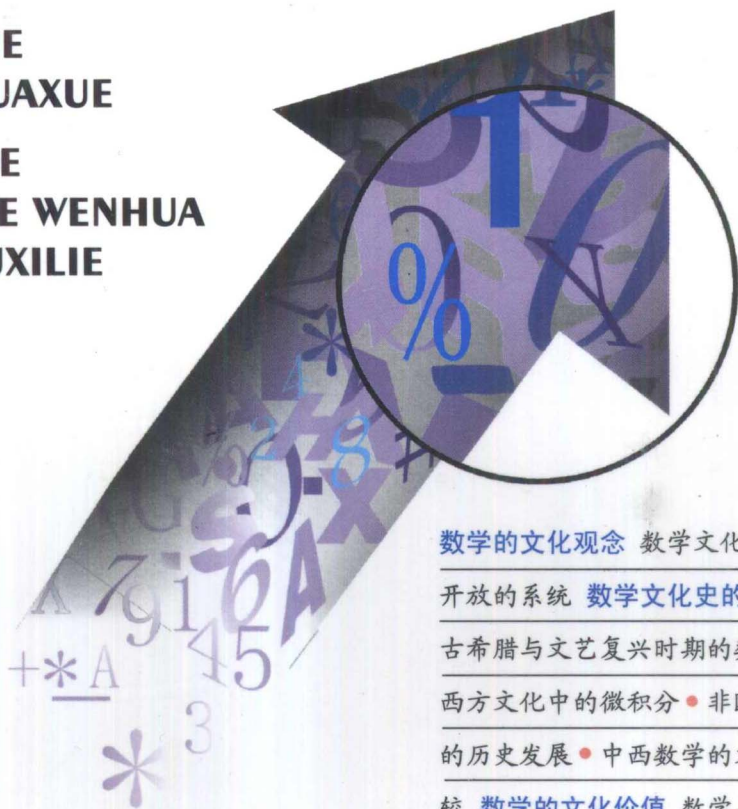


数学·哲学·文化·教育系列

数学文化学

郑毓信 王宪昌 蔡仲 著

SHUXUE
WENHUAXUE
SHUXUE
ZHEXUE WENHUA
JIAOYUXILIE



数学的文化观念 数学文化: 一个
开放的系统 数学文化史的研究
古希腊与文艺复兴时期的数学 •
西方文化中的微积分 • 非欧几何
的历史发展 • 中西数学的文化比
较 数学的文化价值 数学与理性
• 数学与思维

四川教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学文化学/郑毓信,王宪昌,蔡仲著,—成都:四川教育出版社,1999

(数学·哲学·文化·教育)

ISBN 7-5408-3413-7

I. 数… II. ①郑…②王…③蔡… III. 数学—文化学
IV. 01-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 53215 号

责任编辑:刘 玲

封面设计:张 苏

技术编辑:王 凌

责任校对:王立戎

责任印制:姜 卫

数学文化学(数学·哲学·文化·教育系列)

四川教育出版社出版发行 (成都市盐道街3号 邮政编码:610012)

自贡新华印刷厂印刷 (自贡市檀木街95号 邮政编码:643000)

开本 880×1230 1/32 印张 13.25 插页 4 字数 300 千

2001 年 1 月第 1 版

2001 年 9 月第 2 次印刷

ISBN 7-5408-3413-7/G·3218

定价:19.80 元

印数:2001-5000 册

本书若出现印装质量问题,请与工厂调换,电话:(0813)2303642

“数学·哲学·文化·教育系列”总序

——积极开展数学教育的多学科、多方位研究

郑毓信

数学教育的理论研究在近二十年中应当说经历了十分重要的转变。就我国而言，在最初无疑是“教材、教法研究”一统天下；其后，在 80 年代则逐步形成了以“数学学习论”、“数学教学论”和“数学课程论”为主体的新的理论体系；然而，从 90 年代以来，数学教育的现代研究又明显表现出了多样化、多方位的新特点，而这不仅是指开拓了更多的研究方向，如数学教育的测量与评估、数学方法论、现代技术在数学教育中的应用、数学思维教育等，而且也是指表现出了多学科的相互渗透与整合这一重要趋势。这一趋势与国际数学教育界的现代发展潮流也是完全一致的。例如，作为数学教育的重要指导性著作，1992 年出版的《数学教与学研究手册》(Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning) 共列举了 29 个课题，其中就包括了心理学、社会—文化研究、(数学) 哲学等多方面的内容，如“数学的性

