

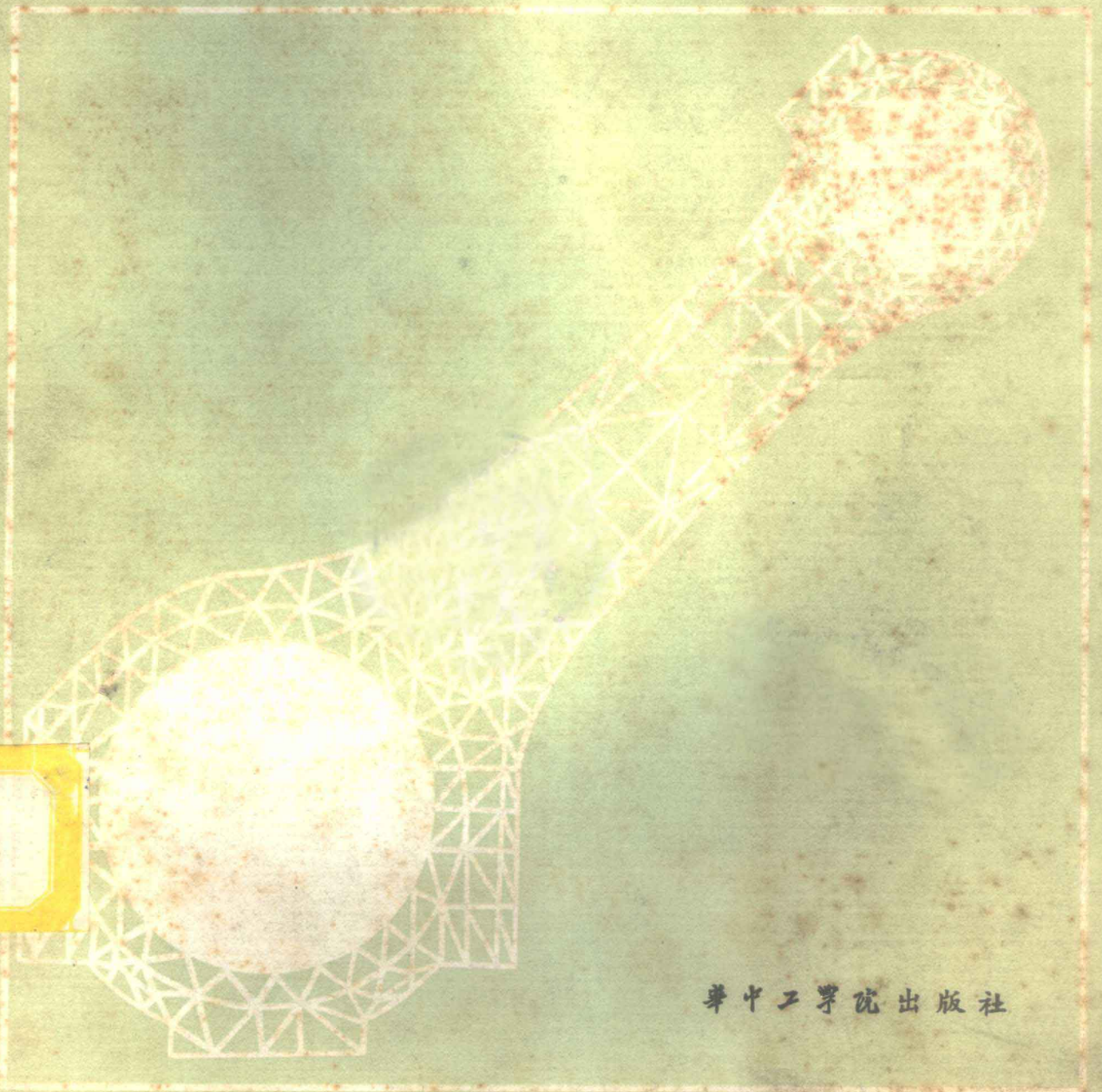
779463

585

7564

陈国华 编著

有限元法 在内燃机工程中的应用



华中工学院出版社

5
64

773453

有限元法在内燃机工程中的应用

陈 国 华 编著

华中工学院出版社

有限元法在内燃机工程中的应用

陈国华 编著

责任编辑 叶见欣

华中工学院出版社出版

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所发行

湖北省咸宁市印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 14 字数: 280,000

1985年11月第一版 1985年11月第一次印刷

印数: 1—2,000

统一书号: 15255—037 定价: 3.20元

前 言

有限元法是随着高速电子数字计算机的出现,而迅速发展起来的一种数值分析方法。这种方法起源于结构分析,其后迅速地推广到固体力学以及其它非结构分析问题的许多领域。二十多年来,有限元法已逐渐成为一门日益成熟的学科。有限元法在固体力学领域的巨大成功,吸引了国内外从事内燃机研制的科技人员。由于内燃机要完成其独特的功能,因此大部分结构零件不但形状复杂,而且工作条件非常恶劣。这些零部件的结构分析和设计是一件非常困难的工作。有限元法以其独特的优点,如在结构的形状和载荷方式相当复杂的情况下都可以求解,因而被迅速地应用于内燃机工程中,成为有限元法工程应用的一个重要方面内容。目前,有限元法在内燃机工程中的应用从单纯的结构分析走向了计算机辅助设计,并且向结构的最优化设计方向发展。可以预料,随着有限元法在内燃机工程应用与相应的软件的开发,对于提高内燃机的可靠性和经济性将发挥重要的作用。

本书以有限元法在内燃机工程中的应用为主,叙述了有限元法的基本理论、应用过程实施和计算机应用程序。这种应用包括两个方面的内容,即结构分析和结构设计。

