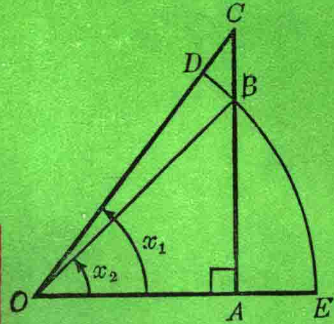
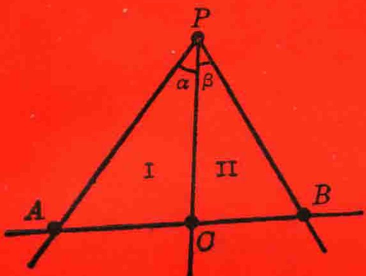




面积关系
帮你解题

ANJI GUANXI
NGNI JIETI

上海教育出版社

中学生文库

面积关系帮你解题

张景中

上海教育出版社

中学生文库　**面积关系帮你解题**

张景中　上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

江苏溧阳印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/32 印张 3.75 字数 77,000

1982 年 12 月第 1 版　1986 年 8 月第 4 次印刷

印数87,601—127,600本

统一书号：7150·2813　定价：0.46元

内容提要

本书利用面积公式揭示平面图形数量关系的特点，系统地介绍了用面积关系来证明平面图形中的相等、不等、成比例、共点线、共线点等初等几何性质，以及用面积关系作几何图形等问题。书中介绍的证明方法比较简便，有的较为巧妙，颇有启发性，对开扩学生解题思路有一定的帮助。本书在这基础上还初步介绍了带号面积和面积坐标知识，将面积与解析几何联系起来，以适当地扩展学生的数学知识。

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

一、一个古老而年轻的方法

利用面积关系来说明数学中的某些恒等式、不等式，或证明某些定理，这是一个古老而又年轻的方法.

说它古老，是因为：早在三千多年前，在几何学还没有形成一门系统的学科时，人们已经会用这种方法来解决某些问题了.

说它年轻，是因为：直到今天，人们并没有给它足够的重视，因而，这种方法的潜力远没有得到发挥. 它广泛的、五花八门的用途，很少在教科书、教学参考书和各种学生读物中得到较系统的阐述.

几何学的产生，源于人们对土地面积的测量的需要. 翻开任何一本关于数学史的通俗读物，差不多都记载着这样的故事：在古埃及，尼罗河每年泛滥一次. 洪水给两岸的田地带来了肥沃的淤积泥土，但也抹掉了田地之间的界线标志. 洪水退后，人们要重新划出田地的界线，这就必须丈量和计算田地的面积. 年复一年，就积累了最基本的几何知识.

这样看来，从一开始，几何学便与面积结下不解之缘. 英语中的“几何”——“*Geometry*”，这个字的字头“*geo-*”，便含有“土地”的意思.

但是，用面积关系来证明几何定理，最早的例子是勾股定理的证法. 所谓勾股定理，就是：

在直角三角形中，两直角边的平方之和等于斜边的平方.

我国古代数学家把直角三角形的较短的直角边叫"勾"，较长的直角边叫"股"，而把斜边叫做"弦". 因而把这个定理叙述为"勾方加股方等于弦方"，勾股定理由此而得名.

勾股定理的下述精采证明，是我国古代数学家智慧的结晶.

勾股定理证法之一：

如图，四个同样大小的直角三角形的斜边围成一个正方形；它们的直角边围成了一个更大的正方形.（为什么？请读者自证.）

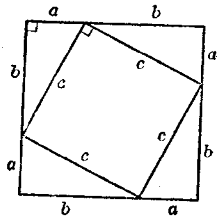


图 1

设直角三角形两直角边分别为a、b，斜边为c. 图中大正方形面积

$$S_{大}=(a+b)^2,$$

小正方形面积

$$S_{小}=c^2,$$

直角三角形面积$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab$. 显然有

$$S_{大}=S_{小}+4S_{\Delta},$$

也就是

$$(a+b)^2=c^2+2ab,$$

把等式的左边展开，两边消去$2ab$，便得勾股定理

$$a^2+b^2=c^2. \qquad \square[1]$$

到目前，勾股定理常见的证明方法，已有数十种了，但其中最简单的证法，仍然是利用面积关系.

勾股定理证法之二：

---

[1] □记号表示证毕的意思.

作直角$\triangle ABC$斜边AB上的高CD,得到三个相似三角形,即

$$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD.$$

(为什么?请读者自证.)