质：它的作用和影响”、“数学教室的文化：一个未知量”、“教师的信念与观念：一个综述”、“学会数学地思维：问题解决、元认知与数学中的意义赋予”、“转向高层次数学思维：函数、极限、无限和证明”、“民俗数学与日常认知”等。从而，总的来说，积极开展多学科、多方位的研究就可说是数学教育现代发展的一个重要特点。

就上述方向的研究而言，以下几个课题是十分重要的：

(1) 数学教育哲学

数学教育哲学的兴起是数学教育现代发展的必然趋势，因为，在经历了种种的“改革运动”以后，如 60 年代的“新数学运动”、70 年代的“回到基础”、80 年代的“问题解决”等，为了更好地解决数学教育何去何从的问题，人们无疑需要从理论的高度对数学教育的一些基本问题作出更为自觉的分析与反思，包括“什么是数学”、“为什么要进行数学教育”、“什么是数学学习活动的本质”等。这样，数学教育哲学的兴起就不可避免了。

从时间上说，英国学者欧内斯特（P. Ernest）于 1991 年出版的《数学教育哲学》（上海教育出版社于 1998 年出版了该书的中文版）即是关于这一论题的最早的系统研究。特别是，这一著作明确地提出了这样的思想，即数学教育哲学研究主要应围绕以下四个问题展开：①数学的本质；②数学学习活动的本质；③数学教育的目的；④数学教学活动的本质。然而，由于这是一个全新的研究领域，因此，尽管欧内斯特已经明确地提出了上

述四个论题，但是，他的这一著作却未能对这些问题作出充分的讨论；而且，这一著作事实上主要集中于各种不同数学教育目标的分析，从而就很难说成是成功地建立起了关于“数学教育哲学”的理论体系。

与上述的作法相反，笔者认为，数学教育哲学的最终目标就是要为数学教育奠定必要的理论基础。为了实现这一目标，我们就必须从理论的高度对上述四个问题作出全面和深入的分析。事实上，我们在此可将“什么是数学教学活动的本质”这一问题归属于“什么是数学学习活动的本质”，因为，归根结底地说，学生即应被看成是学习活动的主体，从而，学习活动的本质也就直接决定了教学活动的本质。

就哲学对于数学教育现代发展的重要影响而言，我们在此可特别提及当前在国际数学教育界十分盛行的建构主义（constructivism）。

具体地说，作为学习活动本质的分析，建构主义属于认识论的范畴，其核心观点就在于：学习并非是学生对于教师所授予的知识的被动接受，而是一个以其已有的知识和经验为基础的主动建构过程。

就对学生在学习活动中的主体地位以及学生在认识活动中能动作用的肯定而言，建构主义无疑有其积极的方面，并构成了对于传统教学思想的严重挑战，特别是，按照建构主义的观点，我们就应对教师在教学中的地位以及什么是适当的教学方法等一系列问题作出新的思考和分析。也正是在这样的意义上，有不少学者认为，建构主义事实上可被看成数学教育在 90 年代的主要口号。

然而，在充分肯定建构主义的积极意义的同时，我们又应看到，建构主义在现代的发展也包含有一些消极的成分，特别是，前些年在西方各国十分流行的“极端建构主义”就可说是由于完全否定认识的社会性而走向了荒谬。

