[美] E. J. SALETAN　A. H. CROMER　著
卢邦正　姜存志　译

理论力学

高等教育出版社

内容提要

本书根据[美] E. J. Saletan 和 A. H. Cromer 合著，John Wiley & Sons出版社 1971 年出版的《Theoretical Mechanics》一书译出。全书包括力学基础、力学的拉格朗日表述、对称性和守恒性、矢量空间、刚体运动、哈密顿表述、正则变换的连续族、场论、动力学中的群论方法等九章。讲述了经典动力学的基本内容。在论述过程中，运用了线性空间的基本理论，并介绍了群论在动力学中的初步应用。在第八章中还对经典场论作了简要的论述。在每章后面附有习题，书末附有文献目录供读者参考。

本书可供综合大学和师范院校物理专业师生用作教学参考书，也可供其它院校有关专业的教学和科研工作者及自学青年选用。

理论力学

[美] E. J. Seletan
A. H. Gromer

卢邦正　姜存志　译

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市顺义县印刷厂印装

开本 850×1168　1/32　印张 13.625　字数 327,000
1989 年 6 月第 1 版　1989 年 6 月第 1 次印刷
印数 00001—3,080
ISBN 7-04-000096-2/O·44
定价 4.25 元

序　言

伽利略和牛顿创始的经典力学，是物理学赖以发展的基础．因此，要通晓近代物理，必须对力学的基本结构有深入的了解．本书的目的是以最有效的方式，向学习量子力学和场论的物理专业研究生介绍这一结构．同时，本书还把重点放在理论力学自身领域的当代研究课题上，因而书中也讲到这方面的某些研究工作．

在数学处理方面作了许多改进．传统的无限小量的计算完全由明确的微积分运算所代替．对刚体运动则应用矢量空间中的运算进行处理．变分原理中的拉格朗日乘子通过内积的形式引入．在哈密顿表述和正则变换的论述中，许多地方用统一的相空间坐标代替通常的 p 和 q，这种符号上的改进，使得对一些重要定理的证明大为简化和易于理解．

本书内容的选材着重于一些近代课题，诸如对称性与守恒定律，微扰理论，绝热不变性以及群论等．为此，有时放弃了一些传统的课题．例如，没有详尽讨论有心力问题，但本书中仍利用它作为例子来说明其它论题．

各章的最后一节都是该章前几节所述理论的实例、应用和推广．这样编写的好处，在于理论论述上能够做到循序渐进，并可由此广泛地讨论某些例题．各章的最后一节可与该章的其余部分并行地进行学习．

本书的习题是理论论述的一个不可缺少的部分．由于教学上的需要，某些次要结果的证明有时留作习题，让读者自己完成，而且在正文中引用了这些习题．一般说来，习题中包含理论推导和实际应用的综合题，有助于学生增强理解力和提高运算技巧．

我们对本校的老师、同事和学生表示感谢，特别对 Valentine Bargmann, Richard Arnowitt, Marvin Friedman, Douglas G. Currie, F. A. E. Pirani 各位教授和许多学生表示感谢．并感谢 Helen Schneider 和 Gertrude Tang 打印了本书的部分手稿．

E. J. SALETAN

A. H. CROMER

1971 年 6 月于

马萨诸塞 波士顿

目　录

第一章 力学基础

本章讨论力学的一些基本内容．假定读者已熟知公式 $F=ma$，并应用它做过不少习题．因此，我们不打算对基本内容作详尽的讨论，而只着重讨论某些难于理解的问题．

§1-1 运动学基础

我们首先讨论如何定量地描述运动．由于运动涉及物体位置的变化，物体的位置又要通过组成此物体的各个点的位置才能确定，因此，我们必须首先考虑如何描述一个点的位置．要描述一个点的位置，只需给出该点相对于某个坐标系的坐标，这个坐标系称为参考系．如果所选的参考系是具有三个坐标轴 X_1，X_2，X_3 的笛卡儿直角坐标系，某点的坐标 x_1，x_2，x_3 就等于该点至原点的连线在三个坐标轴上的投影，如图 1 所示．某点的位置也可用自原点至该点的矢径 $\boldsymbol{x}$ 表示．$\boldsymbol{x}$ 的分量即是该点的坐标．我们可将以上关系写为

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3=\sum_{\alpha=1}^{3}x_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{e}_\alpha$ 为 α 方向的单位矢量．