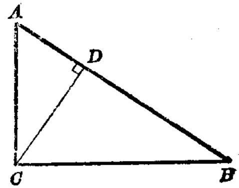


图 2

根据相似三角形的面积与对应边的平方成正比的定理,可得

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ACD}:S_{\triangle CBD}=AB^2:AC^2:BC^2.$$

也就是

$$S_{\triangle ABC}=kAB^2,\quad S_{\triangle ACD}=kAC^2,\quad S_{\triangle CBD}=kBC^2;$$

这里k为正数. 但是

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD},$$

因而

$$kAB^2=kAC^2+kBC^2,$$

也就是 $$AB^2=AC^2+BC^2.$$ □

用面积关系说明一些基本的恒等式或不等式,也是早就被许多教科书所采用的方法. 例如,从图 3 一眼便可看出恒等式[1]

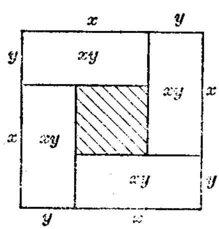


图 3

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy,$$

由于$(x-y)^2\geqslant 0$,从而得到不等式

$$(x+y)^2\geqslant 4xy,$$

或者化简一下,得

$$x^2+y^2\geqslant 2xy.$$

当且仅当$x=y$时等号才成立.

生理学家和医学家们的研究发现:我们大脑的两个半球,左半球主要管抽象的东西——语言,逻辑,数字……,右半球

[1] 请注意:阴影部分的面积是$(x-y)^2$.

主要管具体的东西——形象，图画，音乐…….把抽象的代数关系用具体的图形表示出来，便动员了两个半球同时工作，印象深、理解快、记得牢.用图形表示代数关系的重要方法之一，便是用面积关系来联系的.

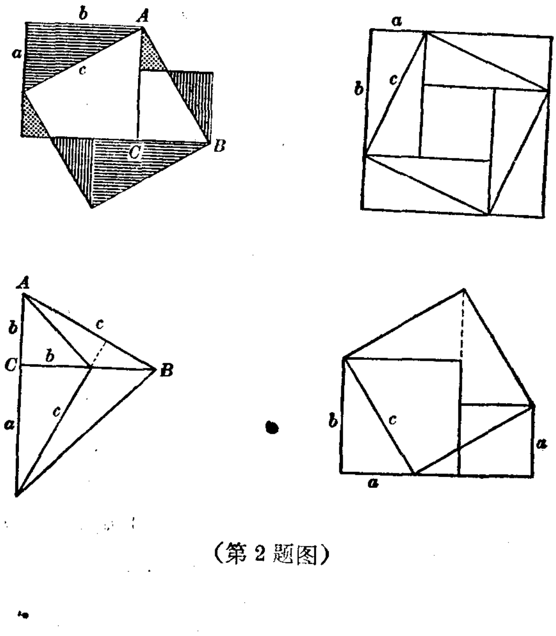
这本小册子的目的，是试图较为系统地阐述用面积关系证明几何命题的基本技巧和方法.

练 习 题 一

1. 用面积关系表示下列恒等式:

   (1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;　　(2) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$.

2. 利用下列图形，给出勾股定理的几种证法.



(第 2 题图)

3. 用面积关系表示阿贝尔恒等式:

$$
\begin{aligned}
&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\
=&a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+\cdots\\
&+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(b_{n-1}-b_n)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n.
\end{aligned}
$$

二、同一个面积的多种表示

上面介绍的勾股定理的古老证法一虽然简单，但它已体现了用面积关系证题的基本思想：用不同的方法计算同一块面积，从而得到一个等式——这样的等式我们把它叫做“面积方程”；再对这个“面积方程”进行整理或变换，以获得我们所要的结果.

为了能够列出各种各样的面积方程，就要熟悉面积的计算方法．平面几何中许多图形，都可以分割成若干个三角形．于是，我们应当熟悉三角形面积的各种表示法．

按习惯，用 a、b、c 分别表示$\triangle ABC$ 的三个角 A、B、C 所对的边，h_a、h_b、h_c顺次表示为 a、b、c 三边上的高．我们最熟悉的三角形面积公式是

$$\text{三角形面积}=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高},$$

以后，为方便起见，我们同时用记号“$\triangle ABC$”表示三角形 ABC 本身和它的面积．这样做，记号的意义可由上下文看出，并不至于混淆．上述公式便可清楚地记作

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c. \qquad (\text{I})$$

对公式(Ⅰ)略加改变，利用关系式

$$h_a=b\sin C$$

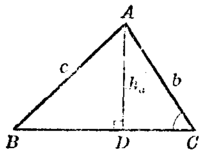


图 4

等代入，便得到了与角、边都有联系的公式

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C. \qquad \text{(II)}$$

这个公式，往往不被人们重视．其实，它的用处很大．因为它把平面几何中三种最重要的度量——长度、角度、面积——紧密地联系在一起了．下面，我们很快可以看到公式(II)的重要性．

还有一个大家所熟知的海伦公式，即已知三角形三边求面积的公式

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\text{❶} \qquad \text{(III)}$$

我们利用勾股定理可从(Ⅰ)导出这个公式．事实上，在图4中令 $BD=x$，那末 $DC=a-x$．由勾股定理列出方程

$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2,$$

展开后解得

$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

$$\therefore\quad h_a^2=c^2-x^2=\frac{1}{4a^2}[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]$$

$$=\frac{1}{4a^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$

❶ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$表示$\triangle ABC$的周长的一半．

$$=\frac{1}{4a^2}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$$

$$=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c).$$

由此即得公式(III). □

三角形的面积公式远远不只以上三个，还可以导出已知三条高、或三条中线、或三条角平分线、或两角一边、或一边及另两边上的高、或一角一对边及这边上的中线等等求面积的公式. 这样的公式至少也有几十种. 但是，在应用面积关系解题时，有了这三个，也就足够用了. 其它多种多样的三角形面积公式，都可以直接或间接地由这三个基本公式导出. 请看以下的两个例子:

［例 1］ 已知$\triangle ABC$两边b、c上的高为h_b、h_c，及另一边a，求它的面积.

