

SHUXUE FENXI DIANXING FANGFA

数学分析 典型方法



王向东 戎海武 徐海祥 杨灵娥 编著

河南大学出版社

SHUXUE FENXI DIANXING FANGFA



责任编辑 / 程 庆
装帧设计 / 刘广祥

ISBN 7-81041-819-X



9 787810 418195 >

ISBN 7-81041-819-X/O · 127

定价：18.00 元

900

017
U37a

数学分析典型方法

王向东 戎海武 编著
徐海祥 杨灵娥



A1062501

河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析典型方法/王向东等编著. —开封:河南大学出版社,2002.6

ISBN 7-81041-819-X

I. 数… II. 王… III. 教学分析-分析方法 IV. 017

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第029741号

书 名 数学分析典型方法

作 者 王向东 戎海武 徐海祥 杨灵娥

责任编辑 程 庆

责任校对 文 严

封面设计 刘广祥

责任印制 苗 卉

出 版 河南大学出版社

地址:河南省开封市明伦街85号 邮编:475001

电话:0378-2864669(事业部) 0378-2825001(营销部)

网址:www.hupress.com E-mail:bangong@hupress.com

经 销 河南省新华书店

排 版 河南大学出版社印务公司

印 刷 郑州毛庄印刷厂

版 次 2002年6月第1版

印 次 2002年6月第1次印刷

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 15

字 数 356千字

印 数 1-1000册

ISBN 7-81041-819-X/O·127

定 价:18.00元

(本书如有印装质量问题请与河南大学出版社营销部联系调换)

前 言

在浩瀚的数学文献中,有一类是重要定理的新证明.高斯在科学研究上的一大特点是对某一个定理多次给予不同的证明,以求最简和严谨.他说:“绝不能以为获得一个证明以后,研究便告结束,或把寻找另外的证明当作多余的奢侈品.”

我们有这样的经验,新的方法常常能获得出乎我们意料的——新的或更重要的结果.

经常有这样的情况出现:一个定理有若干证法,然而这些证法却不一定都能用来证明一个与它类似的命题,其中很可能只有一种证法能证明这个类似的命题.如果我们只满足于一种证法,那么这个类似的命题有时就不易被证明.

对于学生和正在准备某种考试的读者来说,通过一题多解,既能广泛地综合运用基础知识,提高基本技能,又能更有效地发展逻辑思维,提高全面分析问题的能力.

解决一个数学问题有时与警察破案是类似的.为了破获一宗案件,警察需要进行一系列的调查和分析,寻找与案件有关联的一切人和事,破案的线索大多在有关的人和事中找到.本书的一个突出的特点是,把有关联的问题给以适当的编排.我们把一种方法所能证明的命题,以及一个定理的特殊情况和推广形式编排在一起,以使读者更容易产生联想、怀疑和猜想,更容易觅得解题的线索和过程.

本书可作为高等院校数学系开设“分析方法”这门课程的教材.此外,本书对于数学系学生、准备报考硕士学位研究生的读者和数学工作者都有一定的参考价值.

由于我们学识浅薄,所以错误之处定然不少,我们恳切希望读者指正.

作 者

2001年3月

目 录

第一章 序列与级数	(1)
第二章 连续性	(141)
第三章 微分与积分	(154)
第四章 不等式	(193)

第一章 序列与级数

1. 证明:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(ii) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad x_n \geq 0, y_n \geq 0, n = 1, 2, \dots;$$

$$(iv) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad x_n \geq 0, y_n \geq 0, n = 1, 2, \dots.$$

证法一 我们仅证(i), 其余类似. 首先注意到, 若由序列 $\{x_n\}$ 选出子序列 $\{x_{k_n}\}$, 则 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$. 不妨设

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{r_n} + y_{r_n}), \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_{r_n}}.$$

则
$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{r_n} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_{r_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_{m_{r_n}}.$$

因为 $\{x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\}$ 为收敛序列 $\{x_{r_n} + y_{r_n}\}$ 的子序列, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{r_n} + y_{r_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}).$$

又因序列 $\{x_{m_{r_n}}\}$ 收敛, 所以序列 $\{y_{m_{r_n}}\}$ 也收敛, 故 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{m_{r_n}}$. 所得不等式可改写为以下的形式

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n),$$

不等式(i)的左端部分成立.

注意到 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$, 得

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [(x_n + y_n) + (-y_n)] = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \end{aligned}$$

因此即得不等式(i)的右端部分.

证法二 我们只证(i)式的左端部分, 其余类似. 首先注意到 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} x_m$, 所以我们只要证明

$$\inf_{m \geq n} x_m + \inf_{m \geq n} y_m \leq \inf_{m \geq n} (x_m + y_m)$$

即可. 设 $\inf_{m \geq n} x_m = \alpha, \inf_{m \geq n} y_m = \beta$, 则 $x_m \geq \alpha, y_m \geq \beta, x_m + y_m \geq \alpha + \beta$, 所以取关于 $m \geq n$ 的下确界得

$$\inf_{m \geq n} (x_m + y_m) \geq \alpha + \beta.$$

2. 设给定一个序列 $\{a_n\}$, 使得序列 $b_n = pa_n + qa_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 是收敛的. 如果 $|p| < |q|$, 试证序列 $\{a_n\}$ 收敛.