当点运动时，它的位置矢量也随之改变，因而需要用一个参数 t 来标志不同的位置，于是 $\boldsymbol{x}$ 成为 t 的函数，即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

我们进一步要求，当 $\boldsymbol{x}(t)$ 经历点的后继位置时，t 具有单调增加的性质．后继位置的概念是一个直觉的概念，它依赖于我们能够

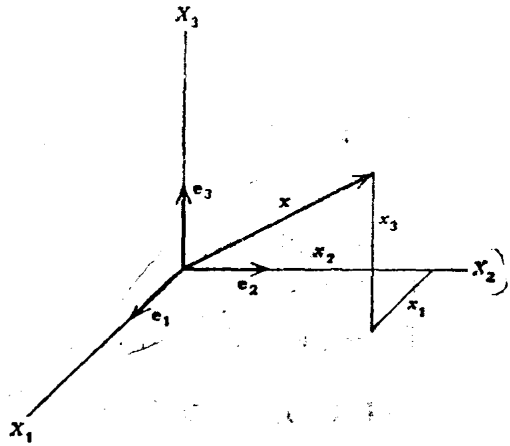

图1　笛卡儿直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{x}$

区分事件的前和后、即排定事件顺序的能力．换句话说，我们假定对于质点的任意两个位置，要区分哪一个在前是不成问题的．显然，上面所说的一切都与我们对时间的直觉观念有关．因此，在某种意义上来说，t 即是这种直觉观念的定量表述．简而言之，t 的任意两个值 t_1 和 t_2，如果 $t_2>t_1$，则质点处于位置 $\boldsymbol{x}(t_2)$ 的时刻晚于处于 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 的时刻，即 t_2 在 t_1 之后．

在本节内我们不准备说明时间的含义，这个问题留待下一节讨论动力学时再说．象本节中我们所作出的表述那样，运动学的表述的特征是涉及到时间的两个性质：(a)随着位置的相继变化，t 单调地增加；(b)存在着 $\boldsymbol{x}$ 对 t 的一阶、二阶导数．

坐标系一经选定，方程(2)便可表为三个方程的方程组：

$$x_\alpha=x_\alpha(t)\qquad(\alpha=1,2,3)\tag{3}$$

方程组(3)只是方程(2)的一种表示．方程(2)给出从原点到动点的物理矢量的时间依从关系，而方程组(3)是关于坐标的时间依从关系．(3)中出现的三个函数取决于所选取的特定坐标系．不过，坐标系一经选定，(3)就成为描述质点轨道(质点运动时描出的曲

线)的三个参数方程，t 在其中作为参数出现.

或许还应当指出，在上面的论述中，我们还假定了空间是欧几里德型的，而且是三维的. 这意味着，要用三个独立的函数来确定作为时间函数的点的位置，这三个函数之间不存在对所有质点的轨道都成立的一种普适关系. 以后我们要考虑由各种方式限制的各类轨道，即所谓约束运动，但我们假定空间本身在动力学意义下仍是三维的.

质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 用 $\boldsymbol{x}$ 和 t 定义，即

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)\equiv\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{4}$$

上式最好用沿轨道的距离 s 表示，距离 s 的测定可从任一点开始. 在数学上，s 定义为

$$s(p_1)=\int_{p_0}^{p_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}(dx_\alpha/dp)^2\right]^{1/2}dp$$

式中，p 为沿轨道的任一参数，它在 $\boldsymbol{x}(p_0)$ 与 $\boldsymbol{x}(p_1)$ 之间单调增加. 于是，通过 s 有

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

但 $d\boldsymbol{x}/ds$ 即 $\boldsymbol{\tau}$ 恰是沿轨道切线方向的单位矢量. 为了看出这一点，可参考图 2，其中画出了空间曲线的一段. 曲线上 $\boldsymbol{x}$ 点的切向矢量位于矢量 $\boldsymbol{T}$ 的方向. $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ 两点间的弦矢量 $\Delta\boldsymbol{x}$ 在 $\Delta\boldsymbol{x}\to 0$ 的极限情况下，趋于与 $\boldsymbol{T}$ 平行. 为了得到在这种极限情况下的一个有限矢量，必须用随 $\Delta\boldsymbol{x}$ 一同趋于零的某个标量来除 $\Delta\boldsymbol{x}$. 如果选用弧长 Δs 为此标量，则得到

$$\boldsymbol{\tau}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta s}=\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$$