本书由华中工学院郑际加教授和武汉水运工程学院韩奎副教授审稿,参加审稿的还有张增芳、谭林森等同志。在此深表谢意。

由于编者水平有限,书中错误和不妥之处,请读者批评指正。

编 者

一九八四年七月

目 录

第一章 有限元法基础	(1)
§ 1—1 概论	(1)
§ 1—2 弹性力学的平面问题	(4)
§ 1—3 平面问题的等参数单元	(17)
§ 1—4 弹性力学的轴对称问题	(24)
§ 1—5 弹性力学的三维问题	(32)
§ 1—6 平面稳定温度场	(41)
§ 1—7 轴对称稳定温度场	(46)
§ 1—8 平面不稳定温度场	(48)
§ 1—9 轴对称不稳定温度场	(52)
§ 1—10 动力学问题	(53)
§ 1—11 弹性接触问题	(61)
第二章 程序基础	(67)
§ 2—1 程序框图与主要符号说明	(67)
§ 2—2 初始数据的输入	(68)
§ 2—3 单元刚度矩阵的计算	(70)
§ 2—4 整体刚度矩阵的形成	(71)
§ 2—5 处理约束条件	(74)
§ 2—6 载荷矩阵的形成	(75)
§ 2—7 线性代数方程组的求解	(78)
§ 2—8 单元应力分量的计算	(81)
第三章 应用过程实施	(82)
§ 3—1 概述	(82)
§ 3—2 有限元计算模型的建立	(83)
§ 3—3 计算工况的选择与载荷的处理	(89)
§ 3—4 计算过程的实施	(94)
第四章 内燃机结构的有限元分析	(96)
§ 4—1 连杆结构的平面应力分析	(96)
§ 4—2 连杆结构的准动态分析	(100)
§ 4—3 曲轴的平面应力分析	(106)
§ 4—4 曲轴的三维应力分析	(109)
§ 4—5 活塞轴对称稳定温度场的计算	(111)
§ 4—6 活塞的轴对称应力分析	(118)
§ 4—7 活塞的三维应力分析	(119)
§ 4—8 机座的平面应力分析	(121)
§ 4—9 缸盖、缸套与机体联接区的应力分析	(123)
第五章 内燃机结构最优化设计	(130)
§ 5—1 结构最优化设计的数学模型	(130)

