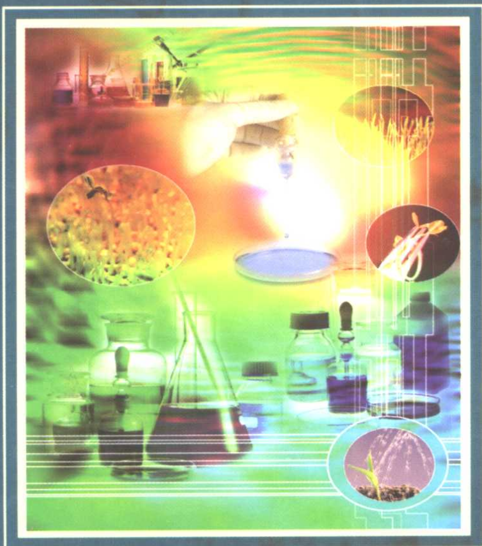
21世纪高等教育标准教材

经济数学基础系列

概率论与数理统计

主编　齐治平



东北财经大学出版社
Dongbei University of Finance & Economics Press

21世纪高等教育标准教材
经济数学基础系列

概率论与数理统计

主　编　齐治平
副主编　佟孟华　郑永冰

DUFEP
东北财经大学出版社
大　连

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 齐治平主编 .— 大连 ：东北财经大学出版社，2003.2
21 世纪高等教育标准教材·经济数学基础系列
ISBN 7-81084-231-5

Ⅰ. 概… Ⅱ. 齐… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 109493 号

东北财经大学出版社出版
（大连市黑石礁尖山街 217 号 邮政编码 116025）
总 编 室：（0411）4710523
营 销 部：（0411）4710711
网 址：http: //www.dufep.com.cn
读者信箱：dufep @ mail.dlptt.ln.cn
大连业发印刷有限公司印刷 东北财经大学出版社发行

幅面尺寸：148mm × 210mm 字数：308 千字 印张：10 7/8
印数：1—7 000 册

2003 年 2 月第 1 版 2003 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑：谭焕忠 责任校对：孙 平
封面设计：钟福建 版式设计：孙 萍

定价：20.00 元

21世纪高等教育标准教材

总序

我国高等教育改革经过几年的努力，已经取得了阶段性进展，一个新型的高等教育体制的轮廓、雏形展现在我们面前。主要表现在：(1) 改革不适应社会主义市场经济体制走向的教育管理体制，改革了过去高等教育管理体制条块分割、单科性学校较多的格局。除少数几个部委继续管少数院校外，国务院的四十多个部委已不再管理学校。(2) 为体现优势互补、强强联合的精神，改善科类过于单一的现象，一些院校合并到综合大学，包括财经类的金融和财政类比较近类的学校也做了合并；1998 年教育部颁布实施了新的《普通高等学校本科专业目录》，专业做了很大调整，数量有所减少。(3) 1999 年党中央、国务院召开全国教育工作会议。会议动员全党全国人民以提高民族和创新能力为重点，全面推进素质教育，将推进素质教育提高到政府行为的高度。教育部在制定“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系计划”时，也提出了加强素质教育的思想内容。

教育管理体制改革打破了原来高等教育教材编写体制和教材出版发行市场体制；学校合并和专业调整使高等教育课程设置和课程体系发生变化，教材会出现过剩和短缺并存的现象，结构必须调整；培养目标模式的转变，要求高等教育教材内容体系不但要重视知识的传授，而且要重视能力的培养和素质的提高。

为了适应高等教育改革的需要，我们组织编写了“21 世纪高等教育标准教材”。本系列教材注意吸收国内外学和科研的最新研究成果，充分体现科学性、思想性、先进性和稳定性，并努力在教材内容和体系上有 所创新，力求较原有同类教材有较大的提高。