证法一 由于 $|p| < |q|$, 故 $q \neq 0$. 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = (p+q)a$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时

$$|b_n - (p+q)a| < \epsilon.$$

$$\begin{aligned} \text{由} \quad \varepsilon > |b_n - (p+q)a| &= |p(a_n - a) + q(a_{n+1} - a)| \\ &\geq |q| |a_{n+1} - a| - |p| |a_n - a|, \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad |a_{n+1} - a| < \frac{\varepsilon}{|q|} + \left| \frac{p}{q} \right| |a_n - a|.$$

记 $\frac{\varepsilon}{|q|} = \delta$, $\left| \frac{p}{q} \right| = \lambda$, 重复使用上述方法得到

$$|a_{n+2} - a| < \delta + \lambda |a_{n+1} - a| < \delta + \lambda(\delta + \lambda |a_n - a|) = \delta(1 + \lambda) + \lambda^2 |a_n - a|,$$

.....

$$|a_{n+m} - a| < \delta(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-1}) + \lambda^m |a_n - a| < \frac{\delta}{1 - \lambda} + \lambda^m |a_n - a|.$$

固定 n , 取 m 足够大使得 $\lambda^m |a_n - a| < \varepsilon$, 因而存在自然数 K , 对一切 $k > K$, 都有

$$|a_k - a| < \left[\frac{1}{|q|(1-\lambda)} + 1 \right] \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证法二 由于 $|p| < |q|$, 故 $p+q \neq 0, q \neq 0$. 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad \alpha_n = \frac{b}{p+q} - a_n, \quad \beta_n = \frac{b - b_n}{q}, \quad n=1, 2, \dots, \quad \lambda = -\frac{p}{q},$$

则

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \beta_n + \lambda \alpha_n = \beta_n + \lambda(\beta_{n-1} + \lambda \alpha_{n-1}) = \beta_n + \lambda \beta_{n-1} + \lambda^2 \alpha_{n-1} \\ &= \dots \\ &= \beta_n + \lambda \beta_{n-1} + \lambda^2 \beta_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} \beta_1 + \lambda^n \alpha_1 \\ &= \frac{\beta_n \delta^n + \beta_{n-1} \delta^{n-1} + \cdots + \beta_1 \delta + \alpha_1}{\delta^n}, \end{aligned}$$

这里 $\delta = \frac{1}{\lambda}$. 于是

$$|\alpha_{n+1}| \leq \frac{|\beta_n| |\delta|^n + |\beta_{n-1}| |\delta|^{n-1} + \cdots + |\beta_1| |\delta| + |\alpha_1|}{|\delta|^n}.$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - b_n}{q} = 0$, 故由施笃兹(Stolz)定理有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\beta_n| |\delta|^n + |\beta_{n-1}| |\delta|^{n-1} + \cdots + |\beta_1| |\delta| + |\alpha_1|}{|\delta|^n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\beta_{n+1}| |\delta|^{n+1}}{|\delta|^{n+1} - |\delta|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_{n+1}| \frac{|\delta|}{|\delta| - 1} = 0. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n+1} = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{p+q} - \alpha_n \right) = \frac{b}{p+q}.$$

证法三 因 $|p| < |q|$, 故 $p+q \neq 0, q \neq 0$. 设

$$a_n = \frac{b}{p+q} + \alpha_n, \quad b_n = b + \beta_n, \quad n=1, 2, \dots,$$

其中 $\beta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则有 $q\alpha_{n+1} = \beta_n - p\alpha_n, n=1, 2, \dots$, 从而

$$|q| |\alpha_{n+1}| \leq |\beta_n| + |p| |\alpha_n|, \quad n=1, 2, \dots. \quad (1)$$

记 $\left| \frac{p}{q} \right| = \lambda$, 并不妨设 $\left| \frac{\beta_n}{q} \right| < 1, n=1, 2, \dots$, 由上式得

$$|\alpha_{n+1}| < 1 + \lambda |\alpha_n| < 1 + \lambda(1 + \lambda |\alpha_{n-1}|) = 1 + \lambda + \lambda^2 |\alpha_{n-1}|$$

$$< \cdots < 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1} + \lambda^n |\alpha_1| < \frac{1}{1-\lambda} + \lambda^n |\alpha_1|,$$

因而由 $\lambda < 1$ 易知 $\{\alpha_n\}$ 有界. 令 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = \alpha < +\infty$, 在(1)式两边取上极限得到

$$|q|\alpha \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\beta_n| + |p||\alpha_n|) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\beta_n| + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |p||\alpha_n| = |p|\alpha,$$

故由 $|p| < |q|$ 和 $0 \leq \alpha < +\infty$, 即得 $\alpha = 0$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{p+q} + \alpha_n \right) = \frac{b}{p+q}.$$

3. 已知第 n 项是 $s_n + 2s_{n+1}$ 的序列收敛, 证明序列 $\{s_n\}$ 也收敛.