$\boldsymbol{\tau}$ 具有单位长度，并与 $\boldsymbol{T}$ 平行. 于是我们有

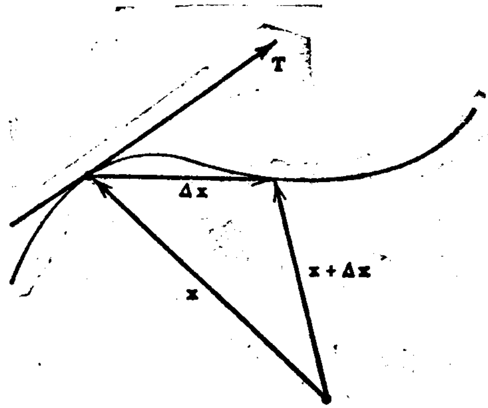

图2　空间曲线切线方向的矢量 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\tau}\frac{ds}{dt}=\boldsymbol{\tau}v \tag{5}$$

上式表明，$\boldsymbol{v}$ 在各处都与轨道相切，其大小等于质点沿轨道的速率 v.

质点的加速度定义为矢量

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{x}}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$

根据方程(5)，我们进而有

$$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}v)=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}v+\boldsymbol{\tau}\frac{dv}{dt}$$

既然 $\boldsymbol{\tau}$ 是单位矢量，因而 $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}=1$，所以

$$0=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau})=2\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

于是 $d\boldsymbol{\tau}/dt$ 垂直于 $\boldsymbol{\tau}$，位于曲线的法线方向．令 $\boldsymbol{n}$ 为这一法线方向的单位矢量①，则

---

① 事实上，在曲线的 $\boldsymbol{x}$ 点有许多条法线存在，$\boldsymbol{n}$ 是其中称为主法线的一条，它位于曲线在 $\boldsymbol{x}$ 点的瞬时平面上．

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|\boldsymbol{n}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\right|\boldsymbol{n}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|v\boldsymbol{n}$$

在习题 1 中要证明 $|d\boldsymbol{\tau}/ds|=\rho^{-1}$ 是轨道在 $\boldsymbol{x}$ 点的曲率，ρ 是曲率半径．把它代入 $\boldsymbol{a}$ 的表达式，我们得到

$$\boldsymbol{a}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}+\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} \tag{6}$$

于是加速度具有分别平行于和垂直于轨道的两个分量：切向分量为 $\dot{v}=\ddot{s}$，法向分量为向心加速度 v^2/ρ.

关于质点运动学，我们不准备再作深入的讨论，因为结合动力学的知识来进一步讨论，或许更有帮助．因此，我们现在从对运动的数学处理，转而讨论决定质点运动的物理原理．关于运动学，在本节中已经作了必要的准备，现在可用它来表述奠定经典力学基础的公理．

§1-2 动力学原理

真实的物体并非质点，但我们仍经常利用质点运动学来描述物体的运动．这是因为足够小的物体是近似于质点的，所以这些物体的运动可以当作质点的运动来描述而能达到相当的精确度．而且我们会看到，对于有广延性的物体，其运动情况也可以从理想质点的各个公理中导出．

我们首先来介绍孤立质点的概念．所谓孤立质点，是指离其它所有物体足够远、本身又足够小的一个物理实体．其孤立的程度如何，也就是说，应当有多小，应当移到离其它物体多远，这取决于测量的精度．以后我们讲到孤立质点时，都可这样理解：当长度测量的不确定度大于物体的特征线度，时间测量（规定见下文）的不确定度大于物体内任何变化的特征时间时，该物体就可看作是孤立质点．此外，所测的长度和时间，还应当比从质点到最近一个

物体的距离和所需的时间为短．当按照这种意义对“孤立”进行理解时，孤立程度愈大的物体，我们对它作出的论述愈精确．由此，可以把力学原理归纳为下面两个原理．

原理 1 存在某些称为惯性系的参考系，它们具有如下两个性质．性质 A 在这种参考系内，孤立质点沿直线运动．可以利用孤立质点的这种运动作为标准来规定时间的单位：在质点运动的直线轨道上标出相等的长度，把质点通过相继标记的时间规定为相等的时间间隔．由此可知，作为标准的质点以恒定的速度运动．性质 B 对时间作上述规定时，其它孤立质点在这个参考系内也以恒定的速度运动．换句话说，时间的规定与用来规定时间的质点无关．