我们期望，本丛书的出版能对我国高等教育质量的提高，为培养更多更好适应社会经济发展和社会主义市场经济新形势人才做出一定的贡献。

21 世纪高等教育标准教材

编写组

2002 年 12 月

前言

在现实世界中，有一类现象就其个别来看是偶然的、无规则的，但是通过大量的试验或观察以后，就其整体来看却呈现出一种严格的、必然的规律性。这类现象称为随机现象。概率论就是从数量的角度来研究随机现象，并从中获得这些随机现象所服从的规律。概率论是在 17 世纪产生的。被誉为“法国的牛顿”的著名数学家、天文学家拉普拉斯曾说过：“我们发现，概率论实质上仅仅是被归纳为解决计算问题的常识，它使我们能正确地评价某种凭直觉感受到的却往往又不能解释清楚的事物的合理性……起源于凭运气而取胜的游戏而产生的这门学科，竟成为人类知识中最重要的内容，这实在是值得注意的。”这位对概率论发展曾做出过巨大贡献的科学家的说法也许有些过头，但是，现在概率论确实成为几乎所有科学技术人员手中的一个基本工具。

数理统计学是以概率论为理论基础的一个数学分支，是伴随着概率论的发展而发展起来的。它主要研究如何安排试验或抽样能更有效地进行统计分析；如何根据观察或试验所得的数据，来找出描写随机现象的某些数量指标的概率分布及分布的数值特征；检验一些指标间有无显著差异，以及找出各种指标间的相互关系等。

虽然概率论与数理统计是两个并列的数学分支学科，但它们之间有着密切的关系。在很大程度上可以认为，概率论是数理统计的基础，而数理统计是概率论的一种应用。

最近几十年，随着科学技术的迅速发展，概率论与数理统计在国民经济、工农业生产、气象、水文、地质、自动控制与通讯、生物与医药卫生等方面都有广泛的应用。概率论和数理统计与其他学科相结合产生了不少边缘学科，如生物统计、统计物理和计量经济等。概率论和数理统计又是许多重要学科的基础，如信息论、控制论、可靠性理论和精算学等。

由于概率论与数理统计在科学技术领域和生产实践中的重要作用而使其日益受到人们的重视。目前，它已成为高等财经院校许多专业必修的一门基础课。通过本课程的学习，以使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们分析问题和解决实际问题的能力。本书是根据教育部颁发的高等学校财经类专业《概率论与数理统计教学大纲》编写的。在编写过程中，参考了许多大学本科同类教材，吸取和借鉴了其中的先进经验。作为一本数学教材，本书作者十分注意知识的准确性与体系的严密性，同时在选材与写作上又突出了通俗性和直观性，使读者容易入门。

本书由两部分组成：第一部分（第一章至第五章）为概率论，包括概率论的基本概念，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理；第二部分（第六章至第十章）为数理统计，包括数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析。此外，作者精心选择和编排了大量例题和习题，这些题目不仅可以加深读者对基本概念和方法的理解，而且也反映出本门学科在各方面的广泛应用。

本书由齐治平任主编，佟孟华、郑永冰任副主编。郑永冰编写第一、二、三章，佟孟华编写第四、五、六章，齐治平编写第七、八、九、十章。全书由齐治平负责总纂。

在本书的编写过程中，得到了许多同行专家的支持和帮助。龚兆仁教授、王雪标教授仔细地审阅了书稿，提出了许多宝贵的意见和建议。东北财经大学出版社为本书的编辑和出版付出大量辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于编者水平所限，书中一定有不少缺点和疏漏，恳请读者批评、指正。

齐治平

2003 年 1 月

目录

第一章 随机事件与概率 1
§1.1 随机事件和样本空间 1
§1.2 概率的统计定义 8
§1.3 古典概型 10
§1.4 几何概型 14
§1.5 概率的公理化定义 17
§1.6 概率的性质 17
§1.7 条件概率与独立性 20
§1.8 全概率公式与贝叶斯公式 26
§1.9 伯努利概型 31
习题一 32
第二章 随机变量及其概率分布 38
§2.1 随机变量 38
§2.2 离散型随机变量 39
§2.3 随机变量的分布函数 47