本题是命题 2 当 $p=1, q=2$ 时的特例, 下面再给出一种证明.

证明 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + 2s_{n+1}) = 3L$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(s_n - L) + 2(s_{n+1} - L)] = 0.$$

记 $t_n = s_n - L$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n + 2t_{n+1}) = 0$. 以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ 即可. 设 $\varepsilon > 0$, 选取自然数 k , 使得对所有 $n \geq k$ 有 $|t_n + 2t_{n+1}| < \varepsilon$. 对 p 用数学归纳法易得

$$t_k - (-2)^p t_{k+p} = \sum_{i=0}^{p-1} (-2)^i (t_{k+i} + 2t_{k+i+1}).$$

因此当 $p \geq 1$ 时

$$|t_k - (-2)^p t_{k+p}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} 2^i |t_{k+i} + 2t_{k+i+1}| < 2^p \varepsilon.$$

用 2^p 除以上式两端得 $|t_{k+p} - \left(-\frac{1}{2}\right)^p t_k| < \varepsilon$, 于是

$$|t_{k+p}| < \varepsilon + \frac{|t_k|}{2^p}, \quad \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} |t_{k+p}| \leq \varepsilon, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |t_n| \leq \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的正数, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$.

4. 设 θ_n 由以下方程所定义:

$$\theta_n^3 + 2\theta_n + \frac{1}{n} = 0, \quad n=1, 2, \dots,$$

试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$.

解法一 对所有的 n , 必有 $|\theta_n| < 1$. 若不然, 存在某个 N 满足 $|\theta_N| \geq 1$, 则

$$|\theta_N^3 + 2\theta_N| = |\theta_N| |\theta_N^2 + 2| \geq \theta_N^2 + 2 > 2.$$

但由 θ_n 的定义, 有 $|\theta_N^3 + 2\theta_N| = \frac{1}{N}$, 矛盾. 下面证 $\{\theta_n\}$ 是单调递增的. 因为

$$\theta_{n+1}^3 - \theta_n^3 + 2(\theta_{n+1} - \theta_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = 0,$$

$$(\theta_{n+1} - \theta_n)(\theta_{n+1}^2 + \theta_{n+1}\theta_n + \theta_n^2 + 2) = \frac{1}{n(n+1)},$$

而由 $-1 < \theta_n \theta_{n+1} < 1$ 可以推得 $1 < 2 + \theta_n \theta_{n+1} < 3$, 从而得到 $\theta_{n+1} - \theta_n > 0, n=1, 2, \dots$. 所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$ 存在. 在关系式 $\theta_n^3 + 2\theta_n + \frac{1}{n} = 0$ 的两端令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得 $\theta^3 + 2\theta = 0$, 所以 $\theta = 0$.

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

解法二 由解法一可知 $|\theta_n| < 1$, 从而

$$|\theta_n| = \frac{1}{2} \left| \theta_n^3 + \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|\theta_n| + \frac{1}{n} \right).$$

设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\theta_n| = \theta$, 由上式即得 $\theta \leq \frac{1}{2}\theta$, 但 $0 \leq \theta < +\infty$, 所以 $\theta = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

解法三 由 θ_n 的定义, 有

$$|\theta_n| = \left| -\frac{1}{n(\theta_n^2 + 2)} \right| \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

解法四 设 $f(x) = x^3 + 2x + \frac{1}{n}$, 则 $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, 说明 $f(x)$ 严格单调递增. 而

$$f(0) = \frac{1}{n} > 0, \quad f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} < 0,$$

由连续函数的介值定理知方程 $f(x) = 0$ 在区间 $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ 有一实根, 再由 $f(x)$ 的单调性知

此根惟一. 由于 $f(\theta_n) = 0$, 故 $-\frac{1}{n} < \theta_n < 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

5. 序列 $\{y_n\}$ 是由序列 $\{x_n\}$ 的关系式所给定:

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

这里 $|\alpha| < 1$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

6. 设 $a_1 = 2, a_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) a_{n-1} + \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ 存在, 并求出这个极限值.