§ 5—2	用线性规划逐步逼近非线性规划.....	(131)
§ 5—3	将非线性规划化为无约束极值问题.....	(134)
§ 5—4	复合形法.....	(138)
§ 5—5	应力灵敏度的计算.....	(140)
§ 5—6	连杆结构的最优化设计.....	(141)
§ 5—7	活塞结构的最优化设计.....	(149)
第六章	有限元网格自动生成与计算机自动绘图.....	(153)
§ 6—1	有限元网格自动生成.....	(153)
§ 6—2	初始数据检查.....	(155)
§ 6—3	计算机自动绘图.....	(156)
第七章	计算程序.....	(163)
§ 7—1	平面问题计算程序.....	(163)
• § 7—2	稳定温度场计算程序.....	(171)
§ 7—3	轴对称应力分析程序.....	(180)
§ 7—4	有限元网格自动生成程序.....	(192)
§ 7—5	有限元数据检查程序.....	(197)
§ 7—6	结构最优化设计程序.....	(201)

第一章 有限元法基础

§1-1 概 述

由于对现代内燃机不断地追求更高的经济指标,因而,常常采用强化和燃用重油等措施来降低燃油耗量。这导致了内燃机零部件的机械负荷与热负荷的增加。如何保证内燃机结构的可靠性与寿命便成为一个重要的问题。内燃机的大部分零部件不但结构复杂,而且所受的载荷类型也各不相同。对这些零部件的结构分析和设计,长期以来主要采用实验分析和经验设计的方法。由于测量方法的局限性和某些测试技术的复杂性,因此,它们在内燃机工程中的应用受到一些限制。加上测量方法的周期较长、费用较高,要想通过大量的不同方案的测试研究来寻求一个最佳的设计,往往是困难的和不合算的。而且对这些复杂的结构件,如活塞、曲轴、缸盖等,也不可能得到应力分析的解析解。在这种情况下,只有寻求结构的数值分析方法,才能为内燃机零部件的结构分析和设计提供有力的手段。

电子计算机的出现,使内燃机结构分析和设计的多种新理论和方法得以推广应用。有限元法就是其中一种强有力的数值计算方法,在结构形状和所受载荷类型相当复杂的情况下,它都可以进行求解,并能得到较准确的结果。

用有限元法进行结构分析的基本思想是:将一个连续的弹性体进行离散化,分割成彼此用节点相连接的有限个单元,然后对单元进行分析,用节点位移来表示结构的变形,再建立整个结构总位能关于结构位移的表达式;根据变分原理,可以得到以节点位移为未知数的一大型线性方程组,用人们所熟知的消元法或迭代法,即可求出各节点处的

位移近似值,进一步可求出各节点的应力值。这种充分符合,以有限的单元代替连续的弹性体的方法就是有限元法的基本思想。为了说明这一基本思想,下面来讨论一个简单的例子。

1. 结构的离散化

用有限元法分析变截面直杆(图1-1)时,先将该杆进行离散化处理,即将其分割成若干个互不重叠的等断面直杆。这里,为讨论问题简便起见,将它分为两段直杆,如图1-1中的AB段和BC段,每一段称为一个单元。单元的端点称为节点。因此,结构离散化后,单元之间只依靠节点连接。在节点上可以有载荷作用,图1-1中的 p 就是作用在节点A上的载荷,称此载荷为节点载荷。最后将节点和单元分别编上号码。这样,结构被离散后,分割成由三个节点和两个单元组成的等价系统。问题就变成,只要找出这

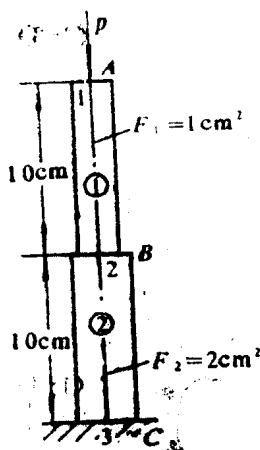


图1-1

些节点处的位移值，就可以近似地表示这个变截面杆的变形情况，进而可以求出它的应力分布。因此，节点位移就成为有限元分析中待求的未知参数。

2. 选择位移插值函数

用节点上的位移值，来建立整个求解区间的位移函数。这种函数称为位移插值函数。它的作用就是将节点之间的位移用适当的方式补充起来。为了在整个求解区间上构造位移插值函数，可以在每个单元上分别进行。通常，假设位移函数为多项式的形式，其中最简单的位移插值函数是线性函数。在本例中，由于杆中应变处于常应变状态，故可采用线性位移插值函数。例如，对于第*i*个单元，若其两个节点*i*、*i*+1上的位移值分别为 u_i 、 u_{i+1} （图1-2），那么，位移插值函数的形式为