§2.4 连续型随机变量 50
§2.5 随机变量函数的分布 61
习题二 66
第三章 随机向量 73
§3.1 二维随机向量 73
§3.2 边缘分布 80
§3.3 条件分布与随机变量的独立性 85
§3.4 随机向量函数的分布 92
§3.5 n 维随机向量 99
习题三 101
第四章 随机变量的数字特征 106
§4.1 数学期望 106
§4.2 方差、标准差 118
§4.3 切比雪夫不等式 126
§4.4 协方差和相关系数 129
§4.5 矩、协方差矩阵 136
§4.6 条件数学期望 139
习题四 143
第五章 大数定律和中心极限定理 148
§5.1 大数定律 148
§5.2 中心极限定理 151
习题五 156
第六章 数理统计的基本概念 159
§6.1 总体与样本、统计量 160
§6.2 抽样分布 169
习题六 185
第七章 参数估计 190
§7.1 参数的点估计 190
§7.2 估计量好坏的标准 197
§7.3 参数的区间估计 201

§7.4　正态总体参数的区间估计　204
§7.5　两点分布参数 p 的区间估计　209
习题七　210
第八章　假设检验　214
§8.1　假设检验的概念和基本思想　214
§8.2　单个正态总体参数的假设检验　219
§8.3　两个正态总体参数的假设检验　222
§8.4　分布拟合检验　227
习题八　234
第九章　方差分析　239
§9.1　单因素试验的方差分析　239
§9.2　双因素试验的方差分析　247
习题九　254
第十章　回归分析　258
§10.1　一元线性回归　258
§10.2　一元非线性回归　278
§10.3　多元线性回归　283
习题十　291
附表　常用统计数值表　295
附表1　二项分布表　295
附表2　泊松分布表　300
附表3　正态分布表　304
附表4　t 分布表　306
附表5　χ^2 分布表　307
附表6　F 分布表　309
附表7　检验相关系数临界值表　318
习题参考答案　319

第一章

随机事件与概率

§1.1　随机事件和样本空间

一、随机试验与随机事件

在日常生活中,人们常常用到"可能性"这个词.比如,买一张彩票恰中头奖,可能性有多大?一个跳伞运动员作定点跳伞表演,恰好落在预定区域的可能性又有多大?现在,我们就用数学工具来讨论有关"可能性"的问题.

上面的两个例子有一个共同的特点,即"恰中头奖"、"落在预定区域"这些事件是可能发生也可能不发生的事件,事先是无法确定的.而这些事件又都是在某种观察或试验下的可能的结果,是以观察或试验为背景的.我们把这类观察或试验称为随机试验.

定义 1.1　将满足下列条件的试验称为随机试验:

(1)试验可以在相同条件下重复进行;

(2)试验的可能结果不止一个,而且所有的可能结果是明确可知的;

(3)每次试验总是出现这些可能结果中的一个,但在一次试验前无法肯定会出现哪一个结果.

随机试验简称试验,常用字母 $E,E_1,E_2,\cdots$表示.

定义 1.2　在一次随机试验中可能发生也可能不发生的结果称为随机事件,简称事件.事件常用字母 $A,B,C,\cdots$表示.

按照这个定义,前面所说的"恰中头奖"、"落在预定区域"都是随机事件.

在一次试验中必定发生的事件称为必然事件，记为 Ω，比如“掷一颗骰子，出现的点数小于 7”.

在一次试验中不可能发生的事件称为不可能事件，记为 Φ，比如“掷一颗骰子，出现的点数大于 7”.

我们把必然事件和不可能事件看做是随机事件中的两种特殊情形.

二、样本空间

对于随机试验，我们感兴趣的首先是它的可能出现的结果.

定义 1.3 随机试验的每个最基本、最简单的事件称为基本事件，或称为样本点，常用字母 ω 表示.

每次试验有且仅有一个基本事件发生.

定义 1.4 基本事件全体的集合称为样本空间或基本事件空间，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$.

[**例 1.1**] 掷一枚硬币，可能出现正面朝上，也可能出现反面朝上.每掷一次，出现正面或反面是随机的，把出现正面或出现反面作为基本事件，并分别记为 ω_0 和 ω_1，则样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1\}$，它包含两个基本事件.

[**例 1.2**] 先后掷两次硬币，观察所得结果，记

$\omega_{00}=$“第一次出现正面，第二次出现正面”；

$\omega_{01}=$“第一次出现正面，第二次出现反面”；

$\omega_{10}=$“第一次出现反面，第二次出现正面”；

$\omega_{11}=$“第一次出现反面，第二次出现反面”.