证法一 因为

$$n a_n = \frac{n+1}{2} a_{n-1} + 1 = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)a_{n-1}}{2} + 1,$$

所以若令 $n a_n = A_n$, 则上式成为

$$A_n = \left(1 + \frac{2}{n-1} \right) \frac{A_{n-1}}{2} + 1. \quad (1)$$

由数学归纳法可得 $A_n \leq 2 + \frac{30}{n}, n = 1, 2, \dots$. 事实上, $A_1 = 2, A_2 = 4, A_3 = 5, A_4 = \frac{31}{6}, A_5 = \frac{39}{8}$, 故当 $1 \leq n \leq 5$ 时 $A_n \leq 2 + \frac{30}{n}$. 设 $A_n \leq 2 + \frac{30}{n}, n \geq 5$, 则易得

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n} \right) \frac{A_n}{2} + 1 \leq \left(1 + \frac{2}{n} \right) \left(1 + \frac{15}{n} \right) + 1 \leq 2 + \frac{30}{n+1}.$$

另一方面, 根据(1)式, 由 $A_1 \geq 2, A_2 \geq 2, \dots$, 依次类推可得 $A_n \geq 2, n = 1, 2, \dots$. 于是

$$2 \leq A_n \leq 2 + \frac{30}{n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 2$.

证法二 记 $n a_n = A_n$, 则

$$A_1 = 2, \quad A_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) A_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots.$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ 存在, 在上式中令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得 $A = 2$.

容易验算 $A_1 < 60, A_2 < 60, A_3 < 60$, 设 $A_n < 60, n \geq 3$, 则

$$A_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) A_n + 1 < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 60 + 1 = 51 < 60.$$

因为
$$A_{n+1} - 2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) (A_n - 2) + \frac{2}{n},$$

所以
$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_{n+1} - 2| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n - 2| = \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n - 2|.$$

又因 $0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n - 2| < +\infty$, 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_n - 2| = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2$.

7. 若序列 $\{x_n\}$ 收敛, 序列 $\{u_n\}$ 定义如下:

$$u_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则 $\{u_n\}$ 也收敛于同一极限.

证法一 由假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 存在, 故对任意给定的正数 ϵ , 存在 N , 使得当 $n > N$ 时

$$|x_n - x| < \epsilon.$$

从而
$$|u_n - x| = \frac{|(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)|}{n} < \frac{|x_1 - x| + |x_2 - x| + \cdots + |x_N - x|}{n} + \frac{n - N}{n} \epsilon.$$

固定 ϵ 和 N , 令 $n \rightarrow \infty$ 对上式取上极限得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n - x| \leq \epsilon$. 因为 $\epsilon > 0$ 可以任意小, 所以 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n - x| = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.

证法二 因为 $\{x_n\}$ 收敛, 所以对于任意给定的正数 ϵ , 存在 N , 当 $n > m > N$ 时

$$|x_n - x_m| < \epsilon,$$

故当 $n > N$ 时

$$|n(u_{n+1} - u_n)| = \frac{|(x_{n+1} - x_1) + (x_{n+1} - x_2) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|}{n+1} \leq \frac{|x_{n+1} - x_1| + |x_{n+1} - x_2| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|}{n+1} + \frac{n - N}{n+1} \epsilon.$$

因为 $\{x_n\}$ 收敛, 从而有界. 由上式可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |n(u_{n+1} - u_n)| \leq \epsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(u_{n+1} - u_n) = 0$. 易知

$$x_{n+1} = n(u_{n+1} - u_n) + u_{n+1},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

8. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的不减函数, 但不必连续. 如果 $f(a) \geq a, f(b) \leq b$, 试证必有 $a \leq x_0 \leq b$ 存在, 使 $f(x_0) = x_0$.

证法一 考察数集 $F = \{x \mid a \leq x \leq b, f(x) \geq x\}$. 显然 $a \in F$. 令 $x_0 = \sup F$, 则 $a \leq x_0 \leq b$. 下证 $f(x_0) = x_0$.

事实上, 当 $x \in F$ 时有 $x \leq x_0$, 从而 $f(x) \leq f(x_0)$. 又因 $x \leq f(x)$, 故 $x \leq f(x_0)$, 因此 $f(x_0)$ 是 F 的一个上界, 从而 $x_0 \leq f(x_0)$. 另一方面, 从 $a \leq x_0 \leq f(x_0) \leq f(b) \leq b$ 知 $f(x_0) \leq f[f(x_0)]$, 故 $f(x_0) \in F$. 因此 $f(x_0) \leq x_0$, 于是 $f(x_0) = x_0$.

证法二 由题设易知, 把 $[a, b]$ 平分, 必有其中一半为 $[a_1, b_1]$, 使得 $f(a_1) \geq a_1, f(b_1) \leq b_1$. 把 $[a_1, b_1]$ 平分, 必有其中一半为 $[a_2, b_2]$, 使得 $f(a_2) \geq a_2, f(b_2) \leq b_2$. 如此继续下去, 可得

$[a_n, b_n] (n=1, 2, \dots)$ 适合:

(i) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n=1, 2, \dots$;

(ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$;

(iii) $f(a_n) \geq a_n$, $f(b_n) \leq b_n$, $n=1, 2, \dots$.