$$u(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1}, \quad (1-1)$$

式中， $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ 。

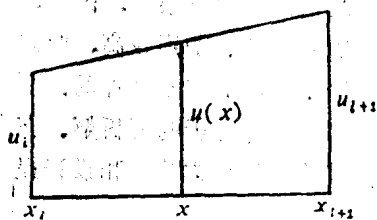


图1-2

显然，这样构造的位移插值函数在相邻两个单元的公共节点上保持连续。

3. 用变分原理推导出有限元法计算格式

为了得出有限元法计算格式，常采用固体力学的变分原理，如最小总位能原理。受到外载荷作用的弹性体的总位能，为弹性体的变形能和外载荷的位能之和，如果弹性体处于稳定平衡状态，那么总位能为极小值。这就是最小总位能原理。在结构的有限元法分析中，结构的总位能为各单元的位能之和。对于本例，单元的变形能 U_e 按下式计算：

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma \epsilon dx \cdot F_e = \frac{EF_e}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \quad (1-2)$$

式中， F_e 为单元*e*的截面积； E 为材料的弹性模量； σ 为应力； ϵ 为应变。

将式(1-1)所表示的位移插值函数代入式(1-2)，得到

$$U_e = \frac{EF_e}{2} \cdot \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1-3)$$

对于第一个单元，有

$$U_1 = \frac{E}{20} (u_2 - u_1)^2.$$

对于第二个单元，有

$$U_2 = \frac{E}{10} (u_3 - u_2)^2.$$

整个变截面直杆的变形能 U 等于各单元变形能的总和，即

$$U = \sum_{e=1}^2 U_e = \frac{E}{2} \frac{F_1 (u_{i+1} - u_i)^2}{x_{i+1} - x_i}. \quad (1-4)$$

节点载荷的位能

$$V = - \sum_{i=1}^3 p_i u_i \quad (1-5)$$

式中, p_i 为作用在第 i 个节点上的载荷。

于是, 变截面直杆的总位能

$$\Phi = U + V = \frac{E}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{F_i (u_{i+1} - u_i)^2}{x_{i+1} - x_i} - \sum_{i=1}^3 p_i u_i \quad (1-6)$$

根据最小总位能原理

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

得到

$$\begin{cases} -\frac{EF_1(u_2 - u_1)}{x_2 - x_1} = p_1, \\ \frac{EF_1(u_2 - u_1)}{x_2 - x_1} - \frac{(u_3 - u_2)EF_2}{x_3 - x_2} = p_2, \\ \frac{EF_2(u_3 - u_2)}{x_3 - x_2} = p_3. \end{cases} \quad (1-7)$$

把 $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = 10\text{cm}$, $F_1 = 1\text{cm}^2$, $F_2 = 2\text{cm}^2$

$p_2 = 0$, $p_1 = -10000\text{N}$ 代入上式, 有

$$\begin{cases} -\frac{E}{10}(u_2 - u_1) = -100, \\ \frac{E}{10}(u_2 - u_1) - \frac{2E}{10}(u_3 - u_2) = 0, \\ \frac{2E}{10}(u_3 - u_2) = p_3. \end{cases} \quad (1-8)$$

将方程 (1-8) 写成矩阵的形式:

$$\frac{E}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

再将上式写成如下的形式

$$[K] \{\delta\} = \{p\},$$

式中, $[K]$ 为结构的总刚度矩阵,

$$[K] = \frac{E}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

不难看出, $[K]$ 是奇异的, 方程 (1-9) 没有唯一的解。必须进行一些处理。

式 (1-9) 中的 p_3 是节点 3 处的反力, 因为节点 3 是被约束住的, 因此位移 u_3 为零。通过划去最后一行和最后一列, 得到修正后的方程为

$$\frac{E}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

4. 求解节点未知位移

有限元法的最后结果，是要求解形如式 (1-9) 的线性方程组。求解线性方程 (1-10)，就可以得到未知的节点位移量

$$u_1 = -\frac{150}{E} \text{ cm}, \quad u_2 = -\frac{50}{E} \text{ cm}.$$

5. 计算单元的应变和应力

在结构各节点的位移求出后，可进一步求出各单元的应变和应力。

两个单元的应变分别为

$$\epsilon_1 = \frac{(\Delta L)_1}{L} = \frac{u_2 - u_1}{10} = -\frac{100}{E},$$

$$\epsilon_2 = \frac{(\Delta L)_2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{10} = -\frac{50}{E},$$