当然，理论上的荒谬是不可能不付出代价的，而新的实践则又必然会促使人们纠正过去的错误并积极地去发展更为科学的理论。这事实上也就是建构主义在 90 年代的实际发展途径。就我国数学教育的发展而言，我们既应努力地去追随国际上数学教育的最新发展，但又应当注意从理论的高度去对此作出独立的分析，以防止成为各种错误的时髦口号的不自觉俘虏。显然，这也就更为清楚地表明了数学教育哲学所具有的重要的现实意义。

(2) 数学教育的社会－文化研究

如果说数学教育哲学即是代表了更为深刻的理论思考，那么，关于数学教育的社会－文化研究则就可以说是为我们深入开展数学教育的研究提供了一个新的、更为广阔的视角。这就是指，我们应把数学教育看成人类活动的一个有机组成成分，并从社会和文化这样一种宏观的角度去作出新的分析。

更为一般地说，所说的社会－文化研究事实上也为我们更为深入地去理解数学的本质提供了重要的启示，特别是，数学不应被等同于数学知识（事实性结论）的汇集，而应主要地被看成人类的一种创造性活动，从而，除事实性结论外，我们也就应当把“问题”、“语言”、

“方法”等同样看成是数学（或者说，数学活动）的重要组成部分；另外，更加重要的是，由于在现代社会中每个数学家都必然地是作为相应社会共同体（“数学共同体”）的一员从事自己的研究活动的，从而就自觉地或不自觉地处于一定的数学传统之中，因此，我们也就应当把作为数学传统具体体现的各种观念，即如数学观和应当如何去从事数学研究的共同认识等，看成数学（活动）的又一重要组成成分。

显然，从这样的角度去进行分析，我们也就应深入地去研究社会－文化环境对于数学发展的重要影响，特别是，我们即应清楚地看到人类发展史上存在有多种不同的数学传统，而各种数学传统、尤其是所谓的“东西方数学传统”又各有其一定的优点和局限性。容易看出，上述的研究不仅对于我们正确评价数学的历史发展有着重要的指导意义，而且也对促进数学的现代发展有着重要的启示意义。

特殊地，从教育的角度看，以上的分析显然也就表明了我们应从更为广泛的角度去从事数学教育的研究。例如，80年代以来在国际上所兴起的关于“民俗数学”（ethnomathematics）的研究事实上就可被看成从社会－文化的角度去从事数学教育研究的一个重要内容。

具体地说，所谓“民俗数学”的研究，其基本的出发点就在于，我们应当清楚地认识到学生可以通过自己的日常生活获得一定的数学知识，而后者与他们在学校中所学到的数学知识（可称为“学校数学”或“正规数学”）很可能是不相同的（或者说，是完全不相干的）。

当然，我们在此不应将“民俗数学”与“学校数学”绝对地对立起来，勿宁说，我们既应明确肯定由民俗数学向正规数学转变的必要性，也应当善于以民俗数学作为进一步发展正规数学的适当基础。然而，就当前的研究来说，主要的问题则又在于我们应当充分认识民俗数学的积极意义，而不应对此采取视而不见、甚至是完全排斥的态度。

事实上，在笔者看来，民俗数学的存在即是从又一角度更为明确地向我们提出了这样的问题：我们应当努力使学校的数学教学与学生的日常生活更为紧密地联系起来。例如，正是基于这样的考虑，一些学者提出了应当使“数学课程本土化”的口号，而这显然是一个十分有意义的研究方向。

最后，从社会－文化的角度去进行分析，我们显然也应高度重视关于数学教育的社会－文化功能的分析，特别是，这直接关系到数学教育的基本目标。例如，只有立足于人类社会由工业社会向信息社会的重要转变，我们才能更好地认识数学教育由“应试教育”向“素质教育”转变的历史必然性，从而也才有可能更为自觉地去参与这一重要的变革运动。就目前的论题而言，这显然就更为清楚地表明了数学教育的社会－文化研究的重要性。