由(i)和(ii)知有 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $a_n \leq x_0 \leq b_n, n=1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$. 又

$$a_n \leq f(a_n) \leq f(x_0) \leq f(b_n) \leq b_n,$$

所以

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0.$$

9. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内为二次连续可微, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $\xi \in (a, b)$. 证明在 (a, b) 内可找到两个两值 x_1 和 x_2 , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证法一 不妨设 $f''(\xi) > 0$, 由 $f''(x)$ 连续性知存在 ξ 的一个邻域 $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, 在此邻域内 $f''(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在此邻域内为凹函数, 即有

$$f(x) > f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \quad x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), \quad x \neq \xi.$$

作函数

$$g(x) = f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x - \xi),$$

它在 $[\xi - \delta', \xi + \delta']$ ($\delta' < \delta$) 上连续, $g(x) \geq 0$, 且等号只当 $x = \xi$ 时成立. 记

$$M_1 = \max_{x \in [\xi - \delta', \xi]} g(x), \quad M_2 = \max_{x \in [\xi, \xi + \delta']} g(x), \quad M = \min\{M_1, M_2\}.$$

$g(x)$ 在 $[\xi, \xi + \delta']$ 和 $[\xi - \delta', \xi]$ 上均可分别取 $[0, M]$ 上的一切值, 特别地, 可以找到 $x_1 \in [\xi, \xi + \delta'], x_2 \in [\xi - \delta', \xi]$, 使

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} &= g(x_1) = f(x_1) - f(\xi) - f'(\xi)(x_1 - \xi) \\ &= g(x_2) = f(x_2) - f(\xi) - f'(\xi)(x_2 - \xi), \end{aligned}$$

所以

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证法二 不妨设 $f''(\xi) > 0$. 易知存在 ξ 的一个邻域 $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, $f(x)$ 在此邻域内为凹函数, 故有

$$\frac{f(\xi) - f(\xi - \delta)}{\delta} < f'(\xi) < \frac{f(\xi + \delta) - f(\xi)}{\delta}.$$

设 $A(\xi - \delta, f(\xi - \delta)), B(\xi, f(\xi)), C(\xi + \delta, f(\xi + \delta))$, AC, AB, BC 和点 B 的切线 BT 的斜率分别是 k_0, k_1, k_2 和 k , 易知 $k_1 < k < k_2$.

下面分三种情况:

(i) 若 $k_0 = k$, 则取 $x_1 = \xi - \delta, x_2 = \xi + \delta$ 即得证.

(ii) 若 $k_0 > k$, 则 $k_1 < k < k_0$. 记 $x_1 = \xi - \delta, k(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \xi < x < \xi + \delta$. 由于 $k(x)$ 连续, 且 $k(\xi) < k, k(\xi + \delta) > k$, 故存在 $\xi < x_2 < \xi + \delta$, 使得 $k(x_2) = k$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

(iii) 若 $k_0 < k$, 则 $k_0 < k < k_2$. 记 $x_2 = \xi + \delta, k(x) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \xi - \delta < x < \xi$. 与(ii)同理

可知存在 $\xi - \delta < x_1 < \xi$, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

在数学分析中, 我们常常研究某一个确定数集的最大(小)值或上(下)确界, 对于序列则考察它的上(下)极限. 例如, 命题 2 证法三, 命题 6 证法二, 命题 8 证法一, 命题 9 证法一等. 这是一种值得我们注意的方法.

10. 设 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为非负数, $\sum_{i=1}^n b_i = b$, 试证 $\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leq \frac{b^2}{4}$.

证明 记 $b_k = \max\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. 若 $k=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leq b_1 \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} = b_1(b - b_1) = b_1 b - b_1^2.$$

若 $k > 1$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} &= \sum_{i=1}^{k-1} b_i b_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} b_i b_{i+1} \leq b_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i + b_k \sum_{i=k}^{n-1} b_{i+1} \\ &= b_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} b_i + \sum_{i=k}^{n-1} b_{i+1} \right) = b_k(b - b_k) = b_k b - b_k^2. \end{aligned}$$

因此对于 $k \geq 1$, 均有

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leq b_k b - b_k^2 = \frac{b^2}{4} - \left(\frac{b}{2} - b_k \right)^2 \leq \frac{b^2}{4}.$$

11. 设非负序列 $\{x_n\}$ 单调不减, $\alpha > 0$, 则存在序列 $\{x_n^*\}$ 满足: $x_n^* \leq x_n$, $\left\{ \frac{x_n^*}{n^\alpha} \right\}$ 单调不增, $\{x_n^*\}$ 单调不减.