则样本空间 $\Omega=\{\omega_{00},\omega_{01},\omega_{10},\omega_{11}\}$.若取

$\omega_0=$“两次都出现正面”；

$\omega_1=$“恰有一次出现正面”；

$\omega_2=$“两次都出现反面”.

则样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

这个例子说明，选取什么结果作为基本事件并没有明确的限制.

［例 1.3］ 从一副扑克牌(52 张)中任选一张,如果认为每张牌都是不同的,那么样本空间含 52 个基本事件,可记为 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_{52}\}$;如果我们仅关心取出什么样的花色,那么样本空间就由 4 个基本事件组成,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$,其中 $\omega_1=$"红心",$\omega_2=$"黑桃",$\omega_3=$"梅花",$\omega_4=$"方块".

［例 1.4］ 记录某电话交换台从早 8 点到晚 8 点接到的呼唤次数.每天这段时间接到多少次呼唤是不能预先知道的.虽然在现实中接到的呼唤次数总是有限的,但是为了处理问题的方便,可以认为呼唤次数不受限制.把每种可能的呼唤次数作为一个基本事件,则样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$就是一个无穷集合,它的元素可以按自然数顺序排列起来,称为可列的无穷集合.

［例 1.5］ 观察大连市 7 月份的最高气温.每年 7 月最高气温是多少预先无法确定,但经验告诉我们,这一最高气温必定介于 25℃ ~ 37℃之间.于是样本空间为 $\Omega=[25,37]$,这是一个不可列的无穷集合.

从以上例子可以看到,样本空间有两大类型:一类是可列的(有穷或无穷),称为离散样本空间;一类是不可列的,称为非离散样本空间.

现在,我们可以回过头来,用基本事件的概念来解释随机事件.

首先,每个基本事件都是一个事件,比如例 1.2 中的 ω_{00},ω_{01}等;其次,事件总是由若干个基本事件构成的,某事件是否发生,取决于构成这个事件的基本事件之一是否出现.比如在例 1.2 中,把"第一次出现正面"记作事件 A,则 $A=\{\omega_{00},\omega_{01}\}$,即若出现基本事件 ω_{00}或 ω_{01},事件 A 就发生.这时,称这种基本事件为对事件 A 有利的基本事件.当然,A 发生就意味着对 A 有利的某个基本事件出现.一般地,随机事件可看成是样本空间的一个子集,即

$$A=\{\omega:\omega\text{ 为对 }A\text{ 有利的基本事件}\}$$

三、事件的关系和运算

前面既然已经利用集合来定义了样本空间和事件,那么容易理解,集合论是讨论试验与事件的合适的数学工具.以下讨论均在一个样本

空间 Ω 中进行.

(1)事件的包含和相等

定义 1.5 设 A,B 为事件,如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,就称事件 B 包含事件 A,或称事件 A 包含于事件 B,记为 $B\supset A$,或 $A\subset B$.

例如,掷两枚硬币,记 A =“恰有一枚正面朝上”,B =“至少有一枚正面朝上”,则有 $A\subset B$.

容易知道,$A\subset B$ 的含义是:对 A 有利的基本事件也是对 B 有利的基本事件,如图 1.1(a).

若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

(2)事件的和(并)与积(交)

定义 1.6 设 A,B 为两个事件,称事件“A 与 B 中至少有一个发生”为 A 与 B 的和(或并),记为 $A\cup B$.事件 $A\cup B$ 表示或属于 A 或属于 B 的样本点的全体.

当用集合来表示时,代表和事件的集合正是集合 A 与集合 B 的并集,如图 1.1(b).

有限个事件的和 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,含义是:“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”的事件.

定义 1.7 设 A,B 为两个事件,称“A 与 B 都发生”的事件为 A 与 B 的积(或交),记为 $A\cap B$ 或 AB.事件 AB 表示同时属于 A 及 B 的样本点的全体.

当用集合来表示时,代表积事件的集合正是集合 A 与集合 B 的交集,如图 1.1(c).

称“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生”的事件为这 n 个事件的积,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,或记为 $A_1\cdots A_n$.