(3) 数学方法论的深入研究

数学方法论现今在我国数学教育界已不再是一个陌生的名词了。自徐利治先生在 70 年代末首先倡导这方面的研究以来，数学方法论不仅经历了一个自无到有的发

展过程，而且也对实际的数学活动、特别是数学教育产生了十分重要的影响，以致一些学者提出，就我国数学教育的现代发展而言，数学方法论应被看成最为重要的促进因素之一。

然而，如果就近期的情况进行分析，我们在此却又可以看到某种发展的停顿，而其主要表现就是新的创造性工作的缺乏，特别是，数学方法论科学理论体系的建立更可说是一个急待解决的问题。

为了在后一方面取得切实的进展，笔者以为，我们一方面应对已做的工作作出认真的总结和反思，另外又应注意吸取国外积极的研究成果。事实上，就国外的相关研究而言，即如关于“问题解决”和“高层次数学思维”（advanced mathematical thinking）的现代研究等，在很大程度可说是与国内的数学方法论研究构成了平行的发展。特别是，这些研究不仅真正作到了对于波利亚的超越，而且相对于国内的研究而言，它们还有着不同的研究内容和研究特色。从而，从整体上说，这两者就有着明显的互补性和相互促进的作用。

例如，所谓的“高层次数学思维”即是相对于“初等数学思维”（elemently mathematical thinking）而言的，而两者的区别则在于，高层次数学思维已经包括了由“描述”向“定义”、由“确信”向“证明”的重要转变。也正因为此，以“高层次数学思维”作为主要的研究对象事实上就标志着相应的研究已开始深入到了真正的数学活动之中。显然，也只有这样，我们才可能真正揭示出数学思维的特殊性。事实上，国外关于高层次数学思

维的现代研究已经超出一般学习心理学的范围而形成了一些数学学习所独有的概念，如“概念定义”和“概念意象”，“过程”和“对象”，“形象化”，“概念域”等。从而，这也就为我们深入地开展数学方法论的研究指明了努力的方向。

特殊地，笔者以为我们即可以通过对于国内外研究成果的科学整合建构起数学方法论的科学理论体系。

具体地说，由于“问题解决”和“概念的生成和应用”可以被看成实际数学活动、特别是数学教学活动的主要形式，因此，这就应当被看成数学方法论的两个主要内容；另外，从更高的层次去进行分析，数学创造的问题（包括所谓的“数学的研究精神”）显然也应被看成数学方法论的又一重要内容。

另外，作为新体系的一个重要特征，我们则又应当十分注意将数学方法论的研究与相应的心理学研究有机地结合起来。事实上，这正是国外相关研究的一个重要特色，即是直接立足于实际数学思维过程（包括数学学习过程）的深入研究。显然，这也应被看成数学方法论研究的一个重要原则。

最后，就数学方法论的深入研究而言，我们又应突出地强调这样一点，即数学方法论不仅有助于数学教学的改善，更直接关系到了数学教育的各个方面，包括教育目标、教学内容选择和组织等。显然，这也就更为清楚地表明了我们的确应把数学方法论的深入发展看成是数学教育多学科、多方位研究的一个重要方面。

综上所述，积极开展多学科、多方位的研究即可被

看成数学教育现代发展的一个重要特点。正是基于以上的认识，我们特设计了“数学·哲学·文化·教育”这样一个系列，以期能从一个侧面更好地反映数学教育的现代发展，并能积极地促进我国的数学教育事业的深入发展。

这一系列共包括以下三部著作：

①数学教育哲学（作者：郑毓信）；

②数学文化学（作者：郑毓信、王宪昌、蔡仲）；

③数学思维与数学方法论（作者：郑毓信、肖伯荣、熊萍）。

应当说明的是，关于数学教育的多学科、多方位研究当然并不局限于以上三个论题，而我们之所以作出这样的选择主要是由于以下的原因：

第一，由以上的论述我们已经知道，这三个论题对于数学教育的深入发展都有着特别的重要性。

为了更加清楚地说明问题，我们在此还可特别提及台湾数学教育界关于数学教育发展的指导性文件《数学教育》，其中，作为“数学教育研究的关键性议题与发展趋势”，曾列举了以下十个论题：①国际化之趋势；②数学教育的全民化；③建构主义与数学教育哲学；④认知科学与数学教育；⑤计算机与数学教育；⑥问题解决；⑦民俗数学；⑧数学教育评价；⑨数学师资培养；⑩大学数学教育。另外，在具体地指明上述十个论题的内容之前，文件又强调指出，我们除了基于境内数学教育现代化的需要，“特意强调国际化的重要性外，更觉得有必要在全方位改革的诉求之邻，明显地标志出数学教育全民化的意义。因为数学虽有科学之母的美称，数学教育在