证明 令 $x_n^* = n^\alpha \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha}$, 则

$$x_n^* = n^\alpha \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha} \leq n^\alpha \frac{x_n}{n^\alpha} = x_n. \quad (1)$$

因为 $\frac{x_n^*}{n^\alpha} = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha}$, 所以 $\left\{ \frac{x_n^*}{n^\alpha} \right\}$ 单调不增. 下面证明 $\{x_n^*\}$ 单调不减, 分两种情况:

(i) 设 $p > n$, 若 $\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha} = \min_{1 \leq i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha}$, 则

$$x_n^* = n^\alpha \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha} = n^\alpha \min_{1 \leq i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha} < p^\alpha \min_{1 \leq i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha} = x_p^*.$$

(ii) 设 $p > n$, 若 $\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha} > \min_{1 \leq i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha}$, 则

$$\min_{1 \leq i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha} = \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha}, \min_{n < i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha} \right\} = \min_{n < i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha},$$

及

$$x_p^* = p^\alpha \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^\alpha} = p^\alpha \min_{n < i \leq p} \frac{x_i}{i^\alpha} = \min_{n < i \leq p} \left(\frac{p}{i} \right)^\alpha x_i. \quad (2)$$

因为当 $n < i \leq p$ 时有 $\left(\frac{p}{i} \right)^\alpha \geq 1$ 及 $x_i \geq x_n$, 所以 $\left(\frac{p}{i} \right)^\alpha x_i \geq x_n$, 从而

$$\min_{n \leq i \leq p} \left(\frac{p}{i} \right)^a x_i \geq x_n. \quad (3)$$

由(1)~(3)式知 $x_p^* \geq x_n \geq x_n^*$, 所以当 $p > n$ 时, $x_p^* \geq x_n^*$, 故 $\{x_n^*\}$ 单调不减.

12. 设非负数列 $\{x_n\}$ 单调不减, 并且

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

则存在序列 $\{x_n^*\}$ 满足 $x_n^* \leq x_n < 2x_n^*$.

证明 设 $a \geq 1, x_n^* = n^a \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^a}$, 则由命题 11, 有 $x_n^* \leq x_n$. 今证明 $x_n < 2x_n^*$. 设 $n > i$, 令 $q = \left[\frac{n}{i} \right]$, 则 $\frac{n}{i} < q+1, n < i(q+1)$. 因 x_n 不减, 所以 $x_n \leq x_{i(q+1)}$. 又由(1)式得

$$x_{i(q+1)} \leq (q+1)x_i = \left(\left[\frac{n}{i} \right] + 1 \right) x_i,$$

故
$$x_n \leq \left(\left[\frac{n}{i} \right] + 1 \right) x_i.$$

当 $x > 1$ 时, $[x] + 1 \leq x + 1 < 2x$, 所以 $x_n < 2 \cdot \frac{n}{i} x_i$. 因为 $a \geq 1$, 所以 $x_n < 2 \left(\frac{n}{i} \right)^a x_i$, 故当 $n > i$ 时有

$$\frac{x_n}{2n^a} < \frac{x_i}{i^a}, \quad x_n^* = n^a \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{i^a} > n^a \min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_n}{2n^a} = \frac{x_n}{2},$$

即 $x_n < 2x_n^*$.

13. 设 a_1, b_1, c_1 均为正数, 其和等于 1, 对于 $n=1, 2, \dots$ 定义

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n c_n, \quad b_{n+1} = b_n^2 + 2c_n a_n, \quad c_{n+1} = c_n^2 + 2a_n b_n.$$

证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n, b_n, c_n 的极限存在, 并且求出这些极限值.

证明 容易证明对任何的 $n, a_n + b_n + c_n = 1$. 定义

$$E_n = \max\{a_n, b_n, c_n\}, \quad F_n = \min\{a_n, b_n, c_n\}.$$

下面证明:

$$F_n \leq F_{n+1} \leq E_{n+1} \leq E_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_n - F_n) = 0. \quad (2)$$

为证明(1)式, 假定对某个 n 有 $a_n \geq b_n \geq c_n$. 下列三式

$$a_{n+1} = a_n^2 + b_n c_n + b_n c_n, \quad b_{n+1} = a_n c_n + b_n^2 + a_n c_n, \quad c_{n+1} = a_n b_n + a_n b_n + c_n^2$$

的每式中, 其右边部分均不大于 $a_n^2 + a_n b_n + a_n c_n = a_n$, 且又不小于 $a_n c_n + b_n c_n + c_n^2 = c_n$. 因此有 $E_{n+1} \leq E_n$ 和 $F_{n+1} \geq F_n$, (1)式得证.

为了证明(2), 仍假定对某个 n 有 $a_n \geq b_n \geq c_n$. 令 $a_n - b_n = \alpha \geq 0, b_n - c_n = \beta \geq 0, a_n - c_n = \delta = \alpha + \beta \geq 0$, 则

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = |a_n - b_n| |a_n + b_n - 2c_n| = \alpha(\delta + \beta) = (\delta - \beta)(\delta + \beta) \leq \delta^2,$$

$$|a_{n+1} - c_{n+1}| = |a_n - c_n| |a_n + c_n - 2b_n| = \delta|\alpha - \beta| \leq \delta(\alpha + \beta) = \delta^2,$$

$$|c_{n+1} - b_{n+1}| = |b_n - c_n| |2a_n - b_n - c_n| = \beta(\alpha + \delta) = (\delta - \alpha)(\delta + \alpha) \leq \delta^2.$$

这组不等式表明对所有的 n 有

$$E_{n+1} - F_{n+1} \leq (E_n - F_n)^2.$$

所以对所有的 n 成立

$$E_{n+1} - F_{n+1} \leq (E_1 - F_1)^{2^n}.$$

因为 $E_1 < 1$ 和 $F_1 > 0$, 故 $E_1 - F_1 < 1$, 从而得到(2)式.