因此，两个单元的轴向应力分别为

$$\sigma_1 = E\epsilon_1 = -100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = E\epsilon_2 = -50 \text{ MPa}$$

式中的负号说明应力都是压应力。显然，计算结果和解析解完全是一样的。

从上面这一个简单的例子可以看出，用有限元法进行结构分析时，是直接对结构进行离散化处理，在单元分析的基础上，利用变分原理，建立计算格式。由于单元和节点的划分比较任意，用有限元法求解结构复杂的零部件，可以得到较好的结果。

§1-2 弹性力学的平面问题

内燃机中的一部分结构件，如连杆、主轴承盖、机架的横隔板等，可以近似看作弹性力学的平面问题，采用平面问题的有限元法求解。由于平面问题的有限元法，无论在程序结构的复杂性、计算前后数据处理的工作量方面，还是在计算机时间和费用上，都要比三维问题的有限元法优越得多，因此，它在内燃机工程中得到了广泛的应用。本章只着重讨论三节点平面三角形单元的情形，这种单元的分割比较灵活，适宜处理边界比较复杂的零件，对内燃机结构分析较为适用。此外，还介绍一种八节点的四边形单元。

一、弹性力学平面问题的基本方程

弹性力学的平面问题有两种类型，即平面应力问题与平面应变问题。因为两种平面问题都具有相似的基本方程，在以后的叙述中，将主要讨论平面应力问题。

设有一很薄的均匀板，如果板的厚度比其它两个方向（长和宽）的尺寸要小得多，且只在板的厚度断面上受到平行于板面的均匀分布的外力作用，这类问题称为平面应力

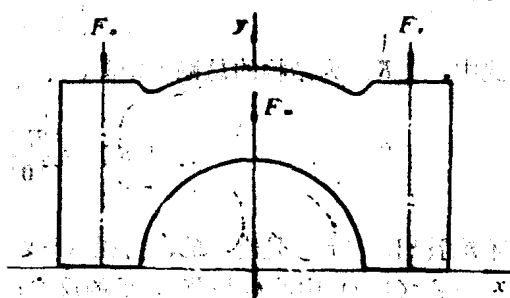


图1-1 主轴承盖

问题。例如内燃机的主轴承盖（图1-3）就是属于平面应力问题。

平面应力问题只有三个应力分量，即 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ，写成应力矩阵的形式为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T. \quad (1-11)$$

（一）应变—位移方程

弹性体在受力作用后，将产生位移和应变。弹性体内任一点的位移，可用它在坐标轴 x 、 y 上的分量 u 和 v 来表示，其应变用 ϵ_x 、 ϵ_y 和 γ_{xy} 表示，描述应变与位移之间几何关系的微分方程，可以用一个矩阵表示：

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (1-12)$$

（二）应力—应变方程

对于连续、均匀、各向同性的弹性体，应力分量与应变分量之间的关系由下式表示：

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \end{cases} \quad (1-13)$$

式中， μ 为材料的泊松系数； G 为剪切弹性模数。

式（1-13）还可以写成另一种形式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & \text{对称} \\ \mu & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1-14)$$

引入

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & \text{对称} \\ \mu & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix},$$

则式（1-14）可写成

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}. \quad (1-15)$$

$[D]$ 称为弹性矩阵，它是一个只与弹性体的弹性常数有关的常数矩阵。

式（1-15）是描述应力与应变关系的物理方程。

（三）初应变

在结构的应力分析中, 如果还要考虑温度变化所引起的热应力时, 那末, 要在上述的总应变中考虑温度变化所引起的初应变。对于各向同性物体, 若线性膨胀系数为 α , 温度的增加为 T , 那么初应变为

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{y,0} \\ \gamma_{xy,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1-16)$$

