差的影响外,有时还来自被测对象本身固有的随机性质。例如温度、密度、压强等宏观物理量的数值是统计平均值,原子核蜕变的统计涨落等。因此我们要用概率理论和数理统计的方法研究随机误差对测量数据的

影响,并用统计平均的办法来估计和处理随机误差。下面我们先回顾概率统计中的几个概念。

(一)随机变量的概率分布

1. 随机变量

在一定条件下,某一事件 A 可能发生,也可能不发生,则事件 A 称为随机事件。在物理实验中,在一定条件下测量某个物理量时,由于存在着我们未知或尚不能控制的许多偶然因素,某一测量值的出现是随机事件。

如果在一定的条件下进行了 N 次实验,其中事件 A 发生了 N_A 次,则比值 N_A/N 称为事件 A 发生的频率。当 $N \rightarrow \infty$ 时,频率存在一个极限值,称为事件 A 的概率,记为 $P_r(A)$,即 $N_A/N \rightarrow P_r(A)$ 。

不同的随机事件可以用不同的数来表示,这个数便是随机变量。随机变量按其取值的情况分为离散型和连续型:只能取有限个或可数的一串数值的随机变量称为离散型随机变量,可能值布满某个区间的随机变量是连续型随机变量。

随机变量全部可能取值的集合称为总体。总体的任何一个部分称为样本。在实验中,对某个物理量做有限次测量,测量结果总是获得某随机变量的样本。

2. 分布函数、概率函数和概率密度函数

对于随机变量的描述,我们不仅关心随机变量的全部取值,而且要了解各种可能取值的概率,即随机变量的概率分布。

无论是离散型还是连续型的随机变量,其可能的全部取值可以排列在实数轴上。因此可以定义随机变量 X 的分布函数 $P(x)$ 为

$$P(x) = P_r(X \leq x) \quad (0-7)$$

即分布函数 $P(x)$ 在 x 处的取值,等于 X 取值小于或等于 x 这样一个随机变量的概率。按照分布函数的定义,它必须满足:

$$P(-\infty) = 0 \quad (0-8)$$

$$P(\infty) = 1 \quad (0-9)$$

离散型随机变量 X 只能取可数的数值 $x = x_1, x_2, x_3, \dots$ 除了用分布函数描述外,还可以用概率函数 $p(x)$ 来描述它的分布。概率函数在某一点 x 的取值,等于随机变量 X 取值为 x 的概率,即:

$$p(x) = P_r(X = x) \quad (0-10)$$

根据分布函数和概率函数的定义,它们之间的关系为

$$P(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad (0-11)$$

对于连续型随机变量,可引入概率密度函数 $p(x) = dP(x)/dx$ 来描述它的分布,因此有

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (0-12)$$

根据公式(0-9),应该有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (0-13)$$

这就是概率密度函数 $p(x)$ 应满足的归一化条件。

由概率密度函数或分布函数,可求得随机变量 X 在区间 $[a, b]$ 内取值的概率为

$$P_r(a \leq x \leq b) = P(b) - P(a) = \int_a^b p(x) dx \quad (0-14)$$

此值称为随机变量 X 在区间 $[a, b]$ 内的概率含量。

3. 分布的数字特征量

如果一个随机变量的概率函数或概率密度函数的形式已知,只要给出函数式中各个参数(称为分布参数)的数值,则随机变量的分布就完全确定了。而分布参数的数值,往往就是所要研究的物理量的数值。

对于不同形式的分布,常常用一些有共同定义的数字特征量来表示它们。最重要的特征量有两个:期望值和方差。

(1) 随机变量的期望值 随机变量的期望值定义为:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (0-15)$$

期望值的物理意义是:作无穷多次重复测量时,测量结果的平均值。它处于随机变量概率密度曲线重心的位置。对于单峰对称的密度曲线,期望值就是曲线峰值所对应的位置。对于其他形式的密度曲线,期望值与概率密度函数取极大值的位置一般不重合。根据期望值的定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle) p(x) dx = 0 \quad (0-16)$$

此式表明,随机变量 x 分布在它的期望值附近。

(2) 随机变量的方差 随机变量的期望值只反映了它取值的平均情况。但是在实验工作中只知道随机变量的平均情况往往是不够的,还需要知道随机变量的离散程度。通常用随机变量的方差来反映它的离散程度。随机变量 x 的方差定义为

$$\sigma^2(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx \quad (0-17)$$

方差描述随机变量围绕期望值分布的离散情况,即随机变量取值偏离期望值起伏的大小。

方差的平方根称为随机变量的标准误差,简称标准差。即 $\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$
根据方差的定义,不难证明: $\sigma^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ 。

(二) 随机变量的正态分布

各种随机变量由于受到不同因素的影响,或者物理现象本身的统计性质,随机变量的概率分布也多种多样。

概率理论中的中心极限定理说明:如果一个随机变量是由大量的、相互独立的、微小的因素所合成的总效果,则这个随机变量就近似地服从正态分布。

在近代物理实验的大多数情况下,测量中的随机误差正是由对测量值影响较微小的相互独立的且又无法控制的多种因素的综合影响造成的。因而随机误差的分布及其在随机误差影响下测量数据的分布会遵从或近似遵从正态分布。

正态分布又称为高斯分布,是误差理论中最重要的分布。它是一种连续型分布,其概率密度函数的一般形式为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (0-18)$$

式中 x 为随机变量, μ 和 σ 为分布参数且 $\sigma > 0$ 。为了标志其特征通常又用 $n(x; \mu; \sigma^2)$ 来表示正态分布的概率密度函数,用 $N(x; \mu, \sigma^2)$ 表示正态分布的分布函数,即

$$n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (0-19)$$

$$N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \quad (0-20)$$

不难证明,如果一个随机变量 x 遵从正态分布,则它的期望值、方差和标准差分别为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x n(x; \mu, \sigma^2) dx = \mu \quad (0-21)$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 n(x; \mu, \sigma^2) dx = \sigma^2 \quad (0-22)$$

$$\sigma(x) = [\sigma^2(x)]^{1/2} = \sigma \quad (0-23)$$

由此可见,正态分布中的两个分布参数 μ 和 σ 的意义: μ 是期望值; σ 是标准误差。这两个参数决定了正态分布的特征:若消除了系统误差,则 μ 就是待测物理量的真值,它决定了分布曲线的位置。而参数 σ 的大小决定了概率密度函数曲线的胖与瘦,即决定了分布偏离期待值的离散程度。不同参数值的正态分布概率密度函数曲线如图 0-1 所示。由图可见,正态分布的特点是:曲线是单峰对称的。对称轴所在处 ($x = \mu$) 也就是期望值和概率密度极大值所在处。在期望值附近一个标准误差范围以内的概率含量为

$$P_r(|x - \mu| \leq \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} n(x; \mu, \sigma^2) dx = 0.683$$

如图 0-2 所示。图中阴影部分的面积在数值上等于 0.683。如果把 x 的取值范围扩大到期望值附近三倍标准偏差的范围内,其概率含量为

$$P_r(|x - \mu| \leq 3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} n(x; \mu, \sigma^2) dx = 0.997$$

因此,遵从正态分布的随机变量 x 取值与期望值相差大于 3σ 的概率已小于 0.3%。

期望值 $\mu = 0$, 方差 $\sigma^2 = 1$ 的正态分布称为标准正态分布,其概率密度函数和分布函数分别为

$$n(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$N(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$