由(1)和(2)式知, E_n 和 F_n 收敛于同一极限 A , 从而 a_n, b_n 和 c_n 也收敛于同一极限 A . 由 $a_n + b_n + c_n = 1$, 得 $A = \frac{1}{3}$.

14. 设 $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ 均为正数, 对于 $n = 1, 2, \dots$, 定义

$$a_n = \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}c_{n-1}}, \quad c_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n, b_n, c_n 的极限存在, 并且求出这些极限值.

证明 不妨设 $a \leq b \leq c$, 则 $c_1 \leq b_1 \leq a_1$. 若 $b_0 = b \leq b_1$, 则由

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}c_{n-1}} = \sqrt{\sqrt{b_{n-2}c_{n-2}} \sqrt{a_{n-2}b_{n-2}}} = \sqrt{b_{n-1}b_{n-2}}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

得

$$b_0 \leq b_2 \leq b_4,$$

$$b_0 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_1,$$

.....

$$b_0 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2n} \leq b_{2n-1} \leq \dots \leq b_3 \leq b_1. \quad (1)$$

$$\text{又} \quad \frac{b_{2n}}{b_{2n-1}} = \frac{\sqrt{b_{2n-1}b_{2n-2}}}{b_{2n-1}} = \sqrt{\frac{b_{2n-2}}{b_{2n-1}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{b_{2n-4}}{b_{2n-3}}}} = \dots = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{\frac{1}{2^{2n-2}}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

由(1)和(2)式知, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n}$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n-1}$ 均存在且相等, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在. 又

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}}} = \dots = \begin{cases} \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{\frac{1}{2^n}}, & n \text{ 为偶数} \\ \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. 同理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. 再由

$$a_n b_n c_n = \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} \sqrt{c_{n-1}a_{n-1}} \sqrt{b_{n-1}a_{n-1}} = a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1} = \dots = abc,$$

即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt[3]{abc}.$$

15. 设 $\{x_n\}$ 是有界序列, 正项序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$. 若

$$\lambda x_n + (1-\lambda) \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty$$

其中 $\lambda > 0$, 则 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$.

证明 记 $y_n = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$, 那么

(i) 若存在 n , 使 $x_n < y_n$, 则 $y_n < y_{n-1}$. 事实上, 由 $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$, 有

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n > x_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

因此

$$a_n x_n (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) < a_n (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}).$$

在上式两端加上 $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1})(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ 得

$$\begin{aligned} & (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ & < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}), \end{aligned}$$

即得 $y_n < y_{n-1}$.

(ii) 若存在 n , 使 $x_n > y_n$, 则 $y_n > y_{n-1}$. 现在证明 $\{y_n\}$ 收敛. 假设 $\{y_n\}$ 不收敛, 由 $\{x_n\}$ 有界知, 存在 δ, η 满足

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} y_n < \eta < \delta < \varlimsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

依上、下根限的定义, 有自然数 p 和 $q (q > p)$, 使 $y_p < \eta, y_q > \delta$. 如果 $x_q < y_q$, 则由 (i) 知 $y_{q-1} > y_q > \delta$, 若还有 $x_{q-1} < y_{q-1}$, 那么

$$y_{q-2} > y_{q-1} > y_q > \delta.$$

因为 $y_p < \eta < \delta$, 所以在 $p+1, p+2, \dots, q-1, q$ 中必定有某一个自然数 k , 使 $x_k < y_k$ 不成立. 设最大的一个是 m , 于是

$$\begin{aligned} x_m &\geq y_m > y_{m+1} > \dots > y_q > \delta, \\ \lambda x_m + (1-\lambda)y_m &= y_m + \lambda(x_m - y_m) \geq y_m > \delta. \end{aligned}$$

由上、下极限的性质, 满足上述条件的数对 (p, q) 有无穷多个, 所以满足上式的 m 也有无穷多个.