式(1-5)所表示的物理方程应为

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (1-17)$$

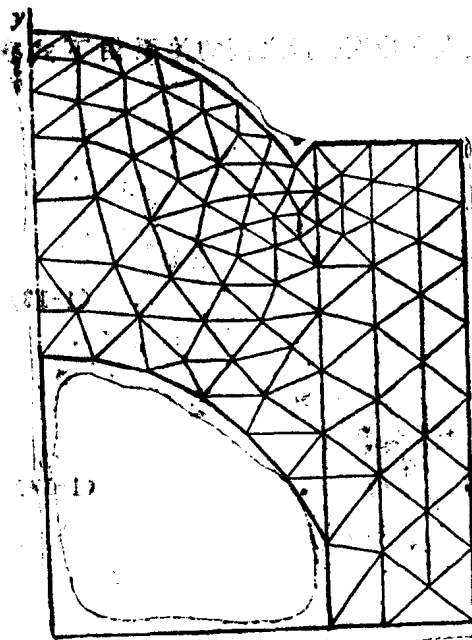
(四) 平面应变问题

平面应变问题的基本方程, 只要在平面应力问题的基本方程中, 用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 代替 E ,

用 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代替 μ , 用 $(1+\mu)\alpha$ 代替 α , 就可以得到。

二、弹性体的离散化

对于平面问题, 结构离散化处理时, 常采用三角形单元(图1-4)。分割过程的目的主要是决定单元的数目、形状、大小以及排列, 使得原来的结构尽可能精确地得到模拟。



划分单元时, 要注意使任一个三角形单元的顶点同时是其相邻三角形单元的顶点; 要尽量使每个三角形单元三边边长不要相差太大; 要使节点和分割线安置在几何形状和载荷发生突变处。在内燃机中, 大部分零件都有应力变化较大的部位。因此, 在可能会出现应力集中或应力梯度比较大的区域, 应将单元划分得小些, 以便在这些地方能得到较精确的计算结果。

一般来说, 结构分割的单元越多, 用有限元法所计算的结果就越精确。但是, 单元和节点的数目要受到计算机存贮容量和计算时间及费用的限制。即节点和单元数目越多, 所占用的计算机存贮量越大, 计算时间越长, 费用越高。所以在进行结构的有限元法计算时, 要根据电子计算机存贮量的大小和工程上的计算精度要求, 决定划分单元和节点的总数目。

图1-4

对于已分割好的结构, 要将所有的单元和节点按一定顺序编号。单元的编号除根据人为需要约定外, 原则上是可以任意的, 而节点编号, 则要根据一些算法的特殊要求进行, 有的需要进行优化, 以节省电子计算机存贮量。这种编号的原则是, 每一节点编号与其相邻的所有节点编号的差值应尽可能地小(图1-5)。对于大型复杂的结构分析问题, 上述人工划分网格的工作量是很大的。这时, 可采用自动网格划分程序, 在电子计算机上实现单元的划分和节点、单元的编号以

及节点坐标的自动生成。通常把这一过程叫做计算机的前处理。

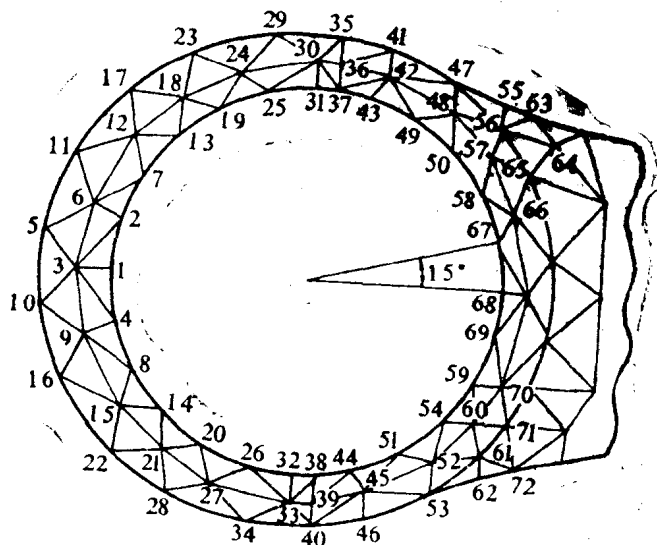


图1-5 单元与节点编号

三、位移插值函数

先考察一编号为 e 的单元(图1-6所示), 设其三个节点按逆时针次序排列的编号为 i, j, m , 三个节点的坐标分别为 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_m, y_m) 。由于是平面问题, 每一个节点有两个位移分量。三个节点的位移分量分别为