本质上所肩负的是人文陶冶的使命，数学理解力的传播与数学精英的培育，同是提升数学文化的工作，内容虽有差异，追求高层次思考的精神却是一致的。……由于教育的目标、内容与方法，皆受意识形态所左右，对当今显学‘建构主义’有关的议题，作一简述，乃有必要。由于，以深入细察人们的学习机制与过程为宗旨的跨科性研究：认知科学，及其与数学教育的关联，至今尚未受到国内学者的赏识，故系为一节，以示其要。……”（第2页）显然，这也就清楚地表明了上述三个选题对于数学教育深入发展的重要性。

在上述的十个论题中，论题1、论题2和论题5在很大程度上即可说是集中地表明了现代数学教育特定的社会背景，包括由于社会的进步对于数学教育所提出的新的更高的要求，以及计算机这一新的物质技术条件为数学教育的深入发展所提供的新的挑战 and 机遇；另外，论题8、论题9和论题10则直接反映了数学教育现代发展中一些薄弱环节；除此以外，其余的各个论题则都可以说是体现了一种多学科、多方位的研究方向，并都是与上述的三个选题直接相关的。当然，这方面的已有工作也就为上述三部著作的撰写提供了重要的基础。

然而，应当强调的是，这三部著作又并非是已有工作的简单组合，恰恰相反，它们主要反映了作者的独立思想和探索性研究；另外，还应强调的是，这又不是一种纯理论的研究，勿宁说，我们更希望相应的理论研究能对促进实际的数学教育活动发挥积极的作用，特别是，这些著作即能为数学教师的培养、包括在职教师的进修

提供切实的帮助。笔者以为，数学教育的现代发展已经清楚地表明了这样一点：除去数学知识的更新和深化以外，在数学教师的培养和训练中我们应十分重视知识面的拓宽，更应注意观念（包括数学观和数学教育观等）的更新。例如，正是从这样的角度去分析，笔者以为，香港大学教育学院为数学教育硕士班开设以下的六门“专业课程”就为我们提供了重要的启示：①数学教育哲学；②数学课程研究及其发展；③数学学习和教学的研究；④评估和课程；⑤数学教育的社会文化研究；⑥数学教育的现代研究。（当然，上述的课程内容事实上也就从又一侧面表明了“数学·哲学·文化·教育”这一系列的前沿性。）

第二，这三个论题比较适合作者的知识背景和研究经历，从而也有可能较好地发挥作者的研究特色，以期达到较高的写作水准。

具体地说，作为本系列的设计者和主要作者，笔者1965年从江苏师范学院数学系毕业以后曾长期在中学任数学教师，从而就对中学数学教育的实际情况有着较深的了解；其后，1978年笔者作为硕士研究生进入了南京大学哲学系，这不仅使我又一次获得了系统学习的机会，而哲学素养的提高更为我深入地去从事关于数学和数学教育的理论分析打下了必要的基础。从1981年起，笔者主要从事数学哲学的专门研究，同时，作为徐利治教授的学生和学术助手，自己也在数学方法论的研究上投入了较大的精力。1989年以后，怀着从担任中学教师起就已逐渐养成的深厚情感，自己又重新转向了数学教育，

特别是，由于特殊的研究背景，自己先后从事了“数学的文化观念”、“数学教育哲学”、“认知科学、建构主义与数学教育”等具有较强理论性和交叉性的课题的研究，从而也就为本系列的写作提供了直接的基础。还应提及的是，由于在这些年中笔者曾有机会多次赴英美等国从事学术访问和合作研究，从而就对国际上的学术动态及其最新研究成果有着较好的了解，而这不仅切实保证了相关研究的先进性，而且也为充分吸收国外积极的研究成果并通过对国内外相关研究的比较和整合作出新的创造性工作提供了良好的基础。