同理可证, 有无穷多个 k 满足 $\lambda x_k + (1-\lambda)y_k < \eta$, 故 $\{\lambda x_n + (1-\lambda)y_n\}$ 的极限不存在. 这与题设矛盾, 所以 $\{y_n\}$ 收敛. 又因 $\{\lambda x_n + (1-\lambda)y_n\}$ 收敛, 所以 $\{x_n\}$ 也收敛, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

16. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lambda(a_{n+1} - a_n) + (1-\lambda)\frac{a_n}{n} \right] = l$, 其中 $\lambda > 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

证明 设 $b_n = \frac{a_n}{n}, c_n = \lambda(a_{n+1} - a_n) + (1-\lambda)\frac{a_n}{n}$, 于是

$$a_n = nb_n, \quad c_n = \lambda[(n+1)b_{n+1} - nb_n] + (1-\lambda)b_n,$$

整理后得

$$\lambda(n+1)(b_{n+1} - b_n) = c_n - b_n. \quad (1)$$

上式两端取绝对值, 得

$$\lambda(n+1)|b_{n+1} - b_n| = |c_n - b_n|.$$

取正整数 n_0 使得 $n_0\lambda > 1$, 那么

$$|b_{n+1} - b_n| \leq |c_n - b_n|, \quad n \geq n_0. \quad (2)$$

因 $c_n \rightarrow l (n \rightarrow \infty)$, 故对于任给的函数 ε , 存在正整数 $N > n_0$, 使得 $n \geq N$ 时 $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. 由 (1) 式知, c_n 与 b_{n+1} 在数轴上位于 b_n 的同侧, 结合 (2) 式便知 b_{n+1} 位于 b_n 与 c_n 之间. 因此若 $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$, 则 b_{n+1} 位于 $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ 中, 因 $n \geq N$ 时 c_n 都位于 $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ 中, 故 $n \geq N$ 时 b_n 也位于 $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ 中, 即

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

但如果 $b_N \geq l + \varepsilon$, 则 $b_N \geq b_{N+1} \geq c_N$ (等号不同时成立). 由于 $n \geq N$ 时, b_{n+1} 位于 b_n 和 c_n 之间, 因此这时必有且只有两种情况:

(i) $b_N \geq b_{N+1} \geq \dots \geq b_{N+m} \geq \dots \geq l + \varepsilon$;

(ii) 存在某个大于 N 的正整数 k 使得 $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon, \quad n \geq k$.

易知 (i) 不可能成立, 否则 b_n 也存在极限 b , 且 $b > l$, 这时,

$$a_{n+1} - a_n \rightarrow \frac{1}{\lambda} [l - (1-\lambda)b] \neq b, \quad n \rightarrow \infty.$$

但由施笃兹定理知

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{\lambda} [l - (1-\lambda)b],$$

矛盾. 因此当 $b_N \geq l + \varepsilon$ 时, (ii) 必成立. 同理当 $b_N \leq l - \varepsilon$ 时, 也存在正整数 $M > N$, 使得

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon, \quad n \geq M.$$

综合上述讨论知, 对于所给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 M , 使得 $n \geq M$ 时恒有 $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$. 因此, $b_n \rightarrow l (n \rightarrow \infty)$, 同时得出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (1-\lambda)b_n = \lambda l.$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = l.$$

17. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调有界, 则对于任意的 $x_0 \in (a, b)$, 必存在 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

证明 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增 (递减的情形类似可证). 由假设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界, 所以 $\mu = \sup\{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$ 存在. 依上确界的定义, 对于任意的 $x \in (a, x_0)$, 都有 $f(x) \leq \mu$, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_1 \in (a, x_0)$, 使 $\mu - \varepsilon < f(x_1)$, 因 $f(x)$ 单调递增, 所以当 $x_1 < x < x_0$ 时,

$$\mu - \varepsilon < f(x) \leq \mu < \mu + \varepsilon.$$

取 $\delta = x_0 - x_1$, 于是当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - \mu| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \mu$. 类似可以证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0, b)\}.$$

18. 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 求证: 存在一个函数 ψ 在 $(0, \infty)$ 上具有下述性质:

- (i) ψ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $t \geq b - a$ 时, $\psi(t) = \text{常数}$;
- (ii) 对任意的 $x', x'' \in [a, b]$, 有 $|f(x') - f(x'')| \leq \psi(|x' - x''|)$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = 0$.

证明 (i) 由于 f 在 $[a, b]$ 上连续, 所以有 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M (a \leq x \leq b)$, 那么对于 $[a, b]$ 中任何两点 x_1, x_2 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)| \leq 2M.$$

因此对任意的 $t > 0$, 数集

$$E(t) = \{\rho \mid \rho = |f(x_1) - f(x_2)|, x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq t\}$$

有界. 定义 $\psi(t) = \sup\{E(t)\}$, $0 < t < +\infty$, 显然 $\psi(t) \geq 0$. 任取 $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$, $t_1 < t_2$, 由 $\psi(t)$ 的定义可知 $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$, 所以 $\psi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 $t \geq b - a$ 时,

$$\begin{aligned} \{\rho \mid \rho = |f(x_1) - f(x_2)|, x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq t\} \\ = \{\rho \mid \rho = |f(x_1) - f(x_2)|, x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| \leq b - a\}, \end{aligned}$$

所以当 $t \geq b - a$ 时, $\psi(t) = \psi(b - a)$.

(ii) 任取 $x', x'' \in [a, b]$, 由于