比如,在例 1.2 中,记 A =“第一次出现正面”,B =“第二次出现正面”,C =“恰有一次出现正面”,D =“至少有一次出现正面”.则

$A=\{\omega_{00}\}\cup\{\omega_{01}\}$

$B=\{\omega_{00}\}\cup\{\omega_{10}\}$

$C=\{\omega_{01}\}\cup\{\omega_{10}\}$

$D=\{\omega_{00}\}\cup C$ 或 $D=A\cup B$

$AB=\{\omega_{00}\}$

显然,对任意事件 A 和事件 B,总有

$AB\subset A\subset A\cup B$

$AB\subset B\subset A\cup B$

(3)事件的差

定义 1.8 设 A,B 是两个事件,则称"A 发生而 B 不发生"的事件为 A 与 B 的差,记为 $A-B$.$A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点构成的,所以,代表差事件的集合正是集合 A 与集合 B 的差集,如图 1.1 (d),(e).

(4)事件的互不相容

定义 1.9 若事件 A 与事件 B 不可能同时发生,即 $AB=\Phi$,则称 A 与 B 互不相容,如图 1.1(f).例如,在例 1.2 中,ω_{00} 与 ω_{11} 就是互不相容的.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两事件都互不相容,即 $A_i\cap A_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$,就称这 n 个事件互不相容.

(5)事件的对立

定义 1.10 设 A 是一个事件,称"A 不发生"的事件为 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$,如图 1.1(g).显然,A 与 $\overline{A}$ 互不相容,且它们之中必有一个事件出现,即

$A\cup\overline{A}=\Omega, A\cap\overline{A}=\Phi$

此时,A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件.

用集合来表示时,对立事件体现为集合的互补.

(6)互不相容完备事件组

定义 1.11 如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足条件:

ⅰ)$A_i\cap A_j=\Phi, i\neq j \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$

ⅱ)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

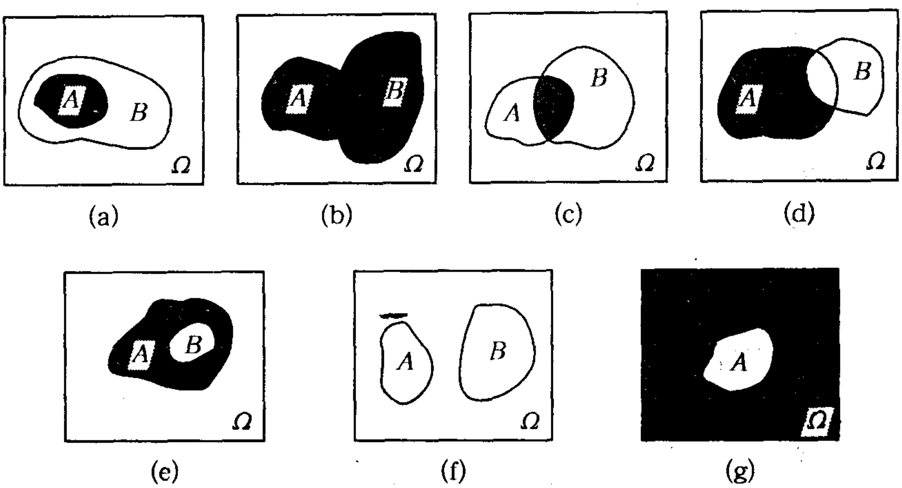


图 1.1

则称这 n 个事件构成一个互不相容完备事件组，或者称为对 Ω 的一个分割.

如例 1.2 中的 $\{\omega_{00},\omega_{01},\omega_{10},\omega_{11}\}$ 就是互不相容完备事件组.

根据对立事件的定义可知，两个对立事件恰好构成一个互不相容完备事件组.

[例 1.6] 设 A,B,C 是 Ω 中的事件.则：

事件“A 与 B 发生，而 C 不发生”可以表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB-C$；

事件“A 发生，而 B 和 C 都不发生”可以表示为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A(\overline{B\cup C})$；

事件“A,B,C 中至少有两个发生”可以表示为 $AB\cup AC\cup BC$；

事件“A,B,C 中不多于两个发生”可以表示为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

事件“A,B,C 中恰好有两个发生”可以表示为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

[例 1.7] 在经济系学生中任选一名学生，A 表示被选学生是男生，B 表示选到的是二年级学生，C 表示选到的是校合唱队队员.