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_m\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}.$$

将三角形单元 e 的节点位移 $\{\delta\}_e$ 写成

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}. \quad (1-18)$$

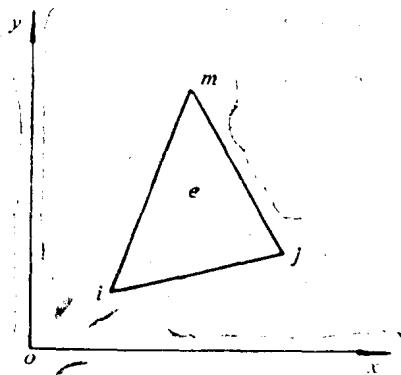


图1-6

下面, 根据节点位移值来构造位移插值函数。这里, 采用最简单的线性插值的方法。设单元 e 上的位移是坐标 x, y 的线性函数

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2 x + a_3 y, \\ v = a_4 + a_5 x + a_6 y, \end{cases} \quad (1-19)$$

式中, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 和 a_6 为待定系数。将各节点的坐标代入式(1-19), 就有

$$\begin{cases} u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i, \\ u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j, \\ u_m = a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m; \end{cases} \quad \begin{cases} v_i = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i, \\ v_j = a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j, \\ v_m = a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m. \end{cases}$$

联立求解这两个方程组，可得到

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2\Delta_e} (a_1 u_i + a_2 u_j + a_3 u_m), \\ a_2 = \frac{1}{2\Delta_e} (b_1 u_i + b_2 u_j + b_3 u_m), \\ a_3 = \frac{1}{2\Delta_e} (c_1 u_i + c_2 u_j + c_3 u_m), \end{cases} \quad (1-20)$$

$$\begin{cases} a_4 = \frac{1}{2\Delta_e} (a_1 v_i + a_2 v_j + a_3 v_m), \\ a_5 = \frac{1}{2\Delta_e} (b_1 v_i + b_2 v_j + b_3 v_m), \\ a_6 = \frac{1}{2\Delta_e} (c_1 v_i + c_2 v_j + c_3 v_m), \end{cases} \quad (1-21)$$

式中, $a_1 = x_i y_m - x_m y_j$; $a_2 = x_m y_i - x_i y_m$; $a_3 = x_i y_j - x_j y_i$;

$b_1 = y_j - y_m$; $b_2 = y_m - y_i$; $b_3 = y_i - y_j$;

$c_1 = x_m - x_j$; $c_2 = x_i - x_m$; $c_3 = x_j - x_i$;

Δ_e 为三角形单元的面积,

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_1 c_1 - b_2 c_2).$$

将式 (1-20) 和 (1-21) 代入式 (1-19) 中, 得到位移插值函数的表达式:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\Delta_e} [(a_1 + b_1 x + c_1 y) u_i + (a_2 + b_2 x + c_2 y) u_j + (a_3 + b_3 x + c_3 y) u_m], \\ v = \frac{1}{2\Delta_e} [(a_4 + b_4 x + c_4 y) v_i + (a_5 + b_5 x + c_5 y) v_j + (a_6 + b_6 x + c_6 y) v_m]. \end{cases} \quad (1-22)$$

令

$$\begin{cases} N_i^u = \frac{1}{2\Delta_e} (a_1 + b_1 x + c_1 y), \\ N_j^u = \frac{1}{2\Delta_e} (a_2 + b_2 x + c_2 y), \\ N_m^u = \frac{1}{2\Delta_e} (a_3 + b_3 x + c_3 y), \end{cases} \quad (1-23)$$

得到位移函数的简单形式

$$\begin{cases} u = N_i^u u_i + N_j^u u_j + N_m^u u_m, \\ v = N_i^v v_i + N_j^v v_j + N_m^v v_m. \end{cases} \quad (1-24)$$