从整体上说，这事实上就可被看成这一系列的主要特点（或者说，笔者即是希望能在以下一些方面取得切实的进步）：①交叉性：数学、哲学、文化学、认知科学、方法论和教育学等多学科的相互交叉与渗透；②前沿性：系列中所论及的都是国际数学教育界最为关注的一些热点问题；③创新性：这并非对国外工作的简单介绍，作者不仅就各个主要问题提出了独到见解，并从整体上给出了新的概念体系；④理论性：扎实的理论根底，独到的哲学见解。

当然，由于论题涉及面广，在构思与写作的过程中笔者也深切地感受到了自身的不足和局限性。十分幸运的是，这些不足之处和局限性由于王宪昌、蔡仲、肖伯荣、熊萍等先生的加盟得到了必要的补救。如果没有这几位朋友的大力合作，这一系列就不可能顺利地问世并达到现有的水准。

第三，还应提及的是，作为这一系列的第一部著作

——《数学教育哲学》在 1995 年已先期得到了出版。这一著作不仅获得了全国优秀教育类图书评选（第四届）一等奖，也受到了广大数学教育工作者的普遍欢迎，从而，也就极大地增强了笔者在数学教育的多学科、多方位研究这一方向上作出进一步努力的决心，这一系列的后两部著作就是这一努力的直接结果。

由于论题的前沿性，更由于作者所希望的是一种创造性的工作，因此，笔者就并不期望这些工作已经达到了完全成熟的程度；恰恰相反，我们十分希望这些探索性工作能引起更多数学教育工作者的兴趣，从而就能通过共同的努力进一步促进我国的数学教育理论研究。也正是出于这样的考虑，我们十分欢迎来自各个方面的批评和意见。

最后，笔者愿借此机会表示对于四川教育出版社的领导和有关编辑的深切谢意：这不仅是因为他们对本系列的出版提供了极大的支持，更是因为这一工作最为清楚地表明了他们对于我国数学教育事业的深切关注，对于广大的数学教育工作者来说这无疑也是一个极大的支持。

目 录

序言：数学文化学的内容、性质和意义 (1)	
-----------------------	--

第一篇 数学的文化观念	(15)
-------------	------

第一章 数学对象的形式建构和文化性质	(17)
--------------------	------

1. 1 作为文化之数学实在	(17)
----------------	------

1. 2 数学对象的形式建构	(27)
----------------	------

1. 3 无限丰富的数学世界	(34)
----------------	------

第二章 传统指导下的活动	(44)
--------------	------

2. 1 数学共同体与数学传统	(44)
-----------------	------

2. 2 不同的数学传统	(56)
--------------	------

2. 3 趋向一致的现代数学传统	(66)
------------------	------

第三章 数学文化：一个开放的系统	(90)
3. 1 数学发展的内在动力与规律	(91)
3. 2 数学文化：一个开放的系统	(110)

第二篇 数学文化史的研究 (121)

第四章 古希腊与文艺复兴时期的数学	(123)
4. 1 古希腊文化中的数学	(123)
4. 2 文艺复兴时期的数学	(138)

第五章 西方文化中的微积分	(157)
5. 1 微积分的萌芽与其早期发展	(157)
5. 2 牛顿和莱布尼兹的贡献及其影响	(168)
5. 3 无穷小运算与第二次数学危机	(180)

第六章 非欧几何的历史发展	(191)
6. 1 第五公设的历史研究	(191)
6. 2 非欧几何的建立	(197)
6. 3 回顾与思考	(205)
6. 4 非欧几何与西方数学观的革命	(214)

第七章 中西数学的文化比较	(223)
7. 1 中国文化中的数学	(223)
7. 2 比较与思考	(247)