讨论 **1**．原理 1 中提出有某个惯性系存在，这就意味着还有许多个惯性系存在，它们全都以恒定的速度彼此相对运动．**2**．虽然通过孤立质点（或称自由质点）来测定时间是不切实际的，但在第五章内我们会看到，从原理 1 和原理 2（见下文）导出的运动定律意味着孤立刚体绕对称轴的转动也是匀速率的，从而可以用来作为测定时间的一种尺度．事实上，通常正是利用地球来达到这一目的的．不过由于地球既非完全孤立，也非完全刚性，因而要进行必要的修正．现在采用的最精确的时间标准，事实上是原子标准，它建立在以上述两个原理为基础，并包含某些经典和量子概念的一系列推理之上．**3**．按照关于运动定律的通常说法，原理 1 即相当于牛顿第一定律．**4**．惯性系是通过孤立物体来定义的，因而一般说来，惯性系不能无限延伸．换句话说，它们具有局域特性．因为，如果把它们延伸，它们的孤立程度就会改变．例如，假定有两个相隔很远的惯性系，如果把它们延伸直至相交，则可证明在第一个惯性系中的自由质点，在第二个惯性系中就不成其为自由的了．上述考虑在物理学中是有重要意义的，但在本书中则意义不大［Taylor (1966)］。

原理 2 **A** 动量守恒．设想两个孤立于其它所有物体的质点 1 和 2，但

它们彼此之间并不孤立．我们在某一惯性系中对它们进行观测．一般情况下它们不会以恒定速度运动，因为它们的相互作用会引起加速度．令 $\boldsymbol{v}_i(t)$ 为第 i 个质点在时刻 t 的速度，$i=1,2$．于是有一个与时间无关的正常数 μ_{12} 和一个常矢量 $\boldsymbol{K}$ 存在，使得对于所有时间 t 下式成立:

$$\boldsymbol{v}_1(t)+\mu_{12}\boldsymbol{v}_2(t)=\boldsymbol{K} \tag{7}$$

而且，μ_{12} 与据以观测运动的惯性系无关，也与具体的运动状态无关($\boldsymbol{K}$ 则不然)．即是说，如果运动中断之后又重新进行观测，还可以采用同一个 μ_{12}，它只与质点 1 和质点 2 有关，而与它们的相互作用无关．如果对质点 1 和质点 3 进行类似的实验，可得到类似的结果；对质点 2 和 3 的实验也如此．于是我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_2(t)+\mu_{23}\boldsymbol{v}_3(t)&=\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{v}_3(t)+\mu_{31}\boldsymbol{v}_1(t)&=\boldsymbol{M}\end{aligned} \tag{8}$$

B 质量的存在．μ_{ij} 之间以下列关系式相联系

$$\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31}=1 \tag{9}$$

由方程(9)可知，存在正的常数 m_i，$i=1,2,3$，使方程(7)和(8)可写成下列形式：

$$\begin{aligned}m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2&=\boldsymbol{P}_{12}\\ m_2\boldsymbol{v}_2+m_3\boldsymbol{v}_3&=\boldsymbol{P}_{23}\\ m_3\boldsymbol{v}_3+m_1\boldsymbol{v}_1&=\boldsymbol{P}_{31}\end{aligned} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 称为动量，是常矢量．上式总是可以成立的，这留待读者自行证明．注意，m_i 没有唯一地确定，因为实验确定的是它们的比值 μ_{ij}，所以只有 μ_{ij} 才唯一地确定．如果给定任一组 m_i，则用同一常数遍乘它们，可以得出另外一组值．实际上，我们是把某个物体选作标准(比如选 4°C时的 1 厘米^3 的水为标准)，其它所有物体的 m_i 值则与它比较而确定．重要的是标准一旦选定，则每个物体只有一个 m_i 值与之相应，这个值与和该物体相互作用的其它物体无关．m_i 就称为物体的质量．按照力学原理的通常说法，方程（10）所表述的原理 2 即是两个质点相互作用的动量守恒定律．

现在对方程(10)的第一式求时间导数，我们得到

$$m_1\boldsymbol{a}_1+m_2\boldsymbol{a}_2=0 \tag{11}$$

从(10)的另外两个方程，还可得到类似上式的两个表达式(此处我们利用了方程右边的矢量与时间无关这一性质)．上列方程，或者确切的说，是(7)对时间求导数而得到的方程，本来可作为给质量下定义的出发点，并得到同样的结果．当然，由此本来也可导出方程(10)．因此(7)与(11)是等效的．把方程(11)作为经典力学的出发点，或许大家比较熟悉，因为它其实是牛顿第三定律的变形．事实上，我们是用下列方程去定义作用于某个质点的力