将式 (1-24) 写成矩阵的形式

$$\{f\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [N]^T \{\delta\}^e = [N_i^u I, N_j^u I, N_m^u I] \{\delta\}^e, \quad (1-25)$$

式中, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是二阶单位矩阵。

式中的 $[N]^e$ 是坐标的函数，它反映了单元的位移形态，一般称为形状函数。根据式 (1-24) 所表示的位移函数可以知道，在单元的边界上位移是线性变化的。由于两个相邻的单元在其公共节点上具有相同的节点位移，因此在它们的公共边上，也具有相同的位移。这就说明了上述的位移插值函数保证了任意相邻单元之间位移的连续性，即满足变形协调条件。

四、单元的应变与应力

利用上面构造的单元的位移插值函数，可以计算单元的应变 $\{\epsilon\}$ 和应力 $\{\sigma\}$ 。

(一) 单元的应变

将式 (1-22) 代入式 (1-12)，可得到单元上的应变为

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_e} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \frac{1}{2\Delta_e} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \\ \frac{1}{2\Delta_e} (c_i v_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m) \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\Delta_e} \begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{pmatrix} \\ &= [B]^e \{\delta\}^e, \end{aligned} \quad (1-26)$$

式中， $[B]^e = [B_i]^e, [B_j]^e, [B_m]^e$ ，

其子矩阵为

$$[B_i]^e = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix}, \quad (i = i, j, m) \quad (1-27)$$

上式后面的 $(i = i, j, m)$ 表示这个公式代表三个公式，其中角码 i, j, m 轮换代替就可以得到这三个计算公式。

由于单元的面积 Δ_e 和系数 $b_i, c_i, b_j, c_j, b_m, c_m$ 等都是常数，单元的应变分量 $\{\epsilon\}$ 也是常数。

(二) 单元的初应变

单元内的初应变一般来说是不均匀的。但是当单元划分得较小时，可以用一个平均值来表示单元的初应变。若单元的线膨胀系数为 α ，单元上温度的平均值

$$\bar{T} = \frac{1}{3} (T_i + T_j + T_m), \quad (1-28)$$

式中， T_i, T_j, T_m 分别为节点 i, j, m 的温度，则单元的初应变

$$\{\epsilon_0\} = \begin{pmatrix} \alpha \bar{T} \\ \alpha \bar{T} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1-29)$$

(三) 单元的应力

把式 (2-26) 代入式 (2-15), 可得到单元应力的表达式为

$$\{\sigma\} = [D] [B]^T \{\delta\}^e \quad (1-30)$$

令 $[S] = [D] [B]^T = [[S_i], [S_j], [S_m]]$,

$$\text{式中, } [S_i] = [D] [B_i]^T = \frac{E}{2(1-\mu^2)\Delta_e} \begin{pmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{pmatrix}, \quad (i=j, j, m),$$

$[S]$ 称为应力矩阵。则式 (1-30) 可写成

$$\{\sigma\} = [s] \{\delta\}^e \quad (1-31)$$

当考虑由于温度变化引起的初应变时, 单元的应力为:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \\ &= [S] \{\delta\}^e - [D] \{\epsilon_0\}. \end{aligned} \quad (1-32)$$

五、单元刚度矩阵

在用固体力学的变分原理 (如最小总位能原理) 导出有限元计算格式时, 需要求出结构总位能的表达式。结构的总位能为各单元总位能之和。因此, 首先必须求结构的每单元总位能。

(一) 单元的变形能

设单元具有单位厚度, 其变形能为

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \iint_V \{\sigma\}^T (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dx dy - \iint_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_V \{\epsilon_0\}^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} \iint_V [B]^T [D] [B] dx dy \{\delta\}^e - \{\delta\}^{eT} \iint_V [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_V \{\epsilon_0\}^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K]^e \{\delta\}^e - \{\delta\}^{eT} \iint_V [B]^T [D] \{\epsilon_0\} dx dy + C_e \end{aligned} \quad (1-33)$$

$$\text{式中, } [K]^e = \iint_V [B]^T [D] [B] dx dy$$

$$= \Delta_e [B]^T [D] [B]^e, \quad (1-34)$$