解 利用面积公式(Ⅰ)，得到

$$b=\frac{2\triangle}{h_b},\qquad c=\frac{2\triangle}{h_c},$$

这里简记$\triangle ABC$为$\triangle$，代入海伦公式，得

$$\triangle=\frac{1}{4}\left[a+\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2\triangle\right]^{\frac{1}{2}}\left[-a+\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2\triangle\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[a+\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)2\triangle\right]^{\frac{1}{2}}\left[a-\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)2\triangle\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\therefore\ 16\triangle^2=\left[\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2 4\triangle^2-a^2\right]\left[a^2-\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)^2 4\triangle^2\right].$$

展开后得方程

$$16\left(\frac{1}{h_b^2}-\frac{1}{h_c^2}\right)^2\triangle^4-8\left[a^2\left(\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)-2\right]\triangle^2+a^4=0.$$

解这个方程,它的唯一的正实数根即为$\triangle ABC$的面积. 以下从略. □

[例 2] 已知$\triangle ABC$的三条中线为m_a、m_b、m_c,求它的面积.

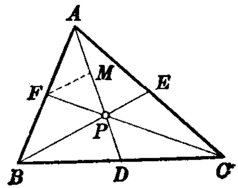


图 5

解 如图5所示,设三条中线AD、BE、CF交于P点,由于

$$AP=\frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore\quad \triangle APF=\frac{1}{2}\triangle ABP=\frac{1}{6}\triangle ABC.$$

取AP的中点M,那末

$$MP=\frac{1}{3}m_a,\quad PF=\frac{1}{3}m_c,\quad FM=\frac{1}{3}m_b.$$

而

$$\triangle MPF=\frac{1}{2}\triangle APF=\frac{1}{12}\triangle ABC.$$

于是由海伦公式可得

$$\frac{1}{12}\triangle ABC=\triangle MPF=\frac{1}{9}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

$$\left(m=\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)\right).$$

$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}.\quad □$$

在上面的解法中，用到了中线的性质．这些性质也可以独立地由面积关系导出．请读者参看第九节的例 1.

练习题二

1．已知$\triangle ABC$的三条高为h_a、h_b、h_c，求它的面积和三边.

2．已知$\triangle ABC$的周长和内切圆的半径，求它的面积.

3．已知$\triangle ABC$的a边及B、C两角，求它的面积.

三、一个公式表示多种面积

前面说过，面积公式(II)

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

用途最广，因为它把长度、角度和面积三种度量联系在一起了．另外，它还有一个有趣的特点——“一身而兼多任”，可以表示好几种图形的面积．

本来，在公式

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$$

中，a、b 表示$\triangle ABC$ 中角 C 的两夹边．但我们稍一留心，便可发现，完全能够给 a、b、C 以更广义的解释．

把这广义的解释写成

[命题 1]　在$\triangle ABC$ 中，设 $BC=a$，在直线 BC 上任取一点 P，设 $AP=b^*$[1]，AP 与 BC 所成的角(锐角或钝角任取其一)为 C^*，那末有

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.$$

证明　如果点 P 与 B、C 之一重合，所要证的就是前面的公式(II)．如果不重合，不外有以下三种情形：

---

[1] 我们把 AP 叫做 $\triangle ABC$ 在 BC 边上的斜高．

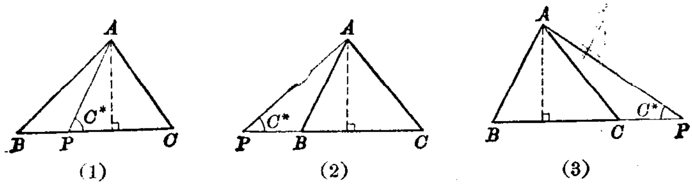


图 6

如图 6(1)的情形，直接用公式(II)，有

$$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC=\frac{1}{2}AP\cdot BP\sin C^*$$

$$+\frac{1}{2}AP\cdot CP\sin C^*$$

$$=\frac{1}{2}AP\cdot(BP+CP)\sin C^*$$

$$=\frac{1}{2}AP\cdot BC\sin C^*$$

$$=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.$$

如图 6(2)的情形，可以由

$$\triangle ABC=\triangle APC-\triangle APB.$$

以下作类似推导可以证得

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.$$

如图 6(3)的情形也可类似地证明，这里从略. □

显然，注意到图中虚线所表示的高，也可以由正弦的定义及公式(Ⅰ)推证这个命题.

命题 1 通常也称为斜高公式.

进一步考虑：如果 P 点不在直线 BC 上，那末又有什么结论呢？