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{12}$$

于是，如果 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 是由于质点 j 的存在而作用于质点 i 的力，则方程(11)可写成

$$\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{21}=0 \tag{13}$$

这就是牛顿第三定律．

上述两个原理与牛顿三定律是等效的，牛顿定律的通常表述中有许多逻辑上的困难，而我们现在的表述则力求避免．例如，牛顿第一定律说质点不受外力作用时以恒定的速度运动，这里没有力的定义，因而定律本身是不完备的；而且乍看起来，人们或许认为它似乎不过是第二定律的一种特殊情况．事实上，第一定律是原理1的一种含蓄的表述，它对牛顿力学的完备表述来说，在逻辑上是必不可少的．虽然在讨论牛顿定律的表述时出现了这些问题，但是不要忘记，正是牛顿的表述奠定了现在经典力学的基础．难以置信的是，牛顿本人完全不知道这一固有的逻辑上的困难，从而未能加以克服．我们上面给出的对力学定律的表述，其实不过是对牛顿定律的一种解释．这种解释最初来自马赫(1942)．我们的讨论则与 Eisenbud (1958)的某些工作密切有关．

有趣的是，由方程(12)表述的牛顿第二定律，只不过是力的定义，而不是一个基本定律．或许读者会问，为什么这个定义在经典力学中如此重要？正如人们所料，答案就在于这个定义的物理含意．经验表明，在许多物理现象中，最先知道的是 $m\boldsymbol{a}$，而不是其它动力学性质，即是说，可独立于所研究的质点的质量、加速度或其它性质而单独确定的正是力．（说来奇怪，在最普通的一种运动——质点在重力场内的运动中，情况却不是这样．这时，最先知道的是 $\boldsymbol{a}$ 而不是 $m\boldsymbol{a}$）而且，在大多数情况下，力满足叠加原理，即作用于某个质点的合力，可以通过把来自不同施力者或其它不同质点系的力相加而得到．正是这些性质使得方程(12)从一个颇为空洞的定义上升为一个动力学关系式．关于这个问题的有趣讨论，参看 Feynman 的书(1963)．

在我们将要研究的大多数问题中，所给的力都是位置的函数．于是，方程(12)成为矢量函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 的微分方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=m\ddot{\boldsymbol{x}} \tag{14}$$

这个方程是本书以后讨论的大多数问题的基础，虽然我们也经常提到不仅与 $\boldsymbol{x}$ 有关、而且与 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 和 t 有关的力（从原则上说，$\boldsymbol{F}$ 还可以是 $\boldsymbol{x}$ 的高阶时间导数的函数）．于是，一般情况下，我们的问题是求解(14)这类微分方程以得到 $\boldsymbol{x}(t)$，从而得到我们所说的质点的运动．

根据力学原理，我们立即可以导出某些相当有用的关系．首先，我们定义质量为 m 的单个质点的（线）动量 $\boldsymbol{p}$ 为

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v} \tag{15}$$

由于 m 是一个常数，可以把方程(12)写成下列形式

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{16}$$

于是，如果作用于质点的外力为零，立即可以看出它的动量保持恒定．我们已经知道，两个质点相互作用时，它们的总动量、即各个质点动量之和保持恒定．正是由于动量有这一守恒性，所以它被挑选出来加以定义．顺便提一下，方程(16)仅只是方程(12)的改写形式，但这是因为我们没有讨论变质量的情况．在第4节内我们将讨论变质量的情况，那时可以看到，正确描述运动的是方程(16)，而不是方程(12)．

其次，我们定义质点对某个惯性点(在惯性系内以恒定速度运动的一点)的角动量 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p} \tag{17}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 是从惯性点至运动质点的矢量．$\boldsymbol{L}$ 的导数为

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{p}}$$

由于 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{p}=m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v})=0$，则由方程(16)*可得

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{N} \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{N}$ 定义为绕惯性点的力矩．可以看出，力矩与角动量之间的关系类似于力与动量之间的关系；特别是，如果外力矩为零，则角动量是常量．

我们要引入的第三个量是能量，下一节将专门讨论能量的问题．

§1-3 功 和 能

通过力的概念可以把质点力学的一般问题表述如下：已知力 $\boldsymbol{F}$，求质点的一般运动 $\boldsymbol{x}(t)$．如果已知力仅只是时间的函数，那么这个问题可以轻而易举地解出．把方程(12)积分两次，得

* 原文误为方程(8